

Свящук Ю.А.

здобувач ступеня доктора філософії

Загнітко Я.В.

здобувач ступеня доктора філософії

*Вінницький національний
технічний університет***Sviashchuk Y.**

PhD student

Zahnitko Y.

PhD student

*Vinnitsia National Technical
University***УДК 631.35:531.3:633.63****DOI: 10.37128/2306-8744-2026-2-5****АНАЛІЗ ВПЛИВУ ФІЗИКО–
МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ
ТВЕРДИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА
ПРОЦЕС ВІБРАЦІЙНОГО
ФІЛЬТРУВАННЯ РІДИН**

Стаття присвячена комплексному дослідженню впливу фізико-механічних властивостей твердих включень на ефективність вібраційного фільтрування рідин у гірничій, хімічній, харчовій промисловості та екології.

Класичні методи фільтрування суттєво обмежені формуванням малопроникного осаду, опір якого критично зростає для тонкодисперсних суспензій. Вібраційне фільтрування є перспективною альтернативою, що забезпечує динамічне руйнування структури осаду та підвищення продуктивності.

Наукова новизна полягає у вперше здійсненій систематизації кількісних залежностей між властивостями частинок і параметрами осаду в умовах вібраційного впливу та побудові єдиної теоретичної рамки, що охоплює моделі Дарсі, Козені–Кармана, Вейкмана–Ву та Ілліса. Проведено чисельне параметричне дослідження для семи типових промислових суспензій і введено коефіцієнт зниження опору K_{zn} як інженерний критерій доцільності застосування вібраційного фільтрування.

Встановлено, що питомий опір осаду обернено пропорційний квадрату діаметра частинок, форма домінує над густиною як чинник опору, а K_{zn} зростає від 1,17 для пластинчастих до 5,24 для крупнодисперсних ізометричних частинок. Результати формують науково обґрунтовану базу для проєктування вібраційного фільтрувального обладнання.

Ключові слова: *вібраційне фільтрування, тверді включення, фізико-механічні властивості частинок, питомий опір фільтрувального осаду, стисливість осаду, форма частинок, розподіл частинок за розмірами, вібраційні мембранні системи, метод дискретних елементів, інтенсифікація фільтрування, чисельне параметричне дослідження, коефіцієнт зниження опору.*

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ
ВЛАСТИВОСТЕЙ ТВЕРДИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА
ПРОЦЕС ВІБРАЦІЙНОГО ФІЛЬТРУВАННЯ РІДИН ©
2026 by Свящук Ю.А., Загнітко Я.В. ліцензовано згідно з СС
BY 4.0

Постановка проблеми. Якість виконання робочого процесу під час фільтрування рідин від твердих включень є однією з найпоширеніших та енергоємних технологічних операцій, що застосовується у гірничій, хімічній, харчовій, фармацевтичній галузях та екології [1, 2]. Накладання механічних коливань на фільтрувальну систему забезпечує динамічне руйнування структури осаду та протидію утворенню щільного шару на поверхні фільтрувальної перегородки, що робить вібраційне фільтрування перспективною

альтернативою класичним методам [1,2]. Системи динамічного мембранного фільтрування, зокрема системи вібраційного мембранного фільтрування з підсиленням зсувом, демонструють підвищення продуктивності у 3-16 разів порівняно з традиційними тангенціальними системами [3]. Вібраційний принцип успішно реалізується також у віброситах, де моделювання методом дискретних елементів підтверджує ефективність розділення частинок за розміром у діапазон 81-91% при оптимальних параметрах [4], а



практичний досвід застосування вібраційного фільтрування для зневоднення біологічних суспензій свідчить про продуктивність у 1,5-5 разів вищу за традиційні системи [5].

Головним обмеженням класичних методів – вакуумного, напірного, фільтр-пресування – є формування малопроникного фільтрувального осаду. Для тонкодисперсних суспензій із частинками менше 10 мкм питомий опір осаду може перевищувати 10^{12} м/кг [6], а поверхневий заряд частинок додатково збільшує як опір, так і стисливість осаду, що робить традиційне фільтрування економічно не вигідним або технологічно неможливим. Комплексний аналіз одночасного впливу цих факторів залишається недостатньо вивченим, математичні моделі для різних типів обладнання не об'єднані в єдину теоретичну рамку, а систематизовані кількісні залежності між властивостями частинок і параметрами осаду в умовах вібраційного впливу у літературі відсутні. Усунення цієї прогалини є безпосередньою метою роботи і визначає її наукову новизну.

Аналіз останніх досліджень.

Дослідження впливу вібрації на процес фільтрування має тривалу наукову історію. Вейкмен та Ву [1] встановили існування критичного порогу прискорення вібрації, нижче якого вібраційний вплив парадоксально уповільнює фільтрування через ущільнення осаду без руйнування його структури, тоді як вище порогу структура осаду зазнає принципових змін. У подальшій роботі Вейкмен [2] систематизував кількісні дані щодо питомого опору осаду для частинок різної форми, показавши, що при однаковому розмірі 10 мкм опір лускоподібних частинок перевищує опір сферичних більш ніж у 300 разів, що свідчить про визначальну роль морфології. Джафрін [3] встановив універсальну степеневу кореляцію між потоком пермеату та швидкістю зсуву на поверхні мембрани та показав, що вібраційні мембранні системи генерують швидкості зсуву до $150\ 000\ \text{с}^{-1}$, що на порядок перевищує можливості класичного тангенціального фільтрування.

