



Ольшанський В. П.
д.ф.-м.н., проф.

Сліпченко М. В.
к.т.н., доцент

Спольнік О. І.
д.ф.-м.н., проф.

*Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені Петра Василенка*

Замрій М. А.
студент

*Вінницький національний
аграрний університет*

Olshanskiy V.
Slipchenko M.
Spolnik O.

*Petro Vasilenko Kharkiv
National Technical
University of Agriculture*

Zamrii M.

*Vinnitsia National Agrarian
University*

УДК 534.1:539.3

DOI: 10.37128/2306-8744-2020-2-4

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ЗА НАЯВНОСТІ КВАДРАТИЧНОГО В'ЯЗКОГО ОПОРУ ТА СУХОГО ТЕРТЯ

Стаття присвячена виведенню точних та наближених формул для розрахунку розмахів вільних затухаючих коливань подвійно нелінійного осцилятора. З використанням функції Ламберта та першого інтегралу нелінійного диференціального рівняння руху побудовано формули для обчислення розмахів вільних затухаючих коливань лінійно пружного осцилятора в умовах спільної дії сил квадратичного в'язкого опору та сухого тертя Кулона. У розрахунках задіяна таблиця вказаної спеціальної функції від'ємного аргументу. Показано, що наявність в'язкого опору скорочує тривалість вільних коливань. Його наявність принципово змінює процес вільних коливань, рух осцилятора стає обмеженим у часі, бо складаються з обмеженої кількості циклів. Для побудови точного аналітичного розв'язку цієї узагальненої задачі використовуємо функцію Ламберта. Поставлена задача динаміки наближено розв'язана також методом енергетичного балансу, та проведено чисельне інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху на комп'ютері. Задовільна збіжність числових результатів, одержаних різними способами, підтвердила придатність виведених замкнених формул для проведення інженерних розрахунків. Крім розрахунку розмахів коливань, метод енергетичного балансу задіяно також для наближеного розв'язання оберненої задачі динаміки, стосовно ідентифікації значень коефіцієнта квадратичного опору та сили сухого тертя при наявності експериментальної віброграми вільних затухаючих коливань. Розглянуто застосування методу енергетичного балансу як за наявності рівняння обвідної, так і зі застосуванням рекурентного співвідношення розмахів. Наведено приклад ідентифікації. Ця інформація про тертя потрібна для розрахунку вимушених коливань, особливо в умовах резонансу. Відзначено, що із одержаних результатів, в окремих випадках, впливають відомі формули, де квадратичний в'язкий опір не пов'язаний з сухим тертям.

Ключові слова: вільні коливання, дисипативний осцилятор, квадратичний в'язкий опір, сухе тертя, функція Ламберта, ідентифікація характеристик опору, метод енергетичного балансу.

Вступ. В теорії коливань найбільш вивчено рух дисипативних систем при дії окремих сил опору. Значно менше публікацій стосується коливань механічних систем при спільній дії сил опору різної природи. Виходячи з цього, тут розглядаємо вільні коливання лінійно пружного осцилятора при наявності

двох дисипативних сил, а саме: сили квадратичного в'язкого опору та сили сухого тертя Кулона. Така коливальна система відноситься до подвійно нелінійних.

Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження. Одною з перших робіт, де розглянуто спільну дію сил



лінійного в'язкого опору та сили сухого тертя є [1]. В ній, крім аналітичного розв'язку задачі подано його портрет на фазовій площині. В статті [2] методом припасовування одержано точний аналітичний розв'язок аналогічної задачі, а також побудовано й наближений розв'язок методом енергетичного балансу. Розрахунками підтверджено, що вказаний наближений метод не дає суттєвих похибок. Результати цих досліджень потім було включено в монографію [3], де основний акцент зроблено на використанні методу енергетичного балансу при розв'язанні й інших задач. Цей метод уже давно використовують у розрахунках коливань дисипативних осциляторів з нелінійним в'язким опором [4, 5]. На його ефективність також звернуто увагу в роботі [6]. Останнім часом для розрахунку амплітуд вільних коливань лінійно пружного осцилятора в умовах квадратичного в'язкого опору була задіяна функція Ламберта [7], що

доповнило відомі наближені розв'язки [8-10] цієї класичної задачі. Тут йдеться про її узагальнення, коли крім сили в'язкого опору спільно з ним діє сила сухого тертя. Це принципово змінює процес вільних коливань, де він стає обмеженим у часі, бо складаються з обмеженої кількості циклів. Для побудови точного аналітичного розв'язку цієї узагальненої задачі теж використовуємо функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [11].

