



**Бовсуновський А. П.**  
д. т. н., професор

**Національний  
університет харчових  
технологій**

**Сураче Ч.**  
доктор філософії, професор

**Туринський Політех**

**Bovsunovsky A.**

**National University of Food  
Technologies**

**Surace C.**

**Politecnico di Torino**

**УДК 373:534.1:620.193**

**DOI: 10.37128/2306-8744-2020-1-2**

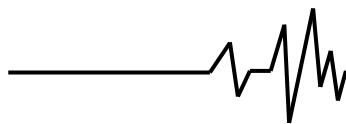
## **ДІАГНОСТИКА КОНСТРУКЦІЙНИХ ПОШКОДЖЕНЬ НА ОСНОВІ ЗМІНИ СПІВВІДНОШЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ**

*Проблеми вібраційної діагностики, засновані на зміні власних частот споруд, пов'язані з впливом умов навколишнього середовища та експлуатації (температура, вологість, вітер, інтенсивний рух тощо) на власні частоти. У деяких випадках цей вплив є порівняним з впливом пошкодження, внаслідок чого надійна діагностика пошкоджень стає проблематичною. Для вирішення цієї проблеми пропонується в якості характеристики пошкодження використання зміни співвідношення власних частот різних форм коливань. Дослідження продемонструвало, що на це співвідношення не впливають умови навколишнього середовища та експлуатації. Застосування запропонованого способу проілюстровано на прикладі залізобетонного мосту Z24. Аналітичне дослідження було проведено для розрахунку власних частот коливань багатопрольотної балочної конструкції з пошкодженням. Оскільки характерною особливістю пошкодження залізобетонних конструкцій є виникнення множинних тріщин, в аналітичній моделі окрім розміру і місця розташування тріщини було враховано і можливість виникнення декількох локально розташованих тріщин. Було продемонстровано, що для виявлення локального пошкодження докритичного розміру необхідні дані про власні частоти щонайменше чотирьох форм коливань. Власні частоти, отримані експериментально при дослідженні мосту Z24, були використані для підтвердження того, що зміна співвідношення власних частот може бути використана для діагностики відносно невеликих локальних пошкоджень в складних конструкціях. При цьому надійність такої вібродіагностики є набагато вищою, ніж заснованої на зміні власних частот і форм коливань, оскільки зміна співвідношення власних частот не залежить від умов навколишнього середовища і умов експлуатації конструкції.*

**Ключові слова:** вібраційна діагностика, локальні пошкодження, умови навколишнього середовища, експлуатаційні умови, співвідношення власних частот; мостові споруди.

**Постановка проблеми.** Основною проблемою вібраційної діагностики пошкоджень, добо діагностики, заснованої на зміні динамічних характеристик машин і конструкцій є низька чутливість. Якщо крім того врахувати, що динамічні характеристики машин і конструкцій залежать також від умов навколишнього середовища та експлуатації і

що в багатьох випадках цей вплив є порівняним з впливом пошкодження, то надійна діагностика пошкоджень стає майже неможливою. Для вирішення цієї проблеми пропонується використання зміни співвідношення власних частот різних форм коливань в якості характеристики пошкодження, оскільки ця характеристика не залежить від умов



навколишнього середовища та експлуатації.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій.**

Вібраційна діагностика пошкоджень, заснована на зміні власних частот, розвивається багато десятиліть, зосереджуючись на вирішенні двох основних проблем, що істотно ускладнюють її практичне застосування. Перша проблема пов'язана з відносно низькою чутливістю вібраційної діагностики до пошкодження докритичного розміру. Як було песимістично зазначено у дослідженні [1], «чутливість таких динамічних характеристик, як власні частоти та форми коливань, до пошкоджень все ще залишається сумнівною».

Друга проблема полягає в тому, що не тільки пошкодження, але й ряд інших факторів впливають на власні частоти конструкції. У деяких випадках цей вплив є значно більшим, ніж вплив пошкодження. До таких факторів можна віднести температуру та вологість повітря, наявність дощу, швидкість та напрямок вітру, інтенсивність руху, асфальтове покриття тощо [1-3]. Серед цих факторів найбільш суттєвим є вплив температури, який проявляється через зміну модуля пружності бетону чи металу та промерзання ґрунту під опорами.

Експериментальне дослідження бетону показало [4], що при підвищенні температури від  $-20$  до  $50^{\circ}\text{C}$  модуль пружності бетону зменшується майже лінійно на 37% (з 41 до 30 ГПа), а коефіцієнт Пуассона – на 20% (від 0,2 до 0,16). Збільшення відносної вологості повітря від 0 до 100% також призводить до зниження модуля пружності бетону на 24%.