Дун та співавтори [4] запропонували двостадійну модель на основі методу дискретних елементів для опису процесу сепарації на віброуючому грохоті, що дозволяє прогнозувати ефективність грохочення в діапазоні 81-91% при оптимальних вібраційних параметрах. Нурра та співавтори [5] підтвердили ефективність вібраційного мембранного фільтрування для зневоднення мікрободоростей, отримавши проникність у 1,5-5 разів вищу за традиційне фільтрування при витраті енергії лише $1,6\ \text{кВт}\cdot\text{год}/\text{м}^3$. Бурсьє та співавтори [6] встановили, що пластинчасті частинки мають найвищий питомий опір осаду, а голкоподібні – найвищий індекс стисливості ($n = 0,93$). Чжао та співавтори [7]

показали, що аксіальна вібрація мембрани при частоті 10 Гц зменшує відкладення біомаси з 8,64 до $0,03\ \text{г}/\text{м}^2$ і подовжує період стабільної роботи з 2 до 24 годин. Іллїаз та співавтори [8, 9] досягли зниження залишкової вологості осаду на 10,5 відсоткових пунктів методом осциляторного зсуву з одночасним запобіганням утворенню тріщин. Лоренцен та співавтори [10] встановили, що збільшення дзета-потенціалу вище 40 мВ зменшує пористість осаду до $\approx 0,45$, одночасно збільшуючи питомий опір і стисливість. Цзян та співавтори [12] розробили гібридну динамічну модель забруднення мембрани та нейронну мережу для прогнозування критичної частоти вібрації, а Харамкар та співавтори [13] систематизували кількісні дані щодо впливу розміру, форми та розподілу частинок на механіку коржового фільтрування. Йилдиз та співавтори [14,15] встановили, що ефект вібраційного ущільнення зростає зі зменшенням середнього розміру частинок, а однорідні осади ущільнюються ефективніше за сегреговані. Серед українських дослідників слід відзначити роботи Шевченка та співавторів [16] з фільтрування тонкодисперсних суспензій при пульсуючому тиску, Серпокрилова та співавторів [17] з розробки технології очищення води вібрацією та Топільницького та співавторів [18] з математичного моделювання динаміки вібраційних сепараторів.

Попри значний обсяг досліджень, аналіз літератури дозволяє ідентифікувати ключові наукові прогалини. Більшість існуючих робіт розглядають вплив окремих властивостей частинок ізольовано, тоді як комплексний аналіз одночасного впливу кількох фізико-механічних характеристик відсутній. Вплив твердості та модуля пружності частинок на вібраційне фільтрування практично не досліджувався, математичні моделі для різних типів обладнання не об'єднані в єдину теоретичну рамку, а дані щодо масштабування від лабораторного до промислового рівня залишаються недостатніми. У вітчизняній науковій літературі бракує також систематичних досліджень вібраційного фільтрування промислових суспензій з урахуванням властивостей дисперсної фази.

Мета та завдання дослідження

Мета дослідження полягає у здійсненні комплексного аналізу впливу фізико-механічних властивостей твердих включень – зокрема їхнього розміру, форми, розподілу за розмірами, густини, поверхневого заряду та стисливості – на процес вібраційного фільтрування рідин, а також у встановленні та систематизації кількісних залежностей між характеристиками частинок і параметрами фільтрувального осаду під дією вібрації.

Досягнення поставленої мети передбачає вирішення комплексу взаємопов'язаних завдань. Дослідження охоплює критичний аналіз і узагальнення сучасних математичних моделей вібраційного фільтрування з подальшим їх



розширенням з урахуванням фізико-механічних характеристик частинок дисперсної фази. На цій основі вперше систематизуються кількісні залежності впливу розміру, форми, розподілу за розмірами, густини та поверхневого заряду частинок на питомий опір і стисливість фільтрувального осаду, що дозволяє сформувати цілісну картину механізмів формування осаду під вібраційним навантаженням.

Отримані результати зіставляються з даними щодо класичних методів розділення суспензій, що уможлиблює кількісне обґрунтування переваг вібраційного фільтрування для конкретних типів дисперсних систем.

Водночас на основі аналізу конструктивних рішень існуючого обладнання визначаються оптимальні діапазони вібраційних параметрів, придатні для практичного застосування. За результатами дослідження формулюються невирішені наукові проблеми та окреслюються перспективні напрямки подальших досліджень, зокрема щодо розроблення прогностичних моделей поведінки осаду з урахуванням багатофакторного впливу властивостей частинок.

Результати досліджень та їх обговорення.

Математичний опис процесу вібраційного фільтрування будується на основі ієрархії моделей – від класичних законів фільтрування до спеціалізованих рівнянь, що враховують вібраційний вплив. Базовою вихідною точкою слугує емпіричний закон Дарсі [2, 13], який встановлює лінійну залежність між витратою фільтрату та рушійною силою процесу – перепадом тиску, обернено пропорційно реагуючи на товщину шару осаду та динамічну в'язкість дисперсійного середовища:

$$Q = \frac{k \cdot A \cdot \Delta P}{\mu \cdot L} \quad (1)$$

де Q – об'ємна витрата фільтрату, м³/с; k – проникність пористого середовища, м²; A – площа фільтрування, м²; ΔP – перепад тиску, Па; μ – динамічна в'язкість рідини, Па·с; L – товщина шару осаду, м.

Закон Дарсі визначає загальну залежність витрати від тиску, однак не розкриває, яким чином проникність осаду k пов'язана з характеристиками частинок. Цю залежність встановлює рівняння Козені-Кармана [6,13], яке є ключовим для розуміння того, чому розмір, форма та пористість осаду визначають його гідравлічний опір:

$$k = \frac{\Phi_s^2 \cdot d_p^2 \cdot \varepsilon^3}{180 \cdot (1 - \varepsilon)^2} \quad (2)$$

де Φ_s – коефіцієнт сферичності частинок; d_p – середній діаметр частинок, м; ε – пористість осаду. В умовах вібраційного фільтрування пористість стає функцією часу $\varepsilon(t)$, що принципово змінює характер цієї залежності.

Рівняння Козені-Кармана описує миттєвий стан осаду, проте для інженерних

розрахунків необхідна інтегральна форма, яка пов'язує об'єм зібраного фільтрату з часом процесу. Таку форму дає рівняння Рута [13], що є стандартним інструментом аналізу даних фільтрування при постійному перепаді тиску:

$$\frac{t}{V} = \frac{\mu \cdot \alpha \cdot c}{2A^2 \cdot \Delta P} \cdot V + \frac{\mu \cdot R_m}{A \cdot \Delta P}, \quad (3)$$

де t – час, с; V – кумулятивний об'єм фільтрату, м³; α – середній питомий опір осаду, м/кг; c – масова концентрація твердої фази, кг/м³; R_m – опір фільтрувальної перегородки, м⁻¹. Лінійна залежність t/V від V у координатах рівняння Рута дозволяє графічно визначити питомий опір α як характеристику конкретного осаду. Однак реальні осади є стисливими – їх опір зростає зі збільшенням тиску. Цю поведінку описує степенева модель стисливості [6]:

$$\alpha_{av} = \alpha_0 \cdot (\Delta P_c)^n \quad (4)$$

де α_0 – питомий опір при одиничному тиску; n – індекс стисливості, що змінюється від 0 для абсолютно нестисливих осадів до значень, близьких до 1, для високостисливих матеріалів [6,13].