Метою статті є виведення формул для розрахунку розмахів вільних затухаючих коливань подвійно нелінійного осцилятора, що мають місце в умовах спільної дії сил квадратичного в'язкого опору та сухого тертя Кулона.

Викладення основного матеріалу.

Переміщення осцилятора $x = x(t)$ у часі t , описуємо диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} \dot{x}^2 + \frac{F_T}{m} \right) \text{sign}(\dot{x}) + \frac{c}{m} x = 0, \quad (1)$$

Тут: m – маса осцилятора; c – коефіцієнт жорсткості його пружини; k – коефіцієнт квадратичного опору; F_T – сила сухого тертя; крапка над x означає похідну по t .

Розглянемо i -й напівцикл коливань, який починається з амплітудного переміщення $x = -a_{i-1}$ та закінчується амплітудним переміщенням $x = a_i$, тобто початковими умовами до (1) є:

$$x(0) = -a_{i-1}; \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Увівши позначення: $\dot{x}^2 = y$,
 $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dy}{dx}$, рівнянню (1), при $\dot{x} > 0$, надаємо вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2k}{m} y + \frac{2F_T}{m} + \frac{2c}{m} x = 0. \quad (3)$$

Це лінійне рівняння розв'язуємо методом Бернуллі, подавши його розв'язок добутком двох невідомих функцій:

$$y = \xi(x)\eta(x); \frac{dy}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\eta + \xi \frac{d\eta}{dx}. \quad (4)$$

Після підстановки (4) в (3), одержуємо два рівняння:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{2k}{m} \xi = 0;$$

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{2}{m\xi(x)}(cx + F_T),$$

що мають розв'язки:

$$\xi(x) = \exp\left(-\frac{2k}{m}x\right);$$

$$\eta(x) = -\frac{2}{m} \int (cx + F_T) \exp\left(\frac{2k}{m}x\right) dx.$$

Провівши інтегрування, знаходимо з точністю до сталої A :

$$y = -\left(x - \frac{m}{2k}\right) \frac{c}{2k} - \frac{F_T}{k} + A \exp\left(-\frac{2k}{m}x\right)$$

Враховуючи умови (2), визначаємо довільну сталу:

$$A = \left[\frac{F_T}{k} - \left(a_{i-1} + \frac{m}{2k} \right) \frac{c}{k} \right] \exp\left(-\frac{2k}{m}a_{i-1}\right)$$



У підсумку маємо:

$$y = \dot{x}^2 = \left[\frac{F_T}{k} - \left(a_{i-1} + \frac{m}{2k} \right) \frac{c}{k} \right] \exp \left[-\frac{2k}{m} (x + a_{i-1}) \right] - \frac{F_T}{k} - \left(x - \frac{m}{2k} \right) \frac{c}{k}. \quad (5)$$

Цей перший інтеграл рівняння (1) дає значення швидкості на проміжку $t \in [0; t_i]$, де проходить i -й напівцикл коливань. Оскільки $\dot{x} = 0$ при $x = a_i$, то із (5) випливає, що:

$$f_i \exp(-f_i) = z_i^* \exp(-z_i^*). \quad (6)$$

$$\text{Де } f_i = 1 - \frac{2k}{m} a_i - \frac{2kF_T}{mc};$$

$$z_i^* = 1 + \frac{2k}{m} a_{i-1} - \frac{2kF_T}{mc}.$$

Після логарифмування (6) отримуємо:

$$\ln f_i - f_i = -z_i. \quad (7)$$

Тут

$$z_i = z_i^* - \ln z_i^*. \quad (8)$$

Рівняння (7) має розв'язок [11]:

$$f_i = -W_1 \left[-\exp(-z_i) \right],$$

в якому $W_1(-\zeta)$ – перша гілка двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу. Тому:

$$a_i = \frac{m}{2k} \left[1 - \frac{2kF_T}{mc} + W_1(-\exp(-z_i)) \right]. \quad (9)$$

