

Рекечинський В. І.  
аспірант

Вінницький національний  
аграрний університет

Rekechynsky V.

Vinnitsia National Agrarian  
University

УДК 621.73.011.001.5

DOI: 10.37128/2306-8744-2020-2-17

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ТОКУ В СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСАХ ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Розроблено спосіб визначення компонент тензора швидкостей деформацій на основі методу функцій току. Припускається, що при асиметричній пластичній деформації металу в каналі з криволінійними границями кінематика процесу аналогічна плоскій течії. Використовуючи рівняння нестисливості та диференціальне рівняння ліній току встановлено, що функція току зберігає постійне значення вздовж ліній току. Розглянуто в площині течії дві нескінченно близькі лінії току для пояснення кінематичного змісту функції току. Отримано вираз для витрати через кінцеву по поперечних розмірах трубку току. За умови відсутності на границях радіальних складових швидкості отримано обмеження, які накладаються на похідні від функцій току на цих границях. Розроблена методика розрахунку кінематичних характеристик деформування для усталених осесиметричних процесів дозволить спростити математичну обробку отриманих результатів.

Реальні процеси обробки металів завжди супроводжуються нерівномірністю пластичної формозміни, що впливає на силові і кінематичні параметри, якість готової продукції. Основними технологічними чинниками, що впливають на появу неоднорідності і характер її розподілу є фактор форми (геометричні параметри вихідної заготовки) та коефіцієнт контактного тертя. Вивчення технологічних параметрів, що впливають на розподіл нерівномірності пластичної формозміни дозволить створити практичні рекомендації щодо зниження впливу вище згаданих параметрів для забезпечення більш рівномірного пластичного деформування.

За рахунок пружно-пластичної деформації й локального нагріву, що виникають при обробленні поверхнево-пластичним деформуванням, формується напружено-деформований та фізичний стан поверхневого шару. При цьому відбувається зміна мікрогеометрії поверхні, фізико-механічних властивостей поверхневого шару оброблюваних деталей. Поверхня, оброблена методами поверхнево-пластичного деформування, має підвищену твердість, залишкові напруження стиску в поверхневому шарі, згладжені мікронерівності. Відповідно підвищується зносостійкість, втомна міцність, стійкість до корозійного впливу та інше.

**Ключові слова:** тензор швидкостей деформацій, напружено-деформований стан, питоме зусилля пресування, кільцева заготівка, головні деформації, неоднорідність деформації.



**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Застосування функцій току для розв'язку проблеми опису кінематики деформування дозволяє тотожно задовольнити умову нестискаємості при одночасному зниженні розмірності задачі: опису двохмірних течій однією, а трьохмірних - двома функціями току. В роботах [1, 2] широко використовуються функції току Лагранжа і Стокса для опису процесів плоскої і осесиметричної деформації та їх узагальнення для визначення компонент вектора швидкості через функції току в трьохмірних течіях. Співвідношення для компонент вектора швидкості через функції току, введені через декартові координати ліній току в жорсткій зоні, запропоновані в роботах [3, 4]. Вони використані при розробці методів експериментально-аналітичного дослідження і для побудови кінематично можливих полів швидкостей. Оригінальні функції току для розв'язку трьохмірних задач запропоновані в роботах [5, 6]. Разом з тим конкретний вид прийнятих функцій току не розкриває всіх їх можливостей як в теоретичних, так і в експериментально-аналітичних методах особливо для осередків деформації складної форми.

**Постановка проблеми.** В даний час найбільш поширеним способом обробки металів тиском є холодне об'ємне штампування, яке дозволяє звести до мінімуму або повністю виключити необхідність наступної обробки різанням.

Подальший розвиток методів холодного штампування та більш широке впровадження їх у виробництво можливі на основі використання теорії деформовності як при розробці нових способів формозміни, так і при раціональному, з точки зору деформовності, об'єднанні існуючих операцій та створенні нових комбінованих процесів. Аналіз таких процесів неможливий без врахування ефекту Баушингера.

