

Калетнік Г. Макадемік НААН України,
д.е.н., професор**Вінницький національний
аграрний університет****Присяжний В. Г.**

к.т.н., с.н.с.

**Інститут механіки та
автоматики
агропромислового
виробництва Національної
академії аграрних наук
України****Мітков В.Б.**

к.т.н., доцент

Скляр О.Г.

к.т.н., професор

**Таврійський державний
агротехнологічний
університет імені Дмитра
Моторного****Kaletnik H.**academician of the NAAS of Ukraine,
Doctor of Economics, Professor**Vinnitsia National Agrarian
University****Prysyazhnyi V.**Candidate of Technical Sciences,
Senior Lecturer**Institute of Mechanics and
Automation of Agro-Industrial
Production, National Academy
of Agrarian Sciences of
Ukraine****Mitkov V.**Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor**Skliar O.**Candidate of Technical Sciences,
Professor**Dmytro Motorny Tavria State
Agrotechnological University****УДК 631.356.02****DOI: 10.37128/2306-8744-2026-2-1****УДОСКОНАЛЕНА МАТЕМАТИЧНА
МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ
ЗАДНЬОНАВІШЕНОГО ОЧИСНИКА
ГОЛОВОК КОРЕНЕПЛОДІВ З
УРАХУВАННЯМ ПРУЖНО-
ДЕМПФУЮЧИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ
ҐРУНТУ**

Досліджено коливальний рух задньонавішеного очисника головок коренеплодів у повздовжньо-вертикальній площині під час руху агрегату по нерівній поверхні поля. Розглянуто задачу підвищення стабільності технологічного процесу очищення шляхом уточнення взаємодії «копіювальне колесо – ґрунт» для деформівних ґрунтів. Розроблено удосконалену розрахункову схему, у якій ґрунт подано як в'язкопружну опору з еквівалентними параметрами жорсткості та демпфування, а нормальну реакцію опори сформовано як залежну від осадки і швидкості осадки ґрунту. Побудовано математичну модель на основі рівнянь Лагранжа другого роду для двох узагальнених координат, що описують кутове відхилення рами агрегату та вертикальне переміщення вузла копіювальних коліс. Уточнено геометрію розташування очисного барабана: відстань від точки підвісу до точки його закріплення прийнято як суму відстані до осі копіювального колеса та конструктивного виносу, який дорівнює радіусу барабана з додаванням безпекового зазору 0,1 м. Виконано чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта та побудовано часові реалізації вертикальних переміщень для різних режимів руху.

Установлено, що зі збільшенням швидкості руху з 0,8 до 2,4 м·с⁻¹ (за сталої відстані від точки підвісу до осі копіювального колеса 1,0 м) амплітуда вертикальних коливань вузла копіювальних коліс зростає орієнтовно з 33 до 43 мм, що свідчить про наближення до області підсилення вимушених коливань на заданій хвилястості поля. Показано, що збільшення відстані від точки підвісу до осі копіювального колеса з 0,8 до 1,2 м при швидкості 1,6 м·с⁻¹ приводить до істотного підсилення коливань у точці закріплення очисного барабана: амплітуда переміщень зростає орієнтовно з 32 до 59 мм, тобто приблизно у 1,85 рази. Проведено параметричний аналіз впливу ґрунтових властивостей у вигляді еквівалентної ґрунтової жорсткості та еквівалентного ґрунтового демпфування. Виявлено, що збільшення ґрунтової жорсткості підвищує передавання збурень від профілю поля на раму агрегату, тоді як збільшення ґрунтового демпфування знижує амплітуду коливань за рахунок інтенсивнішого розсіювання енергії. У діапазоні еквівалентної ґрунтової жорсткості 5–80 кН·м⁻¹ та еквівалентного демпфування 0,4–2,0 кН·с·м⁻¹ амплітуда переміщень у точці барабана для характерного режиму руху становить орієнтовно 35–48 мм. Одержані результати



УДОСКОНАЛЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ ЗАДНЬОНАВІШЕНОГО ОЧИСНИКА ГОЛОВОК КОРЕНЕПЛОДІВ З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОДЕМПФУЮЧИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ҐРУНТУ © 2026 by Калетнік Г. М., Присяжний В. Г., Мітков В. Б., Скляр О. Г. ліцензовано згідно з СС BY 4.0

можуть бути використані для обґрунтування раціональних конструктивних параметрів підвіски, вибору швидкісних режимів та адаптації налаштувань очисника до стану ґрунту (вологість, ущільнення).

Ключові слова: очисник головок коренеплодів, задньонавішений агрегат, копіювальні колеса, очисний барабан, повздовжньо-вертикальні коливання, ґрунтова основа, в'язкопружна опора, рівняння Лагранжа, чисельне моделювання, параметрична чутливість.

Постановка проблеми. Під час збирання цукрових буряків після основного зрізання гички на корені на поверхні головок коренеплодів нерідко залишаються міцні фрагменти черешків та бруньок. Для їх видалення застосовують очисники різних схем (барабанні, лопатеві, з пружними елементами тощо), які мають забезпечувати стабільний контакт робочого органу з головою коренеплоду за мінімальних пошкоджень і втрат. Узагальнення конструктивних напрямів і технологічних рішень для очищення коренеплодів наведені у сучасних оглядових і прикладних роботах.

Збільшення робочих швидкостей агрегатів та нерівності поля зумовлюють вимушені коливання машини у повздовжньо-вертикальній площині, що безпосередньо впливає на точність технологічної дії. Для навісних бурякозбиральних модулів і систем «трактор – машина» отримані математичні моделі коливань та показано вплив геометрії підвісу й швидкісного режиму на амплітуду переміщень робочих органів. Для задньонавішених очисників головок коренеплодів запропоновано моделі руху у повздовжньо-вертикальній площині на основі рівнянь Лагранжа, однак у базових постановках ґрунт зазвичай розглядають як джерело кінематичного збурення через профіль нерівностей.