Як показано в роботі [5], навіть добова зміна температури призводить до зміни власних частот залізобетонних мостів більш ніж на 5%. Очевидно, що сезонні перепади температур повинні спричинити більш значну зміну динамічних характеристик мостових конструкцій. Так спостереження протягом року за зміною власних частот залізобетонного мосту Z24 у Швейцарії показали [8], що внаслідок зміни температури від  $-5$  до  $40^{\circ}\text{C}$  частоти перших чотирьох форм коливань змінювались на 14-18%.

Збільшення перших шести власних частот коливань 44-метрового сталевого каркасного мосту із зменшенням температури в діапазоні від  $-14$  до  $39^{\circ}\text{C}$  до 8% в було зафіксовано в результаті тривалого спостереження [2]. Збір даних про модальні характеристики підвісного мосту протягом двох років [3] дозволив визначити, що перші п'ять власних частот коливань мосту мають тенденцію до зниження із збільшенням температури (до 4,5% в діапазоні температури від  $-3$  до  $24^{\circ}\text{C}$ ).

Для мостів з довгими прольотами вплив транспортного навантаження на власні частоти конструкції був визнаний незначним [7]. У роботі [3] було продемонстровано, що власні частоти коливань підвісного мосту зменшуються зі збільшенням інтенсивності трафіку до 3,5%. Ефект швидкості вітру в більшості випадків був досить малим або незначним. У роботі [3] було помічено, що швидкість вітру дещо впливає лише на власні частоти поперечних коливань підвісного мосту.

Таким чином, зміна температури мостових конструкцій є головним фактором, що впливає на їх власні частоти. Інтенсивність цього впливу в деяких випадках може бути набагато вищим за вплив пошкодження докритичних розмірів. Враховуючи цей фактор та інші, про які йшлося вище, кожен з яких у більшій чи меншій мірі впливає на власні частоти, вібраційна діагностика пошкоджень на основі зміни власних частот конструкції є проблематичною.

З метою відокремити вплив експлуатаційних умов навколишнього середовища на власні частоти від впливу пошкодження конструкції у роботі [8] було застосовано процедуру нормалізації даних. У цьому випадку динамічні характеристики (наприклад, власні частоти) конструкцій втрачають свій фізичний сенс і трактуються так само, як часові ряди, які повинні бути очищені від тенденцій, що виникають внаслідок впливу умов навколишнього середовища та експлуатаційних умов.

В роботі [9] було запропоновано ідею виявлення пошкоджень, яка ґрунтувалася на тому, що на зміну співвідношення двох власних частот не впливає модуль пружності та густина матеріалу стрижня. Стратегія виявлення пошкоджень будувалася на визначенні співвідношенні власних частот однієї форми коливань у вертикальній та горизонтальній площинах.

**Мета досліджень.** Дослідити співвідношення між власними частотами різних форм коливань в одній площині в якості показника пошкодження мосту Z24, а також продемонструвати, що це співвідношення є нечутливим до умов навколишнього середовища та експлуатації і дозволяє значно підвищити надійність виявлення пошкоджень в складних великогабаритних конструкціях в реальних умовах експлуатації.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Міст Z24 на автомагістралі A1 Берн-Цюріх був побудований між 1961 і 1963 роками, і він все ще перебував у хорошому стані, коли його знесення стало необхідним через будівництво нового залізничного сполучення. Інженери та експерти вирішили



скористатись можливістю вивчити динамічну поведінку мосту в непошкодженому стані, а потім – в процесі штучного створення пошкоджень [10].

Міст Z24 – це залізобетонна споруда з трьома прольотами загальною довжиною 60 м, з головним прольотом довжиною 30 м та двома бічними прольотами довжиною 14 м кожний [1]. Для аналітичного дослідження коливань мосту він представлений у вигляді балки на чотирьох опорах (рис. 1).

Вільні поперечні коливання цієї балки у непошкодженому стані (рис. 1, а) можна описати, нехтуючи демпфіруванням, диференціальним рівнянням виду

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $E$  і  $\rho$  – модуль пружності і густина матеріалу;  $I$  і  $A$  – момент інерції і площа поперечного перерізу балки, відповідно.