Таблиця функції $W_1(-\zeta)$, складена з кроком 0,001, надрукована в [11]. Проводячи інтерполяцію табличних даних за формулою (9) можна знайти a_i , коли відоме a_{i-1} . Отже (9) є рекурентним співвідношенням для розрахунку розмахів затухаючих коливань.

У випадку $F_T = 0$ формула (9) співпадає з тою, що одержана в [7].

$$a_i = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m}{2k} \left[1 - \frac{2kF_T}{mc} - 1 + \frac{2k}{m} \left(a_{i-1} - \frac{F_T}{c} \right) \right] = a_{i-1} - \frac{2F_T}{c}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

При $k \rightarrow 0$ в формулі (9) виникає невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Щоб розкрити її,

з'ясуємо поведінку функції $W_1(-\zeta)$ при $\zeta \rightarrow 1/e$ зліва. Оскільки $f_i = 1$ при $z_i = 1$, то далі прийmemo:

$$f_i = 1 - \varepsilon; \quad z_i = 1 + \delta,$$

де ε, δ – малі додатні величини. Рівняння (7) набуває вигляд:

$$\ln(1 - \varepsilon) - (1 - \varepsilon) = -1 - \delta. \quad (10)$$

Користуючись відрізком степеневого ряду:

$$\ln(1 - \varepsilon) \approx -\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2,$$

замість (10), одержуємо:

$$\varepsilon^2 = 2\delta.$$

Із (8), при $a_{i-1} > F_T/c$, і $k \rightarrow 0$, випливає, що:

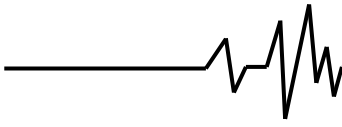
$$\delta = \frac{1}{2} \left[\frac{2k}{m} \left(a_{i-1} - \frac{F_T}{c} \right) \right]^2.$$

Тому:

$$\varepsilon = \frac{2k}{m} \left(a_{i-1} - \frac{F_T}{c} \right);$$

$$f \approx 1 - \frac{2k}{m} \left(a_{i-1} - \frac{F_T}{c} \right). \quad (11)$$

У підсумку, підставивши (11) в (9), отримуємо:



що є загальновідомим рекурентним співвідношенням, де зміна розмахів, спричинена лише сухим тертям, відповідає арифметичній прогресії.

Приклад 1. Використовуючи формулу (9), проведемо обчислення розмахів коливань осцилятора, в якого: $m = 2$ кг; $c = 1800$ Н/м; $k = 10$ Н·с²/м²; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м. Результати розрахунку записано в табл. 1, де також вказано амплітудні переміщення і час,

коли вони досягаються, одержані чисельним комп'ютерним інтегруванням рівняння (1).

Деякі розбіжності у значеннях розмахів, одержаних різними способами, є наслідками лінійної інтерполяції табличних даних в [11], при обчисленні функції Ламберта.

Процес вільних коливань включає лише 6 розмахів, що підтверджує графік коливань, зображений на рис. 1.

При відсутності в'язкого опору таких розмахів більше, як це подано на рис. 2.

Таблиця 1.