У реальних умовах контакт «копіювальне колесо – ґрунт» супроводжується деформацією та розсіюванням енергії у ґрунтовому середовищі, параметри яких залежать від типу ґрунту, вологості та ущільнення. Геотехнічні дослідження показують суттєву варіативність модуля реакції основи та коефіцієнтів демпфування за динамічного навантаження і обґрунтовують використання еквівалентних в'язкопружних моделей для опису взаємодії «машина–опора». Тому включення в математичну модель очисника параметрів ґрунтової жорсткості та демпфування є необхідним для адекватнішого прогнозування коливань та вибору раціональних конструктивних параметрів.

Аналіз останніх досліджень. Задньонавішений очисник головок коренеплодів

працює в умовах нерівностей поверхні поля та змінного стану ґрунту. Копіювальні колеса, переміщуючись міжряддями, передають збурення на раму та робочий орган, що може призводити до нестабільного контакту очищувальних елементів із головою коренеплоду, зростання пошкоджень та втрат. Практика експлуатації показує, що інтенсивність цих коливань зростає зі збільшенням швидкості руху і за м'якших деформівних ґрунтів, коли частина енергії витрачається на деформацію опори.

У більшості розрахункових схем профіль поля задається гармонічною або випадковою функцією, тоді як пружно-в'язкі властивості ґрунту в зоні контакту «колесо – ґрунт» не враховуються або підміняються квазістатичними оцінками нормальної реакції [1, 2]. Це обмежує можливості моделі щодо прогнозування амплітуд у робочому діапазоні швидкостей та щодо перенесення результатів на різні типи ґрунтів. Тому актуальним є удосконалення математичної моделі коливань задньонавішеного очисника шляхом введення еквівалентних параметрів ґрунту (жорсткості та демпфування) і подальший аналіз впливу конструктивних та кінематичних параметрів на коливання копіювальних коліс і робочого органу.

У сучасних дослідженнях, присвячених бурякозбиральним машинам, значну увагу приділяють удосконаленню конструкцій робочих органів та підвищенню якості очищення і доочищення головок коренеплодів, зокрема через оптимізацію кінематичних режимів і геометрії очищувальних елементів [3]. Паралельно розвиваються аналітичні підходи до опису коливальних процесів навісних агрегатів: для фронтально навішених модулів показано, що параметри підвісу та швидкість руху можуть переводити систему в області підсилення вимушених коливань, що погіршує технологічні показники [4–6].

Для задньонавішених очисників головок коренеплодів запропоновано математичні моделі, у яких рух у повздовжньо-вертикальній площині описують двома узагальненими координатами та використовують рівняння Лагранжа [1, 2]. Однак у цих підходах ґрунт переважно задається як геометричний профіль нерівностей, тоді як пружно-демпфуючі властивості опори не вводяться явно. Водночас геотехнічні роботи демонструють, що



модуль реакції основи та коефіцієнт демпфування є параметрами, які суттєво залежать від ґрунтових умов і визначають частотні властивості системи «машина–опора» [7–12]. Тому наявні підстави для інтеграції еквівалентних параметрів ґрунтової опори у динамічну модель очисника як лінійних в'язкопружних зв'язків (Кельвін Фойгт), що дозволяє порівнювати режими роботи на різних типах ґрунтів та обґрунтовувати конструктивні рішення.

Мета дослідження Розробити та теоретично дослідити удосконалену математичну модель коливального руху задньонавішеного очисника головок коренеплодів у повздовжньо-вертикальній площині з урахуванням пружно-демпфуючих властивостей ґрунту та оцінити кінематичних і конструктивних параметрів на часові реалізації коливань копіювальних коліс і робочого органу.

Результати досліджень та їх обговорення. Еквівалентна схема руху задньонавішеного очисника головок коренеплодів у повздовжньо-вертикальній площині наведена на рис. 1. Розглянемо рух копіюючого колеса радіуса r

. Припустимо, що це колесо, рухається по поверхні ґрунту синусоїдального поперечного профілю [1], і перемістилось із одного положення в інше на відстань x . У площині обертання на копіююче колесо діють: сила ваги машини \bar{G} і тягове зусилля \bar{F}_T . З боку очисника головок коренеплодів діє сила опору \bar{F}_R . Під дією вказаних сил в точці K_1 контакту копіювального колеса з нерівністю поверхні ґрунту виникають нормальна \bar{N} і дотична $f\bar{N}$ реакції (де f – коефіцієнт опору перекочування) [2]. Напрями дії нормальної \bar{N} і дотичної $f\bar{N}$ реакцій визначається кутом α . Вважаємо, що шарнір підвісу рами до трактора (точка В) у першому наближенні не має вертикальних переміщень, а копіювання мікрорельєфу поля здійснюється копіювальними колесами. Коливальна система має дві ступені вільності: кут повороту рами β відносно горизонту та вертикальну координату у центра мас копіювальних коліс (точка C_1).