Загальне рішення рівняння (1) можна представити у наступній формі:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) \sin(\omega_i t + \psi_i), \quad (2)$$

де  $w_i(x)$  і  $\omega_i$  – власні форми коливань і кутові частоти, відповідно;  $\psi_i$  – кут зсуву фаз;  $i$  – номер форми коливань. Форми коливань балки описуються виразом:

$$w_i(x) = A_i S(k_i x) + B_i T(k_i x) + C_i U(k_i x) + D_i V(k_i x), \quad (3)$$

де  $k_i^4 = \omega_i^2 \rho A / EI$ ,  $S(k_i x) = (\cosh k_i x + \cos k_i x) / 2$ ,  $T(k_i x) = (\sinh k_i x + \sin k_i x) / 2$ ,  $U(k_i x) = (\cosh k_i x - \cos k_i x) / 2$ ,  $V(k_i x) = (\sinh k_i x - \sin k_i x) / 2$  ( $S$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $V$  – функції Кривола).

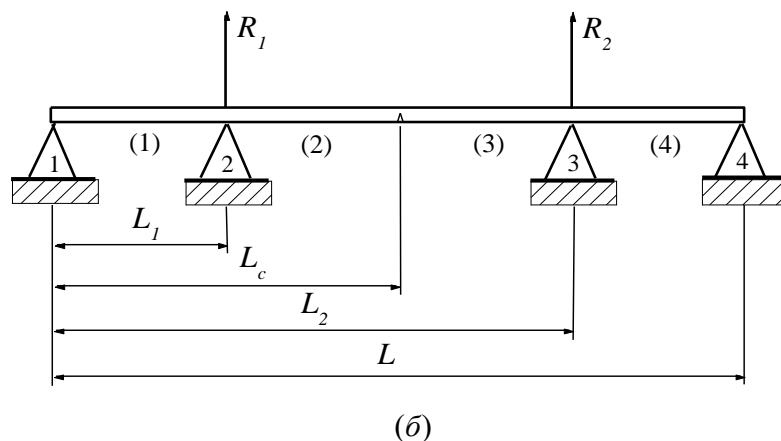
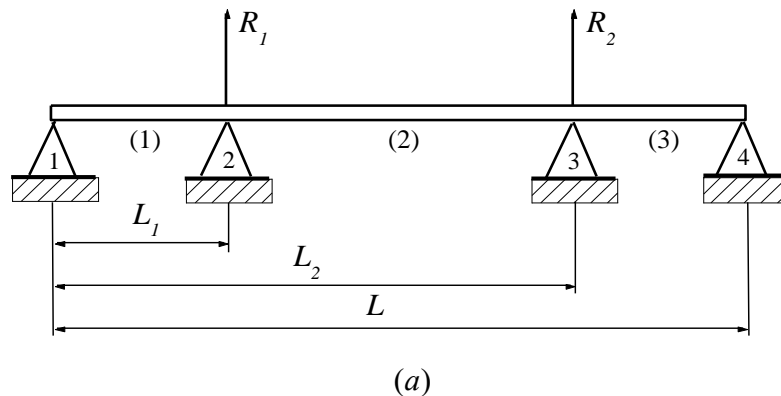


Рис. 1. Модель мосту Z24: (а) – у непошкодженому стані; (б) з пошкодженням

Враховуючи граничні умови на лівому кінці балки ( $x=0$ ) для переміщення та згинального моменту ( $w_i(0) = 0$ ;  $M_i(0) = 0$ ),

можна визначити, що  $A=C=0$ . Тоді рівняння (3) для першого прольоту набуває форми



$$w_i^{(1)}(x) = B_i T(k_i x) + D_i V(k_i x); \quad (0 \leq x \leq L_1). \quad (4)$$

$$w_i^{(2)}(x) = B_i T(k_i x) + D_i V(k_i x) + \frac{R_1}{k_i^3 EI} V[k_i(x - L_1)]; \quad (L_1 \leq x \leq L_2); \quad (5)$$

Для визначення аналогічних рівнянь для другого і третього прольотів необхідно врахувати реакції внутрішніх опор, тобто  $R_1$  і  $R_2$  [11]

$$w_i^{(3)}(x) = B_i T(k_i x) + D_i V(k_i x) + \frac{R_1}{k_i^3 EI} V[k_i(x - L_1)] + \frac{R_2}{k_i^3 EI} V[k_i(x - L_2)]; \quad (L_2 \leq x \leq L). \quad (6)$$