Значення a_i та час їх досягнення

i	Форм. (9)	Числ. інт.	$10 \sum t_i, \text{с}$
	Значення $100 a_i, \text{м}$		
1	3,394	3,395	1,05482
2	2,394	2,395	2,10566
3	1,673	1,675	3,15467
4	1,097	1,102	4,20270
5	0,605	0,609	5,25022
6	0,151	0,155	6,30000

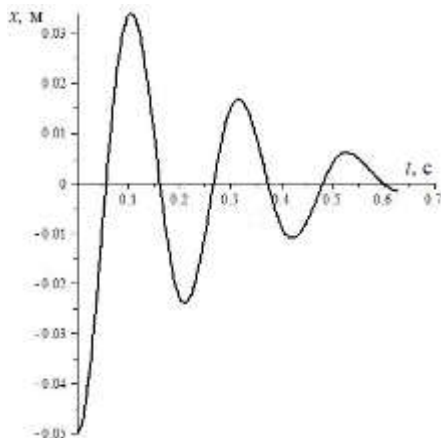


Рис. 1. Графік затухаючих коливань при $k = 10$ Н·с²/м²

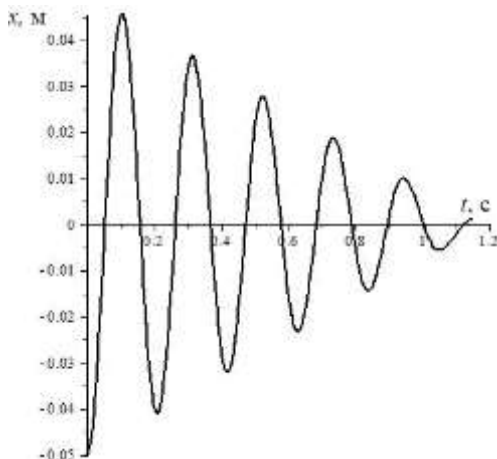


Рис. 2. Графік затухаючих коливань при $k = 0$

На рис. 2 спадання розмахів проходить за законом арифметичної прогресії: $a_i = a_{i-1} - 1/225$ м, до попадання осцилятора в область застою.

Графіки на рис. 1 і рис. 2 одержано чисельним комп'ютерним інтегруванням рівняння (1).

З'ясуємо далі можливість використання методу енергетичного балансу для обчислення розмахів коливань нелінійного осцилятора. З цією метою використаємо розрахункові залежності, одержані в [12]. Якщо задіяти для опису коливань рівняння обвідної, то згідно з [12]:

$$a_i = b \frac{a_{i-1} - b \operatorname{tg}(\pi b \lambda_2 / \omega)}{b + a_{i-1} \operatorname{tg}(\pi b \lambda_2 / \omega)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Тут $b = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_2}}; \quad \lambda_0 = \frac{2F_T \omega}{\pi c};$

$\lambda_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{k \omega^3}{\pi c}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad n$ – кількість розмахів до зупинки осцилятора.

Без рівняння обвідної метод енергетичного балансу дає рекурентне співвідношення [12]:

$$a_i = \alpha_i - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$



$$\text{де } \alpha_i = \sqrt{\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^2 + \frac{2}{\gamma}\left(a_{i-1} - \frac{F_T}{c}\right)} - \frac{1}{2\gamma};$$

$$\gamma = \frac{k\omega^2}{3c} = \frac{k}{3m}.$$

Приклад 2. Зберігаючи вхідні дані прикладу 1, обчислимо a_i методом енергетичного балансу. Результати розрахунків за формулами (12) і (13) записано в табл. 2, де також вказано відносні похибки цих наближених формул. Точними вважали a_i , одержані в табл. 1 чисельним інтегруванням.

Таблиця 2.

Значення a_i та час їх досягнення

i	Форм. (12)	Форм. (13)	Похибки форм. (12) в %	Похибки форм. (13) в %
	Значення $100a_i$, м			
1	3,405	3,384	0,29	0,32
2	2,405	2,385	0,42	0,42
3	1,683	1,667	0,48	0,48
4	1,109	1,095	0,64	0,64
5	0,614	0,603	0,82	0,99
6	0,158	0,149	1,94	1,87

Апробація показує, що похибки формули (12) дещо менші ніж (13). Перша дає завищенні, а друга – занижені значення розмахів коливань.