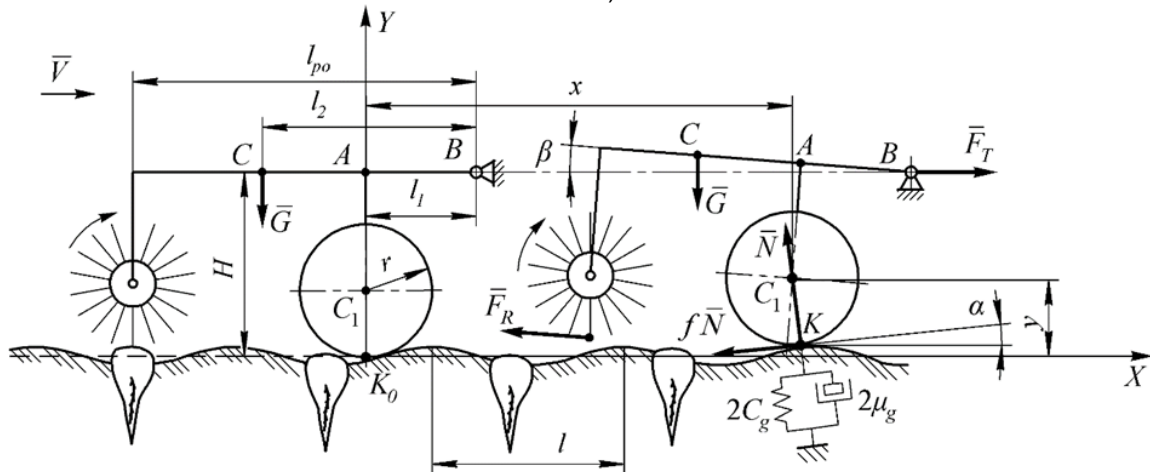


Рис. 1. Еквівалентна схема руху задньонавішеного очисника головок коренеплодів по нерівностях поверхні ґрунту

Нерівності поверхні поля для розрахунків подано гармонічною функцією профілю поля, що у часовому представленні для сталої швидкості руху V має вигляд:

$$h(t) = h_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot V \cdot t}{l}\right) \quad (1)$$

де h_0 – половина висоти нерівності, м; l – крок (довжина) нерівностей, м; t – час, с.

Пружно-демпфуючі властивості пневматичних копіювальних коліс описано коефіцієнтами $2C$ ($\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$) та 2μ ($\text{H} \cdot \text{с} \cdot \text{m}^{-1}$), які у сумі враховують два колеса.

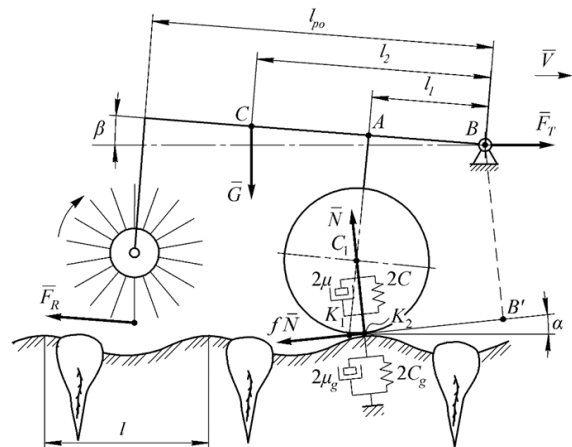


Рис. 2. Геометрія сил і плечей у повздовжньо-вертикальній площині (для визначення узагальнених сил)



У базовій постановці задачі нормальна реакція ґрунту N часто визначається з умови рівноваги (квазістатично) у вибраний момент часу. Такий підхід не враховує, що ґрунт під колесом деформується і частина енергії коливань розсіюється у вигляді внутрішнього тертя та в'язких втрат. Для усунення цього обмеження ґрунт у зоні контакту колеса моделюємо як в'язкопружний елемент Кельвіна-Фойгта.

Вводимо додаткові параметри ґрунту: $2C_g$ – еквівалентний коефіцієнт жорсткості ґрунтової опори ($\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}$) та $2\mu_g$ – еквівалентний коефіцієнт демпфування ґрунту ($\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1}$). Деформацію ґрунту у вертикальному напрямку визначаємо за різницею між заданим профілем нерівностей та переміщенням колеса:

$$\delta_g(t) = h(t) - y(t), \quad (1)$$

тоді нормальна реакція опори набуває вигляду:

$$N(t) = N_0 + 2C_g \cdot \delta_g(t) + 2\mu_g \cdot \dot{\delta}_g(t), \quad (2)$$

де N_0 – статична складова, що відповідає середньому навантаженню на копіювальні колеса у сталому режимі; $\dot{\delta}_g(t) = \dot{h}(t) - \dot{y}(t)$.

Таким чином, реакція ґрунту стає функцією стану системи та швидкості деформації, а модель набуває завершеного (замкненого) вигляду без окремого квазістатичного визначення N .

За узагальненими координатами $q_1 = \beta$ та $q_2 = y$ і з урахуванням лінійних пружнодемпфуючих зв'язків, на основі [1], отримано систему двох зв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку (лінійна постановка для малих кутів β):

$$\left. \begin{aligned} I_B \ddot{\beta} + 2\mu l_1^2 \dot{\beta} + 2C l_1^2 \beta - 2\mu l_1 \dot{y} - 2C l_1 y &= -l_1 N(t), \\ m \ddot{y} + 2\mu \dot{y} + 2C y - 2\mu l_1 \dot{\beta} - 2C l_1 \beta &= N(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де I_B – приведений момент інерції рами очисника відносно осі підвісу, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; m – приведена маса копіювальних коліс, кг ; h – відстань від точки підвісу до осі кріплення копіювальних коліс, м ; l_2 – відстань від точки підвісу до центра мас рами очисника, м ; l_{po} – відстань від точки підвісу до точки закріплення очисного барабана (робочого органу), м . З конструктивних міркувань $l_{po} = h + r + l_k$, де $l_k = r_b + 0,1$ м (r_b – радіус очисного барабана), отже $h < l_{po}$. Підстановка виразу $N(t)$ у систему робить її замкненою та дозволяє отримувати $y(t)$ і $\beta(t)$ при заданих параметрах ґрунту та профілі $h(t)$.