При пластичній деформації, особливо пористих матеріалів, паралельно з процесами накопичення пошкоджень проходять процеси заліковування. Інтенсивність цих процесів залежить від історії навантаження, яка визначається параметрами процесу, можливості зміни яких часто обмежені. Одним з ефективних методів відновлення запасу пластичності є проміжні відпали, результати яких залежать від величини використаного ресурсу пластичності. Відомі методи визначення ресурсу пластичності не дозволяють оцінювати комплексний вплив немонотонності навантаження та проміжних відпалів на пластичність. У зв'язку з цим залишається актуальною проблема прогнозування пластичності металів при розробці

комбінованих процесів холодного видавлювання з проміжними відпалами.

**Формулювання мети досліджень.**

Метою досліджень є визначення компонент тензора швидкостей деформацій на основі методу функцій току, використовуючи рівняння нестисливості та диференціальне рівняння ліній току

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Для визначення поля швидкостей у стаціонарних процесах пластичної течії метала одним із найбільш ефективних є метод функцій току [6-9]. Функції току мають простий фізичний зміст [10-13].

При плоскій течії нестисливого середовища всі частинки отримують переміщення, паралельні певній площині, яку приймемо за площину  $xOy$ . З рівняння нерозривності (нестисливості)

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

витікає, що завжди можна знайти функцію  $\psi(x,y)$ , яка задовольняє рівнянню (1) і зв'язана з проекціями швидкості рівністю

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

Функція  $\psi(x,y)$  має простий гідродинамічний зміст. Диференціальне рівняння ліній току для випадку плоскої деформації мають вид

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (3)$$

Підставимо в (3) вирази (2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0 \quad (4)$$

З (4) витікає, що функція току зберігає постійне значення вздовж ліній току. Тобто, сімейство ліній рівня функцій

$$\psi(x,y) = C, \quad (5)$$

що відповідають різним значенням  $C$ , являють собою сукупність ліній току. Функцію  $\psi(x,y)$  у зв'язку з цим називають функцією току.

Для пояснення кінематичного змісту функції току розглянемо в площині течії дві



нескінченно близькі лінії току: одну, що проходить через точку  $M_0$ , із відповідним значенням функції току  $\psi_0$ , другу - через точку  $M$  з значенням функції току  $\psi = \psi_0 + d\psi$  (рис. 1).

Частина матеріалу, яка перебуває між циліндричними поверхнями, перпендикулярними до площини рис. 1, твірними для яких є лінії току, створює елементарну трубку току, яка обмежена площиною рисунка і паралельної їй площиною,

яка знаходиться на відстані одиниці довжини від площини рисунка.

Оскільки елементарний секундний об'ємний розхід  $dQ$  через будь-який переріз трубки току не залежить від форми цього перерізу, виберемо його у вигляді сукупності двох паралельних осей координат відрізків

$M_0M'_0 = dy$  і  $M'_0M = -dx$ . Тоді

$$dQ = udy - vdx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \quad (6)$$

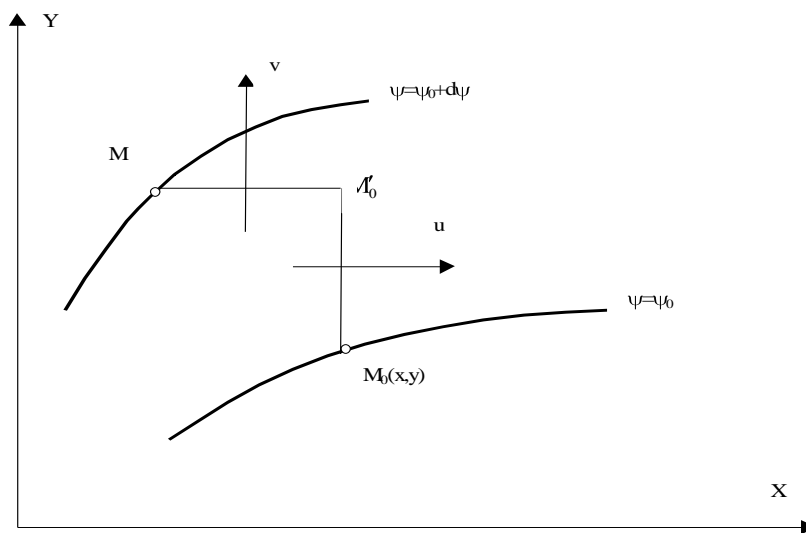


Рис. 1. Трубка току

звідки витікає вираз для витрати через кінцеву поперечних розмірах трубку току  $M_0M$