Описані вище моделі (1) - (4) розроблені для статичного фільтрування і не враховують ефектів вібраційного впливу. Для подолання цього обмеження Вейкмен та Ву [1] запропонували модель, що розділяє загальний опір осаду при вібраційному фільтруванні на три фізично незалежні складові – статичну та дві динамічні:

$$R_{cv} = R_c + R_{vf} + R_{vp} \quad (5)$$

де R_c – конвенційний (статичний) опір осаду; R_{vf} – додаткова складова опору, зумовлена зміною характеру потоку рідини крізь осад під дією вібрації; R_{vp} – складова, зумовлена зміною взаємного розташування та руху частинок в осаді під дією вібрації. Знак та величина складових R_{vf} і R_{vp} визначаються співвідношенням параметрів вібрації та властивостей частинок.

Модель Вейкмана-Ву описує вплив вібрації на опір вже сформованого осаду. Проте вібрація може також фізично ущільнювати осад, змінюючи його пористість у часі. Цей механізм найбільш ефективно реалізується методом осциляторного зсуву, для якого Ілліс та співавтори [8,9] розробили експоненціальну модель, що описує кінетику ущільнення осаду залежно від кількості циклів коливаний:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_\infty + B \cdot \exp(-\vartheta \cdot n) \quad (6)$$

де $\varepsilon(n)$ – пористість осаду після n циклів коливаний; ε_∞ – рівноважна мінімальна пористість; $B = \varepsilon_0 - \varepsilon_\infty$ – потенціал ущільнення; ϑ – параметр швидкості ущільнення, що залежить від амплітуди та частоти коливаний. Експерименти показали, що значне зневоднення досягається протягом 15 секунд вібраційної дії [9].

Якщо моделі (5) та (6) описують поведінку осаду у системах з механічним

контактом частинок та фільтрувальної перегородки, то для вібраційних мембранних систем ключовим механізмом є генерація інтенсивних зсувних напружень на поверхні мембрани, що перешкоджають утворенню осаду. Джафрін [3] встановив, що потік пермеату у таких системах корелює зі швидкістю зсуву за степеневим законом:

$$K_v J = a \cdot \gamma_{\max}^b \quad (7)$$

де J – потік пермеату, л/м²·год; a – емпіричний коефіцієнт; γ_{\max} – максимальна швидкість зсуву, с⁻¹; b – показник степеня, що знаходиться в діапазоні 0,43-0,59 залежно від конфігурації системи та властивостей суспензії [3].

Розглянуті моделі (5) - (7) описують фільтрування у системах, де рідина проходить крізь мембрану або осад. Принципово іншим є клас віброуючих грохотів, де тверді частинки розділяються за розміром на сітчастій поверхні. Тут ключовим параметром є індекс підкидання – безрозмірне число, що визначає режим руху частинок відносно поверхні сита та умови ефективного розділення [4]:

$$K_v = \frac{A\omega^2 \cdot \sin \beta}{g} \quad (8)$$

де A – амплітуда вібрації, м; ω – кутова частота, рад/с; β – кут нахилу вібрації до вертикалі; g – прискорення вільного падіння, м/с². При $K_v > 1$ частинки відриваються від поверхні сита, що є необхідною умовою ефективного грохочення; при $K_v < 1$ частинки ковзають по ситі без відриву, що суттєво знижує ефективність розділення. Оптимальні значення: $K_v \approx 2,7$, частота 13–20 Гц, амплітуда 2–3,5 мм [4]. Таким чином, розглянута ієрархія моделей – від закону Дарсі до спеціалізованих рівнянь для кожного класу обладнання – формує єдину теоретичну рамку для аналізу вібраційного фільтрування з урахуванням фізико-механічних властивостей частинок.

Розмір частинок є найбільш впливовим параметром, що визначає ефективність як класичного, так і вібраційного фільтрування. Згідно з рівнянням Козені-Кармана (2), питомий опір осаду обернено пропорційний квадрату середнього діаметра частинок: $\alpha \propto 1/D_{32}^2$. Кількісні дані, систематизовані Харамкар та співавторами [13], наочно демонструють масштаб цієї залежності: при зменшенні середнього діаметра D_{32} від 100 мкм до 1 мкм питомий опір осаду зростає приблизно у 10 000 разів – від $6,8 \times 10^7$ до $6,7 \times 10^{11}$ м/кг (рис. 1).

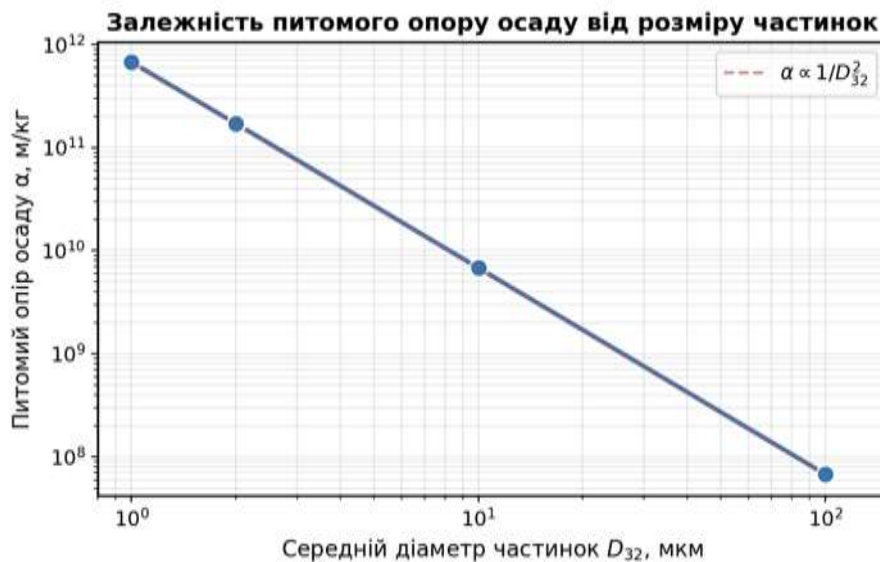


Рис. 1. Залежність питомого опору фільтрувального осаду α від середнього діаметра частинок D_{32} у подвійних логарифмічних координатах (побудовано за даними [13])

Ширина розподілу частинок за розмірами також чинить суттєвий вплив на параметри осаду. При широкому розподілі дрібні частинки заповнюють порожнини між великими, формуючи щільнішу структуру осаду з підвищеним гідравлічним опором [6, 13]. Кількісно цей ефект виражається у тому, що перехід від монодисперсного до полідисперсного розподілу з коефіцієнтом варіації $C_v > 0,5$ може збільшувати питомий опір осаду втричі навіть за незмінного середнього діаметра частинок [13].