Для ілюстрації впливу швидкості руху та відстані h виконано чисельне моделювання системи (за рівняннями попереднього підрозділу) при гармонічному збуренні від нерівностей поля. Орієнтовні значення параметрів наведено в табл. 1; їх можна уточнювати за результатами польових або стендових вимірювань для конкретної машини і конкретних ґрунтових умов.

Таблиця 1

Орієнтовні вихідні дані, використані в чисельному експерименті

Параметр	Позначення	Одиниці	Значення
Половина висоти нерівності	h_0	м	0,04
Крок нерівностей	l	м	0,70
Приведений момент інерції рами	I_B	$\text{кг}\cdot\text{м}^2$	55
Приведена маса копіювальних коліс	m	кг	48,9
Жорсткість копіювальних коліс (для 2 коліс)	$2C$	$\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}$	4000
Демпфування копіювальних коліс (для 2 коліс)	2μ	$\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1}$	150
Еквівалентна жорсткість ґрунту	$2C_g$	$\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}$	25000
Еквівалентне демпфування ґрунту	$2\mu_g$	$\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1}$	1200
Радіус очисного барабана	r_b	м	0,20
Мінімальна конструктивна відстань від опорного колеса до робочого органу	$l_k = r_b + 0,1$	м	0,30

На рис. 3 наведено часові реалізації переміщення $y(t)$ центра опорного колеса для швидкостей $V = 0,8; 1,6; 2,4$ $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$ при фіксованому значенні $h = 1,0$ м . Зі збільшенням швидкості зростає частота збурення від

нерівностей ($\omega = 2\pi V/l$), що змінює співвідношення між вимушеною частотою та власними частотами системи «рама – колеса – ґрунт».

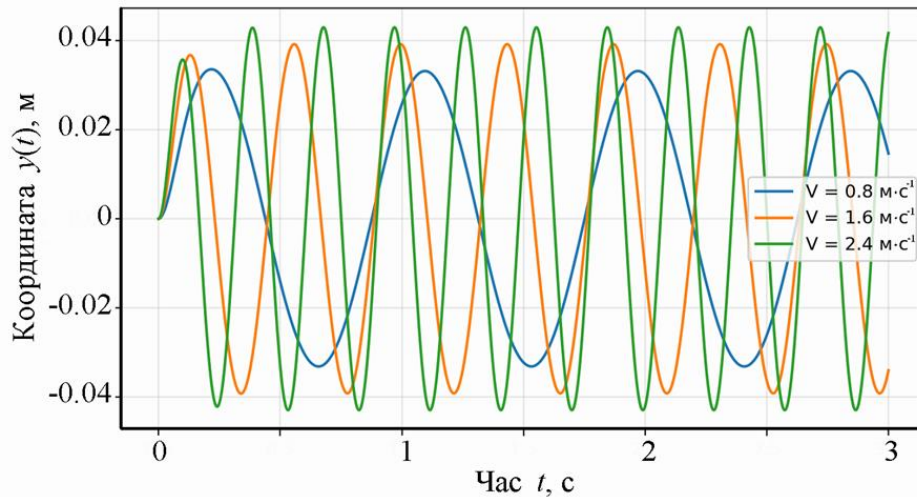


Рисунок 3. Залежність переміщення $y(t)$ центра опорного колеса від швидкості V руху очисника при $h_1 = 1,0$ м

Для прийнятих параметрів амплітуда коливань $y(t)$ у сталому режимі (після перехідного процесу) зростає від приблизно 0,033 м при $V = 0,8$ м·с⁻¹ до 0,039 м при $V = 1,6$ м·с⁻¹ і до 0,043 м при $V = 2,4$ м·с⁻¹. Отже, при збільшенні швидкості від 0,8 до 2,4 м·с⁻¹ амплітуда зростає орієнтовно на 30%. Така тенденція є характерною для вимушених коливань і може свідчити про наближення до швидкісної області підсилення (квазірезонансної), де вплив нерівностей поля на коливання агрегату стає найбільш відчутним.

На рис. 4 показано часові залежності переміщення робочого органу $y_{po}(t) = l_{po} \cdot \beta(t)$ при зміні відстані $h_1 = 0,8; 1,0; 1,2$ м за сталої швидкості $V = 1,6$ м·с⁻¹. Параметр h_1 визначає плече, через яке реакція ґрунту та коливання коліс збуджують кутові коливання рами β , а також впливає на кінематичне передавання

коливань до робочого органу через l_{po} . Тому варіювання h_1 впливає не лише на динаміку системи, але й безпосередньо на амплітуду переміщення очисного барабана.

Розрахунки показали, що для $V = 1,6$ м·с⁻¹ збільшення h_1 від 0,8 до 1,2 м призводить до зростання амплітуди переміщення робочого органу $y_{po}(t)$ орієнтовно з 0,032 до 0,059 м (приблизно у 1,85 раза). Причина полягає у тому, що зі збільшенням h_1 зростає збуджувальний момент від реакції опори, а збільшене плече l_{po} додатково підсилює переміщення очисного барабана. Водночас амплітуда $y(t)$ копіювальних коліс у цих режимах змінювалась помірно та навіть дещо зменшувалась (орієнтовно на 9–10%), що підкреслює: для оцінювання технологічної якості очищення необхідно аналізувати саме переміщення робочого органу, а не лише $y(t)$.