$$Q = \int_{M_0}^M dQ = \psi \Big|_{M_0}^M = \psi(M) - \psi(M_0) \quad (7)$$

Оскільки, згідно системі рівнянь (2), функція току визначається з точністю до адитивної сталої, то можна довільну лінію току

розглядати як нульову, вважаючи, що вздовж неї  $\psi(x, y) = 0$ .

При осесиметричній пластичній деформації металу в каналі з криволінійними границями кінематика процесу аналогічна плоскій течії. Нанесемо на меридіональну поверхню заготовки сімейство допоміжних ліній, перпендикулярних осі симетрії. В кожній точці даної лінії току функція току дорівнює її значенню в точці перетину цієї лінії току з границею  $\Gamma_1$  (рис. 2)

$$\psi_{i,j} = \psi_{1,i} \quad (8)$$

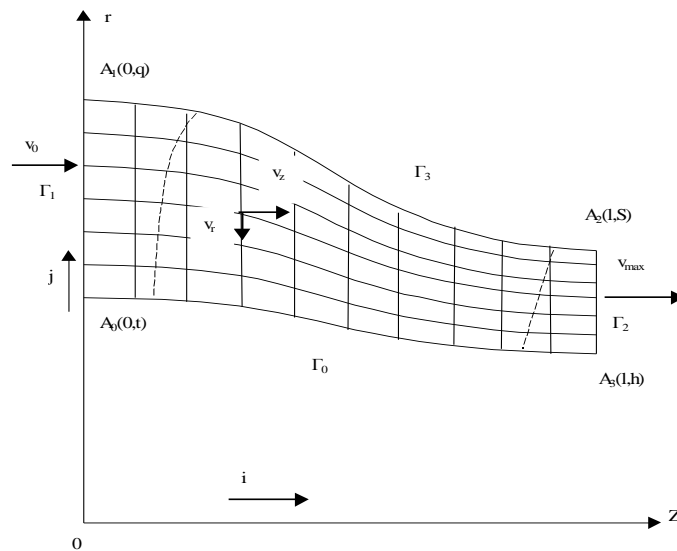


Рис. 2. Функція току з границею  $\Gamma_1$

До визначення кінематики деформування при осесиметричній течії у каналі, який сходиться,  $i=1\dots n, j=1\dots m$ , де  $n$  – кількість допоміжних ліній,  $m$  – кількість ліній току, включаючи  $\Gamma_0$  і  $\Gamma_3$ .  $v_0$  і  $v_{max}$  – швидкості частинок матеріалу на вході в канал і на виході з нього.

Уздовж  $\Gamma_1$  функція току дорівнює (9),

$$\psi_{1,j} = \pi v_0 (R_{1,j}^2 - R_{1,1}^2) \quad (9)$$

Де  $v_0$  – швидкість недеформованого металу до входу в канал матриці,

$R_{1,1}, R_{1,j}$  – радіуси 1-ої і  $j$ -ої ліній току на вході в канал.

Виберемо нормуючий множник

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{R_{1,m}^2 - R_{1,1}^2}}, \quad (10)$$

і приймемо, що

$$\psi_{1,j} = R_{1,j}^2 - R_{1,1}^2, \quad (11)$$

що відповідає витраті з точністю до множника  $\pi v_0$ , тоді на границях  $\Gamma_3$  і  $\Gamma_0$

$$\psi|_{\Gamma_3} = 1, \quad \psi|_{\Gamma_0} = 0 \quad (12)$$

Швидкості течії матеріальних частинок [8]

$$v_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$v_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (13)$$

З умови відсутності на границях  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  радіальних складових швидкості  $v_r|_{\Gamma_{1,2}} = 0$

витікають обмеження, які накладаються на похідні від функцій току на цих границях