Метод енергетичного балансу дає можливість після обробки віброграми коливань ідентифікувати значення коефіцієнта в'язкого опору k і сили тертя F_T . В [12] показано, що α_i є розв'язком рівняння:

$$\gamma\alpha_i^2 + \alpha_i + \frac{2F_T}{c} - 2a_{i-1} = 0. \quad (14)$$

Тоді, при експериментально визначених з віброграми a_1 , a_2 та $\alpha_1 = a_0 + a_1$ і $\alpha_2 = a_1 + a_2$ у відповідності з (14), маємо:

$$\gamma\alpha_1^2 + \alpha_1 + \frac{2F_T}{c} - 2a_0 = 0,$$

$$\gamma\alpha_2^2 + \alpha_2 + \frac{2F_T}{c} - 2a_1 = 0.$$

Звідки випливає, що:

$$\gamma = \frac{2(a_0 - a_1) - (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}; \quad k = 3m\gamma;$$

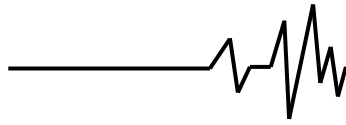
$$F_T = \frac{c}{2}(2a_0 - \alpha_1 - \gamma\alpha_1^2) \quad (15)$$

Приклад 3. Враховуючи дані в прикладі 1, приймаємо: $m = 2$ кг; $c = 1800$ Н/м; $a_0 = 0,05$ м; $a_1 = 0,03395$ м; $a_2 = 0,02395$ м. Для цих числових даних: $\alpha_1 = 0,08395$ м; $\alpha_2 = 0,0579$ м;. По формулах (15) одержуємо: $\gamma = 1,6373$ м⁻¹; $k = 9,8236$ Н·с²/м²; $F_T = 4,0599$ Н. Результати ідентифікації k і F_T близькі до тих характеристик опору, що задавали в прикладі 1, при обчисленні розмахів a_1 і a_2 числовим методом. Похибка визначення k становить 1,8 %, а F_T – 1,5 %.

Висновки. Дослідження показало, що розрахунок розмахів затухаючих коливань осцилятора, при наявності квадратичного опору і сухого тертя, за точною формулою пов'язаний з обчисленням значень функції Ламберта від'ємного аргументу. При відсутності таблиць цієї спеціальної функції розмахи з невеликою похибкою можна також визначати методом енергетичного балансу, який не потребує розв'язання диференціального рівняння руху осцилятора. Цей метод дає можливість ідентифікувати, при наявності віброграми коливань, значення коефіцієнта в'язкого опору і сили сухого тертя.

Список використаних джерел

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва : Дрофа, 2004. 591 с.



2. Бурлака В. В., Ольшанський В. П., Малець О. М. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого та в'язкого тертя. *Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ*. Харків, 2014. Вип. 148. С. 19-24.

3. Ольшанський В. П., Тищенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків : Місдрук, 2016. 264 с.

4. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под редакцией И. И. Блехмана. Москва : Машиностроение, 1979. 351 с.

5. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний Москва : Наука, 1980. 270 с.

6. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху К. : Вища школа, 2004. 525 с.

7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2014. № 18(1061). С. 116-119.

8. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solution for ordinary differential equation. Boca Raton : CRC press, 2007. 707 p.

9. Rao S. S. Mechanical vibrations. Pearson (6th edition), 2016. 1152 p.

10. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т.2. Москва : Дрофа, 2006. 720 с.

11. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. Харьков : Издатель Савчук А.О., 2013. 204 с.

12. Ольшанський В. П., Бурлака В. В., Сліпченко М. В. Вільні затухаючі коливання осцилятора з комбінованим опором. *Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології процесів переробних і харчових виробництв*. Харків, 2019. Вип. 207. С. 22-33.