В умовах вібраційного фільтрування вплив розподілу частинок за розмірами набуває додаткового виміру. Ефект ущільнення зростає зі зменшенням середнього розміру частинок [14], оскільки для дрібніших частинок міжчастинкові сили — ван-дер-Ваальсові та електростатичні — є відносно більшими порівняно з масовими силами, і вібраційний вплив ефективніше руйнує ці контакти. Водночас Ілздіз та співавтори [14, 15] встановили принципову відмінність між поведінкою однорідних і сегрегованих осадів:

однорідні за розміром частинки ущільнюються під дією вібрації значно ефективніше, ніж полідисперсні суміші, у яких великі частинки механічно обмежують переміщення дрібних.

Форма частинок чинить визначальний вплив на структуру фільтрувального осаду та його гідравлічний опір. Кількісні дані щодо впливу форми, отримані Бурсьє та співавторами [6] та Вейкмен [2], систематизовано у табл. 1.

Таблиця 1.

Вплив форми частинок на питомий опір осаду та індекс стисливості

Форма частинок	Розмір, мкм	α , $\times 10^9$ м/кг (при 1 бар)	Індекс стисливості n
Сфери	7–10	3,6–11,5	0,40
Куби	10	2,7	0,47
Голки	17	1,4	0,93
Пластинки	14	19,1	0,70
Луски	10	1 100	–

Як видно з табл. 1, опір осаду лускоподібних частинок ($1\ 100 \times 10^9$ м/кг) перевищує опір сферичних ($3,6 \times 10^9$ м/кг) у 305 разів при однаковому розмірі 10 мкм. Пластинчасті частинки орієнтуються горизонтально при осадженні, перекриваючи канали для потоку рідини. Голкоподібні частинки формують початково відкриту структуру осаду (низький α), але мають максимальну стисливість ($n = 0,93$), тобто їх опір різко зростає при підвищенні тиску [6].

Харамкар та співавтори [13] додатково підтвердили домінування форми над густиною: тальк ($\rho_s \approx 2750$ кг/м³, пластинчаста морфологія) має питомий опір $7,4 \times 10^{11}$ м/кг, тоді як CaCO₃ ($\rho_s \approx 2700$ кг/м³, ізометрична морфологія) – лише $5,9 \times 10^{10}$ м/кг. Різниця у 12,5 рази при практично ідентичній густині матеріалу повністю пояснюється відмінностями у формі частинок (рис. 2).

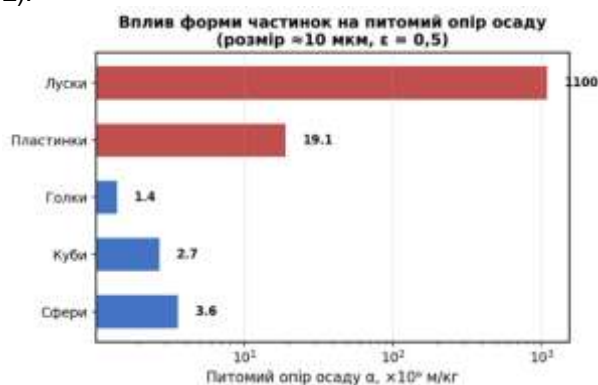


Рис. 2. Порівняння питомого опору фільтрувального осаду для частинок різної форми при розмірі ≈ 10 мкм та пористості 0,5 (побудовано за даними [2, 6])

Густина частинок безпосередньо входить до рівняння балансу сил через член плавучості ($\rho_p - \rho_f$), визначаючи швидкість осідання частинок та їх відгук на вібраційний вплив. Через рівняння Козені–Кармана густина також впливає на питомий опір осаду. Однак, як показано вище, вплив форми може суттєво домінувати над впливом густини: різниця в опорі осаду тальку та CaCO₃ становить 12,5 рази при $\rho_s \approx 2700\text{--}2750$ кг/м³ [13].

На основі розглянутих вище математичних моделей (1)–(7) було проведено чисельне параметричне дослідження, метою якого є кількісна оцінка впливу фізико-механічних властивостей твердих включень на ефективність вібраційного фільтрування. Дослідження виконано шляхом систематичного варіювання параметрів дисперсної фази (розмір, форма, пористість) та параметрів вібрації (частота, амплітуда) із розрахунком відповідних характеристик фільтрувального осаду за рівняннями Козені–Кармана (2), ступеневою моделлю стисливості (4) та експоненціальною моделлю ущільнення Ілліса (6). Розрахунки проводились для модельних суспензій з фіксованою в'язкістю дисперсійного середовища $\mu = 0,001$ Па·с (вода, 20 °С) та густиною частинок $\rho_s = 2500$ кг/м³, що відповідає типовим мінеральним суспензіям.

Для кількісної оцінки ефективності вібраційного впливу введено коефіцієнт зниження опору $K_{\text{зн}} = \alpha_{\text{ст}} / \alpha_{\text{віб}}$, де $\alpha_{\text{ст}}$ – питомий опір осаду без вібрації (при початковій пористості $\epsilon_0 = 0,40$), а $\alpha_{\text{віб}}$ – питомий опір осаду під дією вібрації, розрахований за рівнянням Козені–Кармана (2) із підвищеною пористістю $\epsilon_{\text{віб}}$, значення якої визначалось за моделлю Ілліса (6) з параметрами ϵ_{∞} та ϑ , встановленими для кожного режиму вібрації. Амплітуда вібрації $A = 2$ мм, діапазон частот $f = 15\text{--}25$ Гц, що відповідає оптимальним параметрам для механічних вібраційних систем [1, 4].