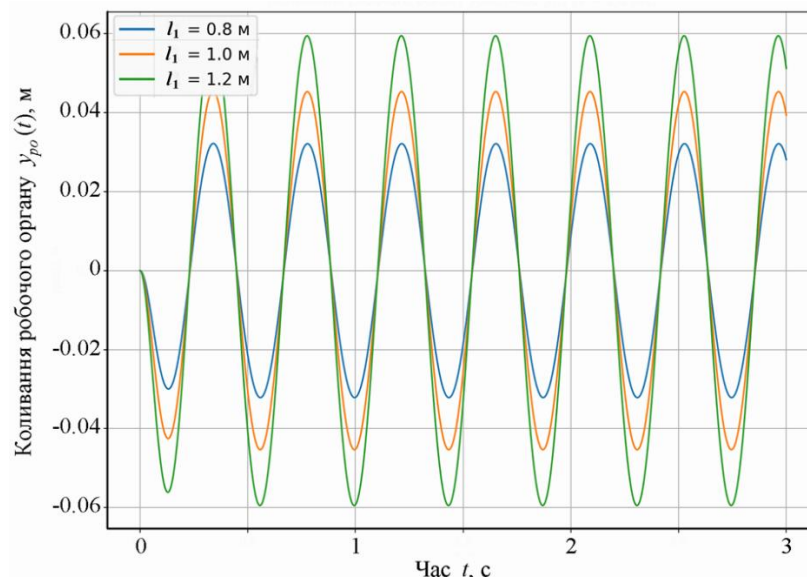


Рис. 4. Коливання робочого органу $y_{po}(t)$ за різних значень h_1 при $V = 1,6$ м·с⁻¹ та $r_b = 0,2$ м



Для уточнення впливу пружно-демпфуючих властивостей ґрунту виконано параметричний аналіз системи у сталому режимі коливань, як показник прийнято амплітуду переміщення робочого органу $|y_{po}|$ при гармонічному збуренні профілем $h(t)$.

На рис. 5 наведено карту чутливості амплітуди сталих коливань робочого органу $|y_{po}|$ до параметрів ґрунтової опори $2C_g$ та $2\mu_g$ для режиму $V = 1,6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $h_1 = 1,0 \text{ м}$ та $r_b = 0,2 \text{ м}$ ($l_{po} = 1,3 \text{ м}$). У межах варіювання $2C_g = 5 \dots 80 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$ та $2\mu_g = 0,4 \dots 2,0 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ амплітуда $|y_{po}|$ змінюється приблизно в діапазоні $34,8 \dots 48,4 \text{ мм}$. Зі зростанням жорсткості ґрунту $2C_g$ збільшується

передавання збурень від профілю $h(t)$ до системи, що за фіксованого демпфування (наприклад $2\mu_g = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$) підвищує амплітуду з $38,7$ до $47,1 \text{ мм}$ (\approx на 22%). Зі збільшенням демпфування $2\mu_g$ за сталої жорсткості ($2C_g = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$) амплітуда зменшується з $48,4$ до $44,3 \text{ мм}$ (\approx на 8%). Порівняльні точки на графіку ілюструють, що для умовно «м'якшого» ґрунту ($2C_g = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$; $2\mu_g = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$) амплітуда становить близько $40,8 \text{ мм}$, тоді як для умовно «жорсткішого» ґрунту ($2C_g = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1}$; $2\mu_g = 1,6 \text{ кН} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$) – приблизно $46,8 \text{ мм}$.

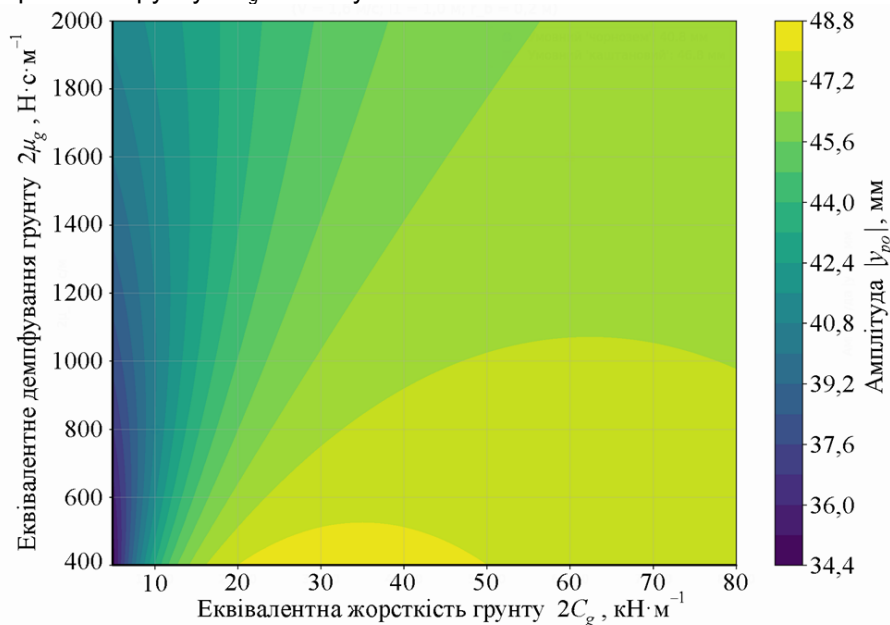


Рис. 5. Чутливість амплітуди сталих коливань робочого органу $|y_{po}|$ до параметрів ґрунтової опори $2C_g$ та $2\mu_g$ ($V = 1,6 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; $h_1 = 1,0 \text{ м}$; $r_b = 0,2 \text{ м}$)

Запропоноване удосконалення моделі полягає у введенні еквівалентних параметрів ґрунту $2C_g$ і $2\mu_g$ та у переході від квазістатичного визначення нормальної реакції до динамічного її представлення. На відміну від підходів, де ґрунт задається лише геометрією нерівностей, така постановка дозволяє врахувати енергоємність деформації та розсіювання енергії у зоні контакту «колесо – ґрунт» [7–12]. Додатково уточнено кінематичний зв'язок для оцінювання технологічно значущої координати робочого органу $y_{po}(t)$; це забезпечує коректну геометричну інтерпретацію положення очисного барабана відносно копіювальних коліс ($h < l_{po}$). Побудована карта чутливості (рис. 5) моделі причіпного очисника до пружно-демпфуючих параметрів ґрунту додатково показує, що в межах прийнятних параметрів збільшення жорсткості ґрунту $2C_g$, як правило, підвищує амплітуду переміщення робочого органу, тоді як збільшення демпфування $2\mu_g$ зменшує її. Це узгоджується з фізичним змістом моделі: жорсткіша опора передає більшу частку

збурювальних сил на систему, а в'язка складова розсіює енергію коливань.