References

1. Babakov, I. M. (2004). Teoriya kolebanij [Oscillation theory]. Moskva : Drofa. [In Russia].

2. Burlaka, V. V., Olshanskiy, V. P., & Malec, O. M. (2014). Do rozrakhunku kolyvan` mekhanizmiv pry spil`nij diyi syl sukhogo ta vyazkogo tertya [To the calculation of oscillations of mechanisms under the joint action of dry and viscous friction forces]. *Mekhanizaciya silskogospodarskogo vyrobnyctva: Visnyk XNTUSG – Mechanization of agricultural production:*

Bulletin of KhNTUSG. Kharkiv, 148, 19-24. [In Ukrainian]

3. Olshanskiy, V. P., Tishhenko, L. M., & Olshanskiy, S. V. (2016). *Dynamika dysypatyvnykh oscylyatoriv [Dynamics of dissipative oscillators]*. Kharkiv : Miskdruk. [In Ukrainian].

4. Blekhman I. I. (Ed) (1979) *Vibracziy v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh. Kolebaniya nelinejny`kh mekhanicheskikh sistem [Vibration in technology. Handbook in six volumes. Oscillations of nonlinear mechanical systems]*. (Vols. 2). Moskva : Mashinostroenie. [In Russia].

5. Panovko Ya. G. (1980). *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij [Introduction to the theory of mechanical vibrations]*. Moskva : Nauka. [In Russia].

6. Vasilenko, M. V., & Aleksejchuk, O. M. (2004). *Teoriya kolyvan` i stijkosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion]*. K. : Vyshcha shkola. [In Ukrainian].

7. Olshanskiy, V. P., & Olshanskiy, S. V. (2014). Funkcy`ya Lamberty v zadache kolebanij matematycheskogo mayatnyka [Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychno modelyuvannya v tekhnici ta tekhnologiyah [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]*. Kharkiv, 18(1061). 116-119. [In Russia].

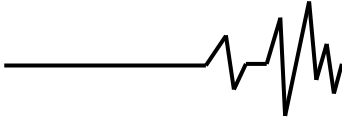
8. Polyanin, A. D., & Zaitsev, V. F. (2007). *Handbook of exact solution for ordinary differential equation*. Boca Raton : CRC press.

9. Rao S. S. (2016). *Mechanical vibrations* (6th ed.). Pearson.

10. Lojczyanskiy, L. G., & Lur`e, A. I. (2006) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki [The course of theoretical mechanics]*. (Vols. 2). Moskva : Drofa. [In Russia].

11. Olshanskiy, V. P., & Olshanskiy, S. V. (2013). *Funkcziya Lamberty v zadachakh ballistiki materialnoj tochki [Lambert function in ballistic problems of a material point]*. Kharkov : Izdatel Savchuk A. O. [In Russia].

12. Olshanskiy, V. P., Burlaka, V. V., & Slipchenko, M. V. (2019). Vilni zatukhayuchi kolyvannya oscylyatora z kombinovanyim oporom [Free damped oscillations of the oscillator with combined resistance]. *Visnyk KhNTUSG: Suchasni napryamky tekhnologiyi procesiv pererobnykh i kharchovykh vyrobnyctv [Bulletin of KhNTUSG: Modern*



directions of technology of processes of processing and food productions]. Kharkiv, 207, 22-33. [In Ukrainian].

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ НАЛИЧИИ КВАДРАТИЧНОГО ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И СУХОГО ТРЕНИЯ

Статья посвящена выводу точных и приближенных формул для расчета размахов свободных затухающих колебаний двоекратно нелинейного осциллятора. С использованием функции Ламберта и первого интеграла нелинейного дифференциального уравнения движения выведены формулы для вычисления размахов свободных затухающих колебаний линейно упругого осциллятора в условиях совместного действия сил квадратичного вязкого сопротивления и сухого трения Кулона. В расчетах задействована таблица указанной специальной функции отрицательного аргумента. Показано, что наличие вязкого сопротивления сокращает продолжительность свободных колебаний. Его наличие принципиально меняет процесс свободных колебаний, движение осциллятора становится ограниченным во времени, потому что состоит из ограниченного количества циклов. Для построения точного аналитического решения этой обобщенной задачи используем функцию Ламберта. Поставленная задача динамики приближенно решена также методом энергетического баланса, и проведено численное интегрирование нелинейного дифференциального уравнения движения на компьютере. Удовлетворительная сходимость численных результатов, полученных различными способами, подтвердила пригодность выведенных замкнутых формул для проведения инженерных расчетов. Кроме расчета размахов колебаний, метод энергетического баланса задействовано также для приближенного решения обратной задачи динамики, по идентификации значений коэффициента квадратичного сопротивления и силы сухого трения при наличии экспериментальной виброграммы свободных затухающих колебаний. Рассмотрено применение метода энергетического баланса как при наличии уравнение огибающей, так и с применением рекуррентного соотношения размахов. Приведен пример идентификации. Эта информация о трении нужна для расчета вынужденных колебаний, особенно в условиях