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\Gamma_{1,2}} = 0. \quad (14)$$

Якщо  $\Gamma_0$  співпадає з віссю симетрії, то

$$v_r|_{\Gamma_0} = 0, \text{ тому}$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\Gamma_0} = 0, \quad (15)$$

крім того, в цьому випадку виконується умова симетрії функції току й осьової швидкості течії

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right|_{\Gamma_3} = 0. \quad (16)$$

Компоненти тензора швидкостей деформацій і їх інтенсивність обчислюються за формулами



$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{v_r}{r} = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{v_z}{z} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r}, \quad (17),$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} = +\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} = -\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_z,$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{2\pi r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

$$\dot{\epsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left( \dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r \right)^2 + \left( \dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z \right)^2 + \left( \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\varphi \right)^2 + \frac{2}{3} \dot{\gamma}_{rz}^2}.$$

Для одержання дійсних значень швидкостей течії (13) необхідно помножити на  $\pi v_0$ , а швидкості деформації (17) - на  $\lambda v_0$ .

Ступінь деформації будемо визначати за формулою

$$e_u(\epsilon, r) = \int_0^t \dot{\epsilon}_u(\epsilon, r) d\tau, \quad (18)$$

де  $t$  - час, за який частинка проходить шлях  $S$  вздовж лінії току.

**Висновки.** Розроблено методику розрахунку характеристик кінематики деформування для усталених осесиметричних процесів, основу на методах функцій току, які дозволяють значно підвищити точність апроксимації функцій двох змінних та спростити математичну обробку отриманих результатів

#### Список використаних джерел

1. Огородников В. А. Ресурс пластичности металлов при холодном объёмном формоизменении: монография / В. А. Огородников, И. А. Деревенько, Л. И. Алиева // Винница: ВНТУ, 2016. - 176 с.

2. Дмитриев А. М. Учет неоднородности механических свойств и скорости деформации в расчетах процессов выдавливания / А. М. Дмитриев, А. Л. Воронцов // Кузнечно-штамповочное производство, 2004, № 8. с. 3-10.

3. Коцюбівська К. І. Ресурс пластичності металів при поперечному видавлюванні з протитиском : монографія / К. І. Коцюбівська, Ю. А. Буренніков, І. О. Сивак. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 156 с.

4. Колмогоров, В.Л. Механика обработки металлов давлением / В.Л. Колмогоров. – Екатеринбург: Уральский

государственный технический университет (УПИ), 2001. – 836 с.

5. Басин М. Е. Оценка применимости теории упруго-пластического течения при моделировании процесса волочения металла / М. Е. Басин, М. Г. Бояршинов, Г. Л. Колмогоров // Вычислительная механика. — 2005. — № 3. — С. 70-75.

6. Алюшин Ю.А. Связь линий тока и скорости деформации в процессах развитого пластического формоизменения. *Изв. вузов. Черная металлургия*. 1970. №8. С.71-74.

7. Кучеряев Б.В. К определению действительных функций тока и функций напряжений при решении задач теории вязкопластических течений. *Пластическая деформация легких и специальных сплавов*. М.: Металлургия, 1982. Вып 2. С.27-37.

8. Кузьменко В.И., Балакин В.Ф. Решение на ЭВМ задач пластического деформирования. Киев : Техника, 1990. 136 с.

9. Шебейк А. Решение на ЦВМ методом визиопластичности задачи осесимметричного прессования через матрицу с криволинейной образующей. *Труды американского общества инженеров - механиков. Конструирование и технология машиностроения*, 1972. №2. С.273-279.

10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840с.

11. Ogorodnikov V. A. On the Influence of Curvature of the Trajectories of Deformation of a Volume of the Material by Pressing on Its Plasticity Under the Conditions of Complex Loading. *Materials Science*. Vol. 54, 2018. P. 326-332.

12. Maslov A. The determination of the parameters of a vibration machine the internal compaction of concrete mixtures. *International Journal of Engineering & Technology*. Vol. 7, 2018. P. 12-19.

13. Puzyr R. Experimental Study of the Process of Radial Rotation Profiling of Wheel Rims



Resulting in Formation and Technological Flattening of the Corrugations. *Manufacturing Technology*, 2018. Vol. 18 (1), P. 106-111.