Таблиця 2.

Вплив параметрів вібрації на питомий опір осаду для сферичних частинок різного розміру ($\Phi_s = 1,0$; $A = 2$ мм)

$D_{\text{з2}}$, мкм	$\alpha_{\text{ст}}$, м/кг	$\alpha_{\text{віб}}$ (15 Гц)	$\alpha_{\text{віб}}$ (20 Гц)	$\alpha_{\text{віб}}$ (25 Гц)	$K_{\text{зн}}$ (20 Гц)
1	$6,70 \times 10^{11}$	$5,86 \times 10^{11}$	$5,36 \times 10^{11}$	$4,96 \times 10^{11}$	1,25
5	$2,68 \times 10^{10}$	$1,97 \times 10^{10}$	$1,59 \times 10^{10}$	$1,34 \times 10^{10}$	1,69
10	$6,70 \times 10^9$	$4,19 \times 10^9$	$3,10 \times 10^9$	$2,53 \times 10^9$	2,16
25	$1,07 \times 10^9$	$5,50 \times 10^8$	$3,61 \times 10^8$	$2,76 \times 10^8$	2,96
50	$2,68 \times 10^8$	$1,07 \times 10^8$	$6,75 \times 10^7$	$4,88 \times 10^7$	3,97
100	$6,70 \times 10^7$	$2,26 \times 10^7$	$1,28 \times 10^7$	$8,78 \times 10^6$	5,24



Результати розрахунків (табл. 2) дозволяють встановити важливу закономірність: ефективність вібраційного впливу суттєво залежить від розміру частинок. Коефіцієнт зниження опору $K_{зп}$ зростає від 1,25 для ультрадисперсних частинок ($D_{32} = 1$ мкм) до 5,24 для крупнодисперсних ($D_{32} = 100$ мкм) при частоті вібрації 20 Гц. Це пояснюється тим, що для великих частинок інерційні сили, зумовлені вібрацією, значно перевищують міжчастинкові когезійні сили (ван-дер-Ваальсові, електростатичні), що забезпечує ефективне руйнування структури осаду та збільшення його пористості. Для частинок менше 5 мкм когезійні сили домінують, і вібрація лише незначно розпушує осад.

Підвищення частоти вібрації від 15 до 25 Гц при фіксованій амплітуді $A = 2$ мм посилює ефект зниження опору для всіх розмірних фракцій. Для частинок $D_{32} = 50$ мкм питомий опір знижується від $1,07 \times 10^8$ м/кг (при 15 Гц) до $4,88 \times 10^7$ м/кг (при 25 Гц), тобто у 2,19 рази. Ця нелінійна залежність узгоджується з моделлю Вейкмана–Ву (5), згідно з якою вібраційна складова опору $R_{вч}$ стає від'ємною (тобто зменшує загальний опір) лише при перевищенні критичного прискорення, пропорційного $\omega^2 A$.

Таблиця 3.

Кінетика зміни пористості осаду під дією вібрації різної амплітуди (сферичні частинки, $D_{32} = 10$ мкм, $f = 20$ Гц)

п, цикли	ϵ (A=0,5 мм)	ϵ (A=1,0 мм)	ϵ (A=2,0 мм)	ϵ (A=3,0 мм)
0	0,420	0,420	0,420	0,420
5	0,407	0,394	0,372	0,356
10	0,395	0,373	0,340	0,321
20	0,377	0,344	0,315	0,310
50	0,347	0,316	0,310	0,310
100	0,323	0,310	0,310	0,310
200	0,312	0,310	0,310	0,310

Результати моделювання кінетики ущільнення (табл. 3) підтверджують справедливість експоненціальної моделі Ілліса (6) та дозволяють кількісно оцінити вплив амплітуди вібрації на швидкість досягнення рівноважної пористості. При амплітуді $A = 3,0$ мм рівноважна пористість $\epsilon_{\infty} = 0,310$ досягається вже після 20 циклів коливань (1 с при $f = 20$ Гц), тоді як при $A = 0,5$ мм для досягнення $\epsilon = 0,312$ необхідно 200 циклів (10 с). Параметр швидкості ущільнення ϑ зростає від 0,014 ($A = 0,5$ мм) до 0,22 ($A = 3,0$ мм), тобто у 15,7 рази, що свідчить про сильну нелінійну залежність інтенсивності ущільнення від амплітуди.

Практично важливим є факт, що збільшення амплітуди понад 2,0 мм дає лише

незначне прискорення процесу (рівноважний стан досягається за 20 циклів при $A = 2,0$ мм проти 20 циклів при $A = 3,0$ мм), тоді як енергетичні витрати на генерацію коливань зростають пропорційно A^2 . Це дозволяє обґрунтувати оптимальний діапазон амплітуди $A = 1,5$ – $2,5$ мм як компроміс між швидкістю ущільнення та енерговитратами, що узгоджується з експериментальними даними Ілліса та співавторів [8, 9].

Таблиця 4.

Комплексний вплив форми частинок на параметри осаду при статичному та вібраційному фільтруванні ($D_{32} \approx 10$ мкм, $f = 20$ Гц, $A = 2$ мм)

Форма	Φ_s	$\alpha_{ст}, \times 10^9$ м/кг	$\alpha_{віб}, \times 10^9$ м/кг	$K_{зп}$	$n_{ст}$	$n_{віб}$
Сфери	1,00	6,70	3,10	2,16	0,40	0,33
Куби	0,81	10,2	5,31	1,92	0,47	0,41
Голки	0,39	44,1	27,6	1,60	0,93	0,85
Пластинки	0,54	22,9	17,6	1,30	0,70	0,65
Луски	0,22	138,4	118,7	1,17	0,82	0,79

Таблиця 5.