Отримані часові реалізації підтверджують, що у розглянутому діапазоні швидкостей ($0,8 \dots 2,4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$) амплітуда коливань центра опорного колеса $y(t)$ зростає разом зі збільшенням робочої швидкості руху V , тобто система наближається до області підсилення вимушених коливань. Подібні висновки щодо чутливості навісних агрегатів до швидкісного режиму та геометрії підвісу наведені й для інших бурякозбиральних модулів [4–6]. Для задньонавішеного очисника ключовим є параметр h , який визначає передачу збурень у кутовий параметр β та, через величину конструктивного параметра l_{po} впливає на амплітуду переміщення очисного барабана. Як наслідок, навіть за порівняно помірних коливань $y(t)$ робочий орган може здійснювати значні переміщення, що критично для стабільності контакту з головою коренеплоду [1, 2].

Разом із тим модель ґрунту у вигляді Кельвіна-Фойгта є лінійним наближенням.



Реальна ґрунтова опора проявляє нелінійність, гістерезис і частотну залежність параметрів, що відзначено в сучасних геотехнічних роботах [10, 11]. Тому $2C_g$ і $2\mu_g$ слід розглядати як ефективні параметри в заданому діапазоні деформацій та частот. У подальших дослідженнях доцільно ідентифікувати ці параметри за польовими вимірюваннями для типових ґрунтів (чорноземи, каштанові) та розширити модель шляхом урахування коливань трактора і негармонічних (випадкових) нерівностей поверхні поля.

Висновки: Розроблено удосконалену математичну модель коливань задньонавішеного очисника головок коренеплідів у повздожньо-вертикальній площині, в якій взаємодію «копіювальне колесо – ґрунт» подано в'язкопружну моделлю Кельвіна-Фойгта з параметрами $2C_g$ та $2\mu_g$. Це забезпечило динамічний опис реакції опори $N(t)$ без окремого квазістатичного визначення.

2. Отримано систему двох зв'язаних диференціальних рівнянь для координат $\beta(t)$ та $y(t)$. Уведення ґрунтових параметрів приводить до появи додаткових членів, що змінює амплітудно-частотні властивості системи й дозволяє врахувати вплив стану ґрунту на коливальні процеси.

3. Чисельне моделювання для $h = 1,0$ м показало, що зі збільшенням швидкості руху від $V = 0,8$ до $2,4$ м·с⁻¹ амплітуда вертикальних коливань копіювальних коліс $y(t)$ зростає приблизно з $0,033$ до $0,043$ м (близько на 30%). Це свідчить про наближення до області підсилення вимушених коливань у вибраному діапазоні швидкостей та необхідність обґрунтування раціонального швидкісного режиму з урахуванням параметрів ґрунту.

4. Аналіз переміщення робочого органу $y_{po}(t)$ показав високу чутливість до конструктивного параметра h . За $V = 1,6$ м·с⁻¹ збільшення h від $0,8$ до $1,2$ м (за $r_b = 0,2$ м) приводить до зростання амплітуди $y_{po}(t)$ приблизно у $1,85$ рази (з $0,032$ м до $0,059$ м), тоді як амплітуда $y(t)$ змінюється помірно. Отже, при конструктивній оптимізації очисника доцільно орієнтуватися на мінімізацію коливань саме робочого органу, оскільки вони визначають стабільність контакту очищувальних елементів із голівкою коренеплоду.

5. Параметричний аналіз чутливості до параметрів ґрунту (рис. 5) для режиму $V = 1,6$ м·с⁻¹ та $h = 1,0$ м показав, що збільшення $2C_g$ підвищує амплітуду коливань робочого органу, а збільшення $2\mu_g$ – зменшує її. Зокрема, при $2\mu_g = 1,2$ кН·с·м⁻¹ збільшення $2C_g$ від 5 до 80 кН·м⁻¹ підвищує $|y_{po}|$ приблизно з $38,7$ до $47,1$ мм (на 22%), а при $2C_g = 25$ кН·м⁻¹ збільшення $2\mu_g$ від $0,4$ до $2,0$ кН·с·м⁻¹ зменшує $|y_{po}|$ приблизно з $48,4$ до $44,3$ мм (на 8%).

6. У подальших дослідженнях доцільно виконати експериментальну ідентифікацію параметрів $2C_g$ і $2\mu_g$ для типових ґрунтів (чорноземи, каштанові) за різної вологості та ущільнення, а також розширити модель шляхом урахування коливань трактора й неперіодичних (випадкових) складових профілю поверхні поля.