### References

1. Ogorodnikov V. A. Resurs plastichnosti metallov pri holodnom obemnom formoizmenenii: monografiya / V. A. Ogorodnikov, I. A. Derevenko, L. I. Alieva // Vinnitsa: VNTU, 2016. - 176 s.

2. Dmitriev A. M. Uchet neodnorodnosti mehanicheskikh svoystv i skorosti deformatsii v raschetah protsesov vydavlivaniya / A. M. Dmitriev, A. L. Vorontsov // Kuznechno-shtampovoe proizvodstvo, 2004, № 8. s. 3–10.

3. Kotsiubivska K. I. Resurs plastichnosti metaliv pri poperechnomu vidavliuvanni z protitiskom: monografiya / K. I. Kotsiubivska, Iu. A. Burenikov, I. O. Sivak. – Vinnitsia : VNTU, 2011. – 156 s.

4. Kolmogorov V. L. Mehanika obrabotki metallov davleniem / V. L. Kolmogorov. – Ekaterinburg: UPI, 2001. – 836 s.

5. Basin M. E. Otsenka primenimosti teorii uprugoplasticheskogo techeniya pri modelirovanii protsesa volocheniya metalla / M. E. Basin, M. G. Boiarshinov, G. L. Kolmogorov // Vycheslitelnaia mehanika. — 2005. — № 3. — s. 70-75.

6. Aljushin Ju.A. Svjaz' linij toka i skorosti deformatsii v processah razvitogo plasticheskogo formoizmenenija. *Izv. vuzov. Chernaja metallurgija*. 1970. №8. S.71-74.

7. Kucherjaev B.V. K opredeleniju dejstvitel'nykh funktsij toka i funktsij napryazhenij pri reshenii zadach teorii vjzokoplasticheskikh techenij. *Plasticheskaja deformacija legkih i special'nykh splavov*. M.: Metallurgija, 1982. Vyp 2. S.27-37.

8. Kuzmenko V.Y., Balakyn V.F. Reshenie na JeVm zadach plasticheskogo deformirovaniya. Kiev : Tehnika, 1990. 136 s.

9. Shebeik A. Reshenie na CVM metodom vizioplastichnosti zadachi osesimmetrichnogo pressovaniya cherez matricu s krivolinejnoy obrazujushhej. *Trudy amerikanskogo obshhestva inzhinerov - mehanikov. Konstruirovaniye i tehnologiya mashinostroeniya*, 1972. №2. S. 273-279.

10. Loitsianskiy L.H. Mehanika zhidkosti i gaza. M.: Nauka, 1987. 840s.

11. Ogorodnikov V. A. On the Influence of Curvature of the Trajectories of Deformation of a Volume of the Material by Pressing on Its Plasticity Under the Conditions of Complex Loading. *Materials Science*. Vol. 54, 2018. P. 326-332.

12. Maslov A. The determination of the parameters of a vibration machine the internal compaction of concrete mixtures. *International Journal of Engineering & Technology*. Vol. 7, 2018. P. 12-19.

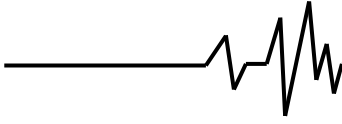
13. Puzyr R. Experimental Study of the Process of Radial Rotation Profiling of Wheel Rims Resulting in Formation and Technological Flattening of the Corrugations. *Manufacturing Technology*, 2018. Vol. 18 (1), P. 106-111.

### Применение метода функций тока в стационарных процессах пластического деформирования

Разработан способ определения компонент тензора скоростей деформаций на основе метода функций тока. Предполагается, что при асимметричной пластической деформации металла в канале с криволинейными границами кинематика процесса аналогична плоской течению. Используя уравнение несжимаемости и дифференциальное уравнение линий тока установлено, что функция тока сохраняет постоянное значение вдоль линий тока. Рассмотрен в плоскости течения две бесконечно близкие линии тока для объяснения кинематической содержания функции тока. Получено выражение для расхода через конечную по поперечным размерам трубку тока. При отсутствии на границах радиальных составляющих скорости получено ограничения, которые накладываются на производные от функций тока на этих границах. Разработана методика расчета кинематических характеристик деформирования для устоявшихся осесимметричных процессов позволит упростить математическую обработку полученных результатов.