Розрахункова ефективність вібраційного фільтрування для типових промислових суспензій

Суспензія	$D_{32},$ мкм	Φ_s	$\alpha_{ст},$ м/кг	$\alpha_{віб},$ м/кг	$K_{зп}$	$Q_{віб}/Q_{ст}$
Кварцовий пісок	75	0,8 5	$1,12 \times 10^8$	$2,54 \times 10^7$	4,4 1	4,41
Каолін	8	0,5 4	$1,83 \times 10^{10}$	$1,24 \times 10^{10}$	1,4 8	1,48
CaCO ₃ (крейда)	12	0,8 2	$4,67 \times 10^9$	$2,59 \times 10^9$	1,8 0	1,80
TiO ₂	3	0,9 5	$7,44 \times 10^{10}$	$5,83 \times 10^{10}$	1,2 8	1,28
Тальк	10	0,2 2	$7,40 \times 10^{11}$	$6,33 \times 10^{11}$	1,1 7	1,17
Вугільний шлам	45	0,7 0	$5,93 \times 10^8$	$1,78 \times 10^8$	3,3 3	3,33
Мікроводорості	5	0,9 0	$3,58 \times 10^{10}$	$2,38 \times 10^{10}$	1,5 0	1,50

Результати розрахунків для промислових суспензій (табл. 5) демонструють широкий діапазон ефективності вібраційного фільтрування: від $K_{зп} = 1,17$ для тальку (пластинчасті частинки з низькою сферичністю) до $K_{зп} = 4,41$ для кварцового піску (великі ізометричні частинки). Прогнозоване підвищення продуктивності $Q_{віб}/Q_{ст}$, яке за рівнянням Дарсі (1) прямо пропорційне $K_{зп}$, узгоджується з експериментальними даними: Нурра та співавторів [5] отримали підвищення проникності у 1,5–5 разів для мікроводоростей,



що відповідає нашому розрахунковому значенню $K_{\text{зн}} = 1,50$.

Аналіз табл. 5 дозволяє сформулювати практичні рекомендації щодо доцільності застосування вібраційного фільтрування: найбільший ефект ($K_{\text{зн}} > 3$) досягається для суспензій з ізометричними частинками розміром $D_{32} > 40$ мкм (кварцовий пісок, вугільний шлам), помірний ефект ($K_{\text{зн}} = 1,5-2,0$) – для середньодисперсних суспензій з помірно анізометричністю (крейда, каолін, мікрководорості), а мінімальний ефект ($K_{\text{зн}} < 1,3$) – для тонкодисперсних суспензій з пластинчастою морфологією (тальк, TiO_2). Для останньої категорії більш доцільним є застосування вібраційних мембранних систем з підсиленням зсувом [3], де механізм інтенсифікації принципово інший – запобігання утворенню осаду замість його руйнування.

Таким чином, проведене чисельне параметричне дослідження дозволило вперше отримати кількісні оцінки комплексного впливу розміру, форми та вібраційних параметрів на ефективність фільтрування для широкого спектру промислових суспензій. Встановлено, що ефективність вібраційного впливу визначається не окремими властивостями частинок, а їх комбінацією: вирішальним є співвідношення між інерційними силами (пропорційними $\rho_s \cdot d^3 \cdot \omega^2 A$) та когезійними силами (пропорційними d для ван-дер-Ваальсових та d^2 для електростатичних взаємодій). Введений коефіцієнт $K_{\text{зн}}$ може слугувати інженерним критерієм для попередньої оцінки доцільності застосування вібраційного фільтрування для конкретної суспензії без проведення повномасштабних експериментів.

Висновки: Проведений комплексний аналіз дозволив систематизувати основні математичні моделі вібраційного фільтрування – модифіковане рівняння Дарсі, рівняння Козені-Кармана зі змінною пористістю, модель Вейкмана-Ву, експоненціальну модель Ілліса та інші – і показати, що ключовим механізмом впливу вібрації є динамічна зміна пористості осаду $\varepsilon(t)$, яка безпосередньо визначається фізико-механічними властивостями частинок. На основі цих моделей проведено чисельне параметричне дослідження, що дозволило вперше отримати кількісні оцінки комплексного впливу розміру, форми частинок та параметрів вібрації на ефективність фільтрування для широкого спектру промислових суспензій.

Встановлені кількісні залежності свідчать про суттєву роль кожної з досліджуваних характеристик. Питомий опір осаду зростає у 10 000 разів при зменшенні D_{32} від 100 до 1 мкм, а розширення розподілу за розмірами збільшує його утричі. Особливо

значущим є вплив форми: пластинчасті частинки створюють у 12,5 рази більший опір порівняно з ізометричними при практично однаковій густині, що підтверджує домінування морфології над густиною як визначального чинника опору осаду. Підвищення поверхневого заряду ($\zeta > 40$ мВ) додатково збільшує як питомий опір, так і стисливість осаду. Чисельне параметричне дослідження встановило, що ефективність вібраційного впливу суттєво залежить від розміру та форми частинок: коефіцієнт зниження опору $K_{\text{зн}}$ зростає від 1,25 для ультрадисперсних ($D_{32} = 1$ мкм) до 5,24 для крупнодисперсних частинок ($D_{32} = 100$ мкм), а для анізометричних частинок (луски, пластинки) ефективність вібрації знижується до $K_{\text{зн}} = 1,17-1,30$ внаслідок стійкості їх орієнтованої структури.

Порівняння з класичними методами підтверджує технологічні переваги вібраційного фільтрування: продуктивність зростає у 3-16 разів, швидкість забруднення мембран знижується більш ніж на 90%, а залишкова вологість осаду зменшується на 10,5 відсоткових пунктів. Оптимальні параметри становлять 15-25 Гц при амплітуді 0,8-3,5 мм для механічних систем та 53-60,75 Гц для вібраційних мембранних систем. Моделювання кінетики ущільнення за моделлю Ілліса дозволило обґрунтувати оптимальний діапазон амплітуди $A = 1,5-2,5$ мм як компроміс між швидкістю досягнення рівноважної пористості та енерговитратами. Розрахунки для семи типових промислових суспензій показали, що найбільший ефект ($K_{\text{зн}} > 3$) досягається для суспензій з ізометричними частинками розміром $D_{32} > 40$ мкм, а запропонований коефіцієнт $K_{\text{зн}}$ може слугувати інженерним критерієм для попередньої оцінки доцільності застосування вібраційного фільтрування.