резонанса. Отмечено, что с полученных результатов, в отдельных случаях, вытекают известные формулы, где квадратичное вязкое сопротивление не связано с сухим трением.

Ключевые слова: свободные колебания, диссипативный осциллятор, квадратичное вязкое сопротивление, сухое трение, функция Ламберта, идентификация характеристик сопротивления, метод энергетического баланса.

FREE OSCILLATOR OSCILLATIONS IN THE PRESENCE OF QUADRATIC VISCOUS RESISTANCE AND DRY FRICTION

The article is devoted to the derivation of formulas for calculating the ranges of free damped oscillations of a double nonlinear oscillator. Using the Lambert function and the first integral of the nonlinear differential equation of motion, formulas are derived for calculating the ranges of free damped oscillations of a linearly elastic oscillator under the combined action of the forces of quadratic viscous resistance and Coulomb dry friction. The calculations involve a table of the specified special function of the negative argument. It is shown that the presence of viscous resistance reduces the duration of free oscillations to a complete stop of the oscillator. The set dynamics problem is also approximately solved by the energy balance method, and a numerical integration of the nonlinear differential equation of motion on a computer is carried out. The satisfactory convergence of the numerical results obtained in various ways confirmed the suitability of the derived closed formulas for engineering calculations. In addition to calculating the magnitude of the oscillations, the energy balance method is also used for an approximate solution of the inverse problem of dynamics, by identifying the values of the coefficient of quadratic resistance and dry friction force in the presence of an experimental vibrogram of free damped oscillations. An example of identification is given. This information on friction is needed to calculate forced oscillations, especially under resonance conditions. It is noted that from the obtained results, in some cases, well-known formulas follow, where the quadratic viscous resistance is not associated with dry friction.

Keywords: free oscillations, dissipative oscillator, quadratic viscous resistance, dry friction, Lambert function, identification of resistance characteristics, energy balance method.

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету



сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; OlshanskiyVP@gmail.com тел.: (066) 0100955

Ольшанский Василий Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики і теоретическої механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, ул. Алчевських, 44, г. Харьков, Украина, 61022; OlshanskiyVP@gmail.com тел.: (066) 0100955

Olshanskiy Vasyl Pavlovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkov, Ukraine; 61022; OlshanskiyVP@gmail.com тел.: (066) 0100955

Сліпченко Максим Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Слипченко Максим Владимирович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики и теоретической механики Харковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Slipchenko Maksym Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Associate Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkov, Ukraine; 61022; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Спольник Александр Иванович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; alexspo@ukr.net, (067) 764-84-64

Спольник Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики и теоретической механики Харковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; alexspo@ukr.net, (067) 764-84-64

Spolnik Aleksandr Ivanovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkov, Ukraine; 61022; alexspo@ukr.net, (067) 764-84-64

Замрій Михайло Анатолійович – студент 4 курсу спеціальності « 208 Агроінженерії», Інженерно-технологічного факультету Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: zamrij99@gmail.com).

Замрий Михаил Анатольевич – студент 4 курса специальности «208 Агроинженерия», Инженерно-технологического факультета Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, e-mail: zamrij99@gmail.com).

Zamrii Mykhailo – 4th year student of specialty 208 of Agroengineering, Faculty of Engineering and Technology of Vinnytsia National Agrarian University (str. Sonyachna, 3, Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: zamrij99@gmail.com).