Реальные процессы обработки металлов всегда сопровождаются неравномерностью пластической деформации, что влияет на силовые и кинематические параметры, качество готовой продукции. Основными технологическими факторами, влияющими на появление неоднородности и характер ее распределения фактор формы (геометрические параметры исходной заготовки) и коэффициент контактного трения. Изучение технологических параметров, влияющих на распределение неравномерности пластической деформации позволит создать практические рекомендации по снижению влияния вышеупомянутых параметров для обеспечения более равномерного пластического деформирования.

За счет упруго-пластической деформации и локального нагрева, возникающие при обработке поверхностно-пластическим деформированием, формируется напряженно-деформированное и физическое состояние поверхностного слоя. При этом происходит изменение микрогеометрии поверхности,



физико-механических свойств поверхностного слоя обрабатываемых деталей. Поверхность, обработанная методами поверхностно-пластического деформирования, имеет повышенную жесткость, остаточные напряжения сжатия в поверхностном слое, сглаженные микронеровности. Соответственно повышается износостойкость, усталостная прочность, устойчивость к коррозионного воздействия и прочее.

**Ключевые слова:** тензор скоростей деформаций, напряженно-деформированное состояние, удельное усилие прессования, кольцевая заготовка, главные деформации, неоднородность деформации.

#### **Application of the method of current functions in stationary plastic deformation processes**

A method of determining the components of the strain rate tensor based on the method of current functions is developed. It is assumed that, with an axisymmetric plastic deformation of the metal in a channel with curvilinear borders, the kinematics of the process are similar to a flat flow. Using the incompressibility equation and the differential equation of the current lines, it is established that the current function maintains a constant value along the current lines. Two infinitely close current lines are considered in the flow plane to explain the kinematic content of the current function. The expression for flow through the finite transverse-sized tube was obtained. In the absence of radial velocity components at the boundaries, we obtain the restrictions imposed on

derivatives of the current functions at these boundaries. The method of calculation of kinematic deformation characteristics for established axisymmetric processes will allow to simplify the mathematical processing of the obtained results.

Real processes of metal processing are always accompanied by uneven plastic molding, which affects the power and kinematic parameters, the quality of finished products. The main technological factors affecting the appearance of the inhomogeneity and the nature of its distribution are the form factor (geometric parameters of the original workpiece) and the coefficient of contact friction. The study of technological parameters affecting the distribution of non-uniformity of plastic molding will allow to create practical recommendations for reducing the influence of the above mentioned parameters to ensure more uniform plastic deformation.

Due to elastic-plastic deformation and local heating, which occur during surface-plastic deformation processing, the stress-strain and physical state of the surface layer is formed. This changes the microgeometry of the surface, the physical and mechanical properties of the surface layer of the workpiece. The surface treated by methods of surface-plastic deformation, has high hardness, residual compression stresses in the surface layer, smoothed out the micro-roughness. Accordingly, increases wear resistance, fatigue strength, resistance to corrosion and more.

**Keywords:** strain rate tensor, stress-strain state, specific compression force, annular billet, principal deformation, deformation inhomogeneity.

#### **Відомості про автора**

**Рекечинський Володимир Іванович** - аспірант Вінницького національного аграрного університету (ул. Сонячна, 3, г. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: [volodimir\\_rekecinskiy@ukr.net](mailto:volodimir_rekecinskiy@ukr.net)).

**Рекечинський Володимир Іванович** - аспірант Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: [volodimir\\_rekecinskiy@ukr.net](mailto:volodimir_rekecinskiy@ukr.net)).

**Rekechynsky Volodymyr Ivanovych** - Postgraduate Student of Vinnytsia National Agrarian University (3, Solnyshchaya St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: [volodimir\\_rekecinskiy@ukr.net](mailto:volodimir_rekecinskiy@ukr.net)).