Список використаних джерел

1. Budzanivskiy M., Adamchuk V., Bulgakov V., Ihnatiev Ye. Development of the theory of root crop head cleaner movement in the longitudinal-vertical plane mounted behind a wheeled tractor. *Machinery & Energetics*. 2023. Vol. 14(4). P. 9–22. DOI: 10.31548/machinery/4.2023.09.
2. Bulgakov V., Adamchuk V., Ihnatiev Ye. Mathematical model of root head cleaning machine with pneumatic copying wheels in longitudinal-vertical plane. *Mechanization in Agriculture & Conserving of the Resources*. 2021. Vol. 67(1). P. 3–6.
3. Hevko R., Brukhanskyi R., Flonts I., Synii S., Klendii O. Advances in methods of cleaning root crops. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series II: Forestry, Wood Industry, Agricultural Food Engineering*. 2018. Vol. 11(60)(1). P. 127–138.
4. Pascuzzi S., Ivanovs S., Santoro F., Anifantis A.S., Bulgakov V. Study of the Movement Dynamics of a Beet Leaves Harvester. *Applied Sciences*. 2023. 13(2):841. DOI: 10.3390/app13020841.
5. Bulgakov V., Pascuzzi S., Anifantis A.S., Santoro F. Oscillations Analysis of Front-Mounted Beet Topper Machine for Biomass Harvesting. *Energies*. 2019. 12(14):2774. DOI: 10.3390/en12142774.
6. Zheng Z., Zhong Z., Zhu X., Xue Z., Cui J., Gao J., Lin J. Investigation into the vibration characteristics of agricultural wheeled tractor–implement system with hydro-pneumatic suspension on the front axle. *Biosystems Engineering*. 2019. Vol. 186. P. 14–33. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2019.05.004.
7. Naeini S., Ziaie Moayed R., Kordnaeij A., Molaabasi H. Prediction of subgrade reaction modulus of clayey soils using Group Method of Data Handling. *Scientia Iranica*. 2020. Vol. 27. P. 1740–1750. DOI: 10.24200/sci.2018.5586.1357.
8. Ahmad H., Mahboubi A., Noorzad A. Scale effect study on the modulus of subgrade reaction of geogrid-reinforced soil. *SN Applied Sciences*. 2020. 2:394. DOI: 10.1007/s42452-020-2150-4.
9. Koltuk S., Topçu S. Determination of Subgrade Reaction Modulus Considering the Relative Stiffnesses of Soil–Foundation Systems. *Applied Sciences*. 2025. 15(9):4714. DOI: 10.3390/app15094714.



10. Mog K., Anbazhagan P. Evaluation of damping ratio for varying dynamic loading. *Soils and Foundations*. 2022. 62(1):101091. DOI: 10.1016/j.sandf.2021.101091.

11. Shen Q., Zhang Y., Yan Y. A novel method for determining soil damping ratio combining DMA and strain energy. *International Journal of GEOMATE*. 2025. 28(127). P. 39–46. DOI: 10.21660/2025.127.4759.

12. Lanes R.M., Greco M., Almeida V.d.S. Viscoelastic Soil–Structure Interaction Procedure for Building on Footing Foundations Considering Consolidation Settlements. *Buildings*. 2023. 13(3):813. DOI: 10.3390/buildings13030813.

References

1. Budzanivskiy M., Adamchuk V., Bulgakov V., Ihnatiev Ye. Development of the theory of root crop head cleaner movement in the longitudinal-vertical plane mounted behind a wheeled tractor. *Machinery & Energetics*. 2023. Vol. 14(4). P. 9–22. DOI: 10.31548/machinery/4.2023.09. [in English]

2. Bulgakov V., Adamchuk V., Ihnatiev Ye. Mathematical model of root head cleaning machine with pneumatic copying wheels in longitudinal-vertical plane. *Mechanization in Agriculture & Conserving of the Resources*. 2021. Vol. 67(1). P. 3–6. [in English]

3. Hevko R., Brukhanskyi R., Flonts I., Synii S., Klendii O. Advances in methods of cleaning root crops. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series II: Forestry, Wood Industry, Agricultural Food Engineering*. 2018. Vol. 11(60)(1). P. 127–138. [in English]

4. Pascuzzi S., Ivanovs S., Santoro F., Anifantis A.S., Bulgakov V. Study of the Movement Dynamics of a Beet Leaves Harvester. *Applied Sciences*. 2023. 13(2):841. DOI: 10.3390/app13020841. [in English]

5. Bulgakov V., Pascuzzi S., Anifantis A.S., Santoro F. Oscillations Analysis of Front-Mounted Beet Topper Machine for Biomass Harvesting. *Energies*. 2019. 12(14):2774. DOI: 10.3390/en12142774. [in English]

6. Zheng Z., Zhong Z., Zhu X., Xue Z., Cui J., Gao J., Lin J. Investigation into the vibration characteristics of agricultural wheeled tractor–implement system with hydro-pneumatic suspension on the front axle. *Biosystems Engineering*. 2019. Vol. 186. P. 14–33. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2019.05.004. [in English]

7. Naeini S., Ziaie Moayed R., Kordnaei A., Molaabasi H. Prediction of subgrade reaction modulus of clayey soils using Group Method of Data Handling. *Scientia Iranica*. 2020. Vol. 27. P. 1740–1750. DOI: 10.24200/sci.2018.5586.1357. [in English]

8. Ahmad H., Mahboubi A., Noorzad A. Scale effect study on the modulus of subgrade

reaction of geogrid-reinforced soil. *SN Applied Sciences*. 2020. 2:394. DOI: 10.1007/s42452-020-2150-4. [in English]

9. Koltuk S., Topçu S. Determination of Subgrade Reaction Modulus Considering the Relative Stiffnesses of Soil–Foundation Systems. *Applied Sciences*. 2025. 15(9):4714. DOI: 10.3390/app15094714. [in English]

10. Mog K., Anbazhagan P. Evaluation of damping ratio for varying dynamic loading. *Soils and Foundations*. 2022. 62(1):101091. DOI: 10.1016/j.sandf.2021.101091. [in English]