Список використаних джерел

1. Wakeman R.J., Wu P. Low-frequency vibration effects on coarse particle filtration. *KONA Powder and Particle Journal*. 2002. Vol. 20. P. 38–50. DOI: <https://doi.org/10.14356/kona.2002014>
2. Wakeman R.J. The influence of particle properties on filtration. *Separation and Purification Technology*. 2007. Vol. 58, No. 2. P. 234–241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2007.03.018>
3. Jaffrin M.Y. Dynamic shear-enhanced membrane filtration: A review of rotating disks, rotating membranes and vibrating systems. *Journal of Membrane Science*. 2008. Vol. 324. P. 7–25. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2008.06.050>
4. Dong K.J., Wang B., Yu A.B. Modeling of particle flow and sieving behavior on a vibrating screen: From discrete particle simulation to process performance prediction. *Industrial & Engineering*



Chemistry Research. 2013. Vol. 52, No. 33. P. 11333–11343. DOI:

<https://doi.org/10.1021/ie3034637>

5. Nurra C., Clavero E., Salvadó J., Torras C. Vibrating membrane filtration as improved technology for microalgae dewatering. *Bioresource Technology*. 2014. Vol. 157. P. 247–253. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.biortech.2014.01.115>

6. Bourcier D., Féraud J.P., Colson D., Mandrick K., Ode D., Brackx E., Puel F. Influence of particle size and shape properties on cake resistance and compressibility during pressure filtration. *Chemical Engineering Science*. 2016. Vol. 144. P. 176–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.01.023>

7. Zhao F., Chu H., Su Y., Tan X., Zhang Y., Yang L., Zhou X. Microalgae harvesting by an axial vibration membrane: The mechanism of mitigating membrane fouling. *Journal of Membrane Science*. 2016. Vol. 508. P. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2016.02.007>

8. Illies S., Pfänder J., Anlauf H., Nirschl H. Filter cake compaction by oscillatory shear. *Drying Technology*. 2017. Vol. 35, No. 1. P. 66–75. DOI: <https://doi.org/10.1080/07373937.2016.1159576>

9. Illies S., Anlauf H., Nirschl H. Vibration-enhanced compaction of filter cakes and its influence on filter cake cracking. *Separation Science and Technology*. 2017. Vol. 52, No. 18. P. 2795–2803. DOI: <https://doi.org/10.1080/01496395.2017.1304416>

10. Lorenzen S., Keiding K., Christensen M.L. The effect of particle surface charge density on filter cake properties during dead-end filtration. *Chemical Engineering Science*. 2017. Vol. 163. P. 155–166. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.01.044>

11. Zhao F., Zhang Y., Chu H., Jiang S., Yu Z., Wang M., Zhou X., Zhao J. A uniform shearing vibration membrane system reducing membrane fouling in algae harvesting. *Journal of Cleaner Production*. 2018. Vol. 196. P. 1026–1033. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.06.089>

12. Jiang S., Xiao S., Chu H., Zhao F., Yu Z., Zhou X., Zhang Y. Intelligent mitigation of fouling by means of membrane vibration for algae separation: Dynamics model, comprehensive evaluation, and critical vibration frequency. *Water Research*. 2020. Vol. 189, article 116527. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.watres.2020.116527>

13. Haramkar S.S., Thombre G.N., Jadhav S.V., Thorat B.N. The influence of particle(s) size, shape and distribution on cake filtration mechanics – a short review. *Comptes Rendus Chimie*. 2021. Vol. 24, No. 2. P. 255–265. DOI: <https://doi.org/10.5802/crchim.84>

14. Yildiz T., Gegenheimer J., Gleiß M., Nirschl H. Influence of particle properties on filter cake compaction behavior under oscillatory shear. *Processes*. 2023. Vol. 11, No. 7, article 2076. DOI:

<https://doi.org/10.3390/pr11072076>

15. Yildiz T., Gleiß M., Nirschl H. Mechanical dewatering of homogeneous and segregated filter cakes by vibration compaction. *ChemEngineering*. 2024. Vol. 8, No. 3, article 49. DOI:

<https://doi.org/10.3390/chemengineering8030049>

16. Shevchenko A.E., Tynyna S.V., Chobot'ko I.I. Solid–liquid separation of finely dispersed suspensions by press filtration under pulsating overpressure. *Chemie Ingenieur Technik*. 2017. Vol. 89. DOI:

<https://doi.org/10.1002/cite.201600019>

17. Serpokrylov N., Smolyanichenko A., Nelidin V. Development of technology for water purification by filtration using vibration. *E3S Web of Conferences*. 2020. Vol. 175, article 12009. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202017512009>

18. Topilnytsky V., Rebot D., Sokil M., Velyka O., Liaskovska S., Verkhola I., Kovalchuk R., Dzyubyk L. Modeling the dynamics of vibratory separator of the drum type with concentric arrangement of sieves. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 2, No. 7(86). P. 26–35. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95615>

References

1. Wakeman, R.J., & Wu, P. (2002). Low-frequency vibration effects on coarse particle filtration. *KONA Powder and Particle Journal*, 20, 38–50. DOI:

<https://doi.org/10.14356/kona.2002014>

2. Wakeman, R.J. (2007). The influence of particle properties on filtration. *Separation and Purification Technology*, 58(2), 234–241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2007.03.018>

3. Jaffrin, M.Y. (2008). Dynamic shear-enhanced membrane filtration: A review of rotating disks, rotating membranes and vibrating systems. *Journal of Membrane Science*, 324, 7–25. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2008.06.050>

4. Dong, K.J., Wang, B., & Yu, A.B. (2013). Modeling of particle flow and sieving behavior on a vibrating screen: From discrete particle simulation to process performance prediction. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 52(33), 11333–11343. DOI: <https://doi.org/10.1021/ie3034637>

5. Nurra, C., Clavero, E., Salvadó, J., & Torras, C. (2014). Vibrating membrane filtration as improved technology for microalgae dewatering. *Bioresource Technology*, 157, 247–253. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.biortech.2014.01.115>

6. Bourcier, D., Féraud, J.P., Colson, D., Mandrick, K., Ode, D., Brackx, E., & Puel, F. (2016). Influence of particle size and shape properties on cake resistance and compressibility during pressure filtration. *Chemical Engineering Science*, 144, 176–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.01.023>



7. Zhao, F., Chu, H., Su, Y., Tan, X., Zhang, Y., Yang, L., & Zhou, X. (2016). Microalgae harvesting by an axial vibration membrane: The mechanism of mitigating membrane fouling. *Journal of Membrane Science*, 508, 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2016.02.007>

8. Illies, S., Pfänder, J., Anlauf, H., & Nirschl, H. (2017). Filter cake compaction by oscillatory shear. *Drying Technology*, 35(1), 66–75. DOI: <https://doi.org/10.1080/07373937.2016.1159576>

9. Illies, S., Anlauf, H., & Nirschl, H. (2017). Vibration-enhanced compaction of filter cakes and its influence on filter cake cracking. *Separation Science and Technology*, 52(18), 2795–2803. DOI: <https://doi.org/10.1080/01496395.2017.1304416>

10. Lorenzen, S., Keiding, K., & Christensen, M.L. (2017). The effect of particle surface charge density on filter cake properties during dead-end filtration. *Chemical Engineering Science*, 163, 155–166. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.01.044>

11. Zhao, F., Zhang, Y., Chu, H., Jiang, S., Yu, Z., Wang, M., Zhou, X., & Zhao, J. (2018). A uniform shearing vibration membrane system reducing membrane fouling in algae harvesting. *Journal of Cleaner Production*, 196, 1026–1033. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.06.089>

12. Jiang, S., Xiao, S., Chu, H., Zhao, F., Yu, Z., Zhou, X., & Zhang, Y. (2020). Intelligent mitigation of fouling by means of membrane vibration for algae separation: Dynamics model, comprehensive evaluation, and critical vibration frequency. *Water Research*, 189, 116527. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.watres.2020.116527>

13. Haramkar, S.S., Thombre, G.N., Jadhav, S.V., & Thorat, B.N. (2021). The influence of particle(s) size, shape and distribution on cake filtration mechanics – a short review. *Comptes Rendus Chimie*, 24(2), 255–265. DOI: <https://doi.org/10.5802/crchim.84>

14. Yildiz, T., Gegenheimer, J., Gleiß, M., & Nirschl, H. (2023). Influence of particle properties on filter cake compaction behavior under oscillatory shear. *Processes*, 11(7), 2076. DOI: <https://doi.org/10.3390/pr11072076>

15. Yildiz, T., Gleiß, M., & Nirschl, H. (2024). Mechanical dewatering of homogeneous and segregated filter cakes by vibration compaction. *ChemEngineering*, 8(3), 49. DOI: <https://doi.org/10.3390/chemengineering8030049>

16. Shevchenko, A.E., Tynyna, S.V., & Chobot'ko, I.I. (2017). Solid–liquid separation of finely dispersed suspensions by press filtration under pulsating overpressure. *Chemie Ingenieur Technik*, 89. DOI: <https://doi.org/10.1002/cite.201600019>

17. Serpokyrov, N., Smolyanichenko, A., & Nelidin, V. (2020). Development of technology for water purification by filtration using vibration. *E3S Web of Conferences*, 175, 12009. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202017512009>

18. Topilnytsky, V., Rebot, D., Sokil, M., Velyka, O., Liaskovska, S., Verkhola, I., Kovalchuk, R., & Dzyubyk, L. (2017). Modeling the dynamics of vibratory separator of the drum type with concentric arrangement of sieves. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7(86)), 26–35. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729–4061.2017.95615>

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF SOLID INCLUSIONS ON THE PROCESS OF VIBRATIONAL FILTRATION OF LIQUIDS

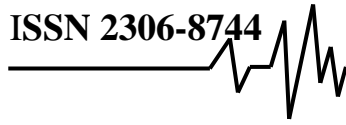
The article presents a comprehensive study of the influence of physico-mechanical properties of solid inclusions on the efficiency of vibrational filtration of liquids in the mining, chemical, food industries and environmental engineering.

Classical filtration methods are significantly limited by the formation of low-permeability filter cake, whose resistance reaches critical values for fine-dispersed suspensions. Vibrational filtration is a promising alternative providing dynamic disruption of the cake structure and substantial productivity gains.

The scientific novelty lies in the first systematization of quantitative relationships between particle properties and filter cake parameters under vibrational loading, alongside a unified theoretical framework encompassing the Darcy, Kozeny-Carman, Wakeman-Wu and Illies models. A numerical parametric study was conducted for seven typical industrial suspensions, and the resistance reduction coefficient Kred was introduced as an engineering criterion for assessing the applicability of vibrational filtration.

It is shown that specific cake resistance is inversely proportional to the square of particle diameter, particle shape dominates over density as the governing factor of cake resistance, and Kred ranges from 1.17 for platelet particles to 5.24 for coarse isometric ones. The results provide a scientifically grounded basis for the design and optimization of vibrational filtration equipment.

Keywords: *vibrational filtration, solid inclusions, physical-mechanical particle properties, specific cake resistance, cake compressibility, particle shape, particle size distribution, vibrating membrane systems, discrete element method, filtration intensification, numerical parametric study, resistance reduction coefficient.*

**Відомості про авторів**

Свящук Юрій Анатолійович - здобувач ступеня доктора філософії кафедри галузевого машинобудування Вінницький національний технічний університет (Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, Україна, 21000, e-mail: y.sviashchuk@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0007-5398-8824>

Загнітко Ярослав Віталійович - здобувач ступеня доктора філософії кафедри галузевого машинобудування Вінницький національний технічний університет (Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, Україна, 21000, e-mail: yaroslavzagnitko94@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0002-6870-7347>

Svyaschuk Yuriy - candidate for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Industrial Mechanical Engineering, Vinnytsia National Technical University (Khmelnyske Shosse, 95, Vinnytsia, Ukraine, 21000, e-mail: y.sviashchuk@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0007-5398-8824>

Zagnitko Yaroslav - candidate for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Industrial Mechanical Engineering, Vinnytsia National Technical University (Khmelnyske Shosse, 95, Vinnytsia, Ukraine, 21000, e-mail: yaroslavzagnitko94@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0002-6870-7347>

Стаття надійшла 24.04.2026

Стаття прийнята 07.05.2026

Опубліковано 28.05.2026