11. Shen Q., Zhang Y., Yan Y. A novel method for determining soil damping ratio combining DMA and strain energy. *International Journal of GEOMATE*. 2025. 28(127). P. 39–46. DOI: 10.21660/2025.127.4759. [in English]

12. Lanes R.M., Greco M., Almeida V.d.S. Viscoelastic Soil–Structure Interaction Procedure for Building on Footing Foundations Considering Consolidation Settlements. *Buildings*. 2023. 13(3):813. DOI: 10.3390/buildings13030813. [in English]

IMPROVED MATHEMATICAL MODEL OF OSCILLATIONS OF A REAR-MOUNTED ROOT CROWN CLEANER CONSIDERING SOIL ELASTIC–DAMPING PROPERTIES

The oscillatory motion of a rear-mounted root-crop head cleaner in the longitudinal-vertical plane during travel over an uneven field surface was investigated. The problem of improving the stability of the cleaning process was considered by refining the “gauge wheel – soil” interaction for deformable soils. An improved computational scheme was developed in which the soil was represented as a viscoelastic support with equivalent stiffness and damping parameters, and the normal support reaction was formulated as a function of soil settlement and the settlement rate. A mathematical model was derived using Lagrange’s equations of the second kind for two generalized coordinates describing the angular deviation of the implement frame and the vertical displacement of the gauge-wheel assembly. The geometry of the cleaning drum location was clarified: the distance from the hitch point to the drum mounting point was taken as the sum of the distance to the gauge-wheel axis and a structural offset equal to the drum radius plus a safety clearance of 0.1 m. Numerical integration of the resulting system of differential equations was performed using the Runge-Kutta method, and time histories of vertical displacements were obtained for different operating regimes.

It was established that an increase in travel speed from 0.8 to 2.4 m·s⁻¹ (with a fixed distance of 1.0 m from the hitch point to the gauge-wheel axis) leads to an increase in the oscillation amplitude of



the gauge-wheel assembly from approximately 33 to 43 mm, indicating an approach to the amplification region of forced oscillations for the given field waviness. It was shown that increasing the distance from the hitch point to the gauge-wheel axis from 0.8 to 1.2 m at a travel speed of $1.6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ causes a significant amplification of oscillations at the cleaning-drum mounting point: the displacement amplitude increases from approximately 32 to 59 mm, i.e., by about 1.85 times. A parametric analysis of soil properties in terms of equivalent soil stiffness and equivalent soil damping was carried out. It was revealed that an increase in soil stiffness enhances the transmission of excitation from the field profile to the implement frame, whereas an increase in soil damping reduces the oscillation amplitude due to more

intensive energy dissipation. Within the range of equivalent soil stiffness of $5\text{--}80 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$ and equivalent damping of $0.4\text{--}2.0 \text{ kN}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$, the displacement amplitude at the drum mounting point for a representative operating regime was estimated at approximately 35–48 mm. The obtained results can be used to substantiate rational suspension geometry, select travel-speed regimes, and adapt cleaner settings to soil state (moisture and compaction).

Keywords: rear-mounted implement, root-crop head cleaner, cleaning drum, gauge wheels, longitudinal–vertical oscillations, soil viscoelastic support, Lagrange equations, numerical simulation, parametric sensitivity.

Відомості про автора

Калетнік Григорій Миколайович – академік НААН України, д.е.н., професор, ректор Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008) <https://orcid.org/0000-0002-4848-2796>

Присяжний Віктор Григорович – к.т.н., старший науковий співробітник Інституту механіки та автоматики агропромислового виробництва Національної академії аграрних наук України (вул. Вокзальна, 11/1, с-ще Глеваха, Фастівський район, Київська область, 08631; e-mail: viktor-pris@ukr.net) <https://orcid.org/0000-0001-5096-3241>

Мітков Василь Борисович – к.т.н., доцент кафедри експлуатації та технічного сервісу машин Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного (вул. Університетська 66, м. Запоріжжя, Запорізька обл., 69011, Україна e-mail: vasyl.mitkov@tsatu.edu.ua) <https://orcid.org/0000-0002-3652-0687>

Скляр Олександр Григорович – к.т.н., професор, завідувач кафедри Експлуатації та технічний сервіс машин Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного (вул. Університетська 66, м. Запоріжжя, Запорізька обл., 69011, Україна) <https://orcid.org/0000-0002-0456-2479>

Kaletnik Hryhorii – academician of the NAAS of Ukraine, Doctor of Economics, Professor, Rector of Vinnytsia National Agrarian University (3 Soniachna St., Vinnytsia, Ukraine, 21008) <https://orcid.org/0000-0002-4848-2796>

Prysyazhnyi Viktor – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Institute of Mechanics and Automation of Agro-Industrial Production, National Academy of Agrarian Sciences of Ukraine (11/1 Vokzalna St., Hlevakha Village, Fastiv District, Kyiv Region, 08631; e-mail: viktor-pris@ukr.net) <https://orcid.org/0000-0001-5096-3241>

Mitkov Vasyl – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Operation and Technical Service, Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University (66 Universytetska St., Zaporizhzhia, Zaporizhzhia Oblast, 69011, Ukraine, e-mail: vasyl.mitkov@tsatu.edu.ua) <https://orcid.org/0000-0002-3652-0687>

Skliar Oleksandr – Candidate of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Machine Operation and Technical Service at the Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University (66 Universytetska St., Zaporizhzhia, Zaporizhzhia Oblast, 69011, Ukraine). <https://orcid.org/0000-0002-0456-2479>

Стаття надійшла 30.04.2026

Стаття прийнята 11.05.2026

Опубліковано 28.05.2026