З врахуванням граничних умов на правому кінці балки ( $x=L$ ) і на проміжних опорах ( $x=L_1$  і  $x=L_2$ ), тобто можна отримати характеристичне рівняння для даної системи

$$w_i^{(3)}(L) = 0; \quad M_i^{(3)}(L) = 0;$$

$$w_i^{(1)}(L_1) = 0; \quad w_i^{(2)}(L_2) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} T(k_i L) & V(k_i L) & V[k_i(L-L_1)] & V[k_i(L-L_2)] \\ V(k_i L) & T(k_i L) & T[k_i(L-L_1)] & T[k_i(L-L_2)] \\ T(k_i L_1) & V(k_i L_1) & 0 & 0 \\ T(k_i L_2) & S(k_i L_2) & V[k_i(L_2-L_1)] & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Рішення рівняння (7) відносно  $k_i L$  дає змогу визначити власні частоти конструкції у непошкодженому стані

$$f_i = \frac{(k_i L)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (8)$$

Розглянемо локальне пошкодження на другому прольоті. У цьому випадку конструкція

моделюється у вигляді двох балок, з'єднаних перетином з підвищеною піддатливістю, розташованим на відстані  $L_c$  від лівого краю балки (рис. 1, б). Згідно з наведеною вище теорією для першої балки маємо

$$w_i^{(1)}(x) = B_{li} T(k_{ci} x) + D_{li} V(k_{ci} x); \quad (0 \leq x \leq L_1) \quad (9)$$

$$w_i^{(2)}(x) = B_{li} T(k_{ci} x) + D_{li} V(k_{ci} x) + \frac{R_1}{k_{ci}^3 EI} V[k_{ci}(x - L_1)]. \quad (L_1 \leq x \leq L_c) \quad (10)$$

Форми коливань для другої балки описуються наступним чином

$$w_i^{(3)}(x) = A_{2i} S(k_{ci} x) + B_{2i} T(k_{ci} x) + C_{2i} U(k_{ci} x) + D_{2i} V(k_{ci} x); \quad (L_c \leq x \leq L_2); \quad (11)$$

$$w_i^{(4)}(x) = A_{2i} S(k_{ci} x) + B_{2i} T(k_{ci} x) + C_{2i} U(k_{ci} x) + D_{2i} V(k_{ci} x) + \frac{R_2}{k_{ci}^3 EI} V[k_{ci}(x - L_2)]; \quad (L_2 \leq x \leq L). \quad (12)$$

Граничні умови на другій, третій та четвертій опорах та умови сумісності переміщень, кутів поворотів, згинальних моментів та поперечних сил у пошкодженій ділянці є наступними

$$w_i^{(1)}(L_1) = 0; \quad w_i^{(3)}(L_2) = 0;$$

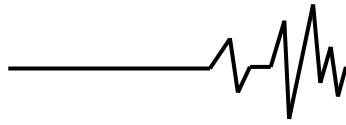
$$w_i^{(4)}(L) = 0; \quad M_i^{(4)}(L) = 0;$$

$$w_i^{(2)}(L_c) = w_i^{(3)}(L_c);$$

$$\theta_i^{(2)}(L_c) - \theta_i^{(3)}(L_c) = \delta_c M_i^{(2)}(L_c);$$

$$M_i^{(2)}(L_c) = M_i^{(3)}(L_c); \quad Q_i^{(2)}(L_c) = Q_i^{(3)}(L_c),$$

де  $\theta(x) = \partial w_i(x) / \partial x$  – кут повороту поперечного перерізу;



$M(x) = EI(\partial^2 w_i(x)/\partial x^2)$  - це згинальний момент;  $Q(x) = EI(\partial^3 w_i(x)/\partial x^3)$  - поперечна

сила;  $\delta_c$  - зміна піддатливості пошкодженої ділянки;  $k_{ci}^4 = \omega_{ci}^2 \rho A / EI$ .

В цьому випадку характеристичне рівняння буде мати наступний вигляд:

$T(k_{ci}L_1)$	$V(k_{ci}L_1)$	0	0	0	0	0	0	=0
0	0	$S(k_{ci}L_2)$	$T(k_{ci}L_2)$	$U(k_{ci}L_2)$	$V(k_{ci}L_2)$	0	0	
0	0	$S(k_{ci}L)$	$T(k_{ci}L)$	$U(k_{ci}L)$	$V(k_{ci}L)$	0	$V[k_{ci}(L-L_2)]$	
0	0	$U(k_{ci}L)$	$V(k_{ci}L)$	$S(k_{ci}L)$	$T(k_{ci}L)$	0	$T[k_{ci}(L-L_2)]$	
$T(k_{ci}L_c)$	$V(k_{ci}L_c)$	$-S(k_{ci}L_c)$	$-T(k_{ci}L_c)$	$-U(k_{ci}L_c)$	$-V(k_{ci}L_c)$	$V[k_{ci}(L_c-L_1)]$	0	=0
$-S(k_{ci}L_c)$	$-U(k_{ci}L_c)$	$V(k_{ci}L_c)$	$S(k_{ci}L_c)$	$T(k_{ci}L_c)$	$U(k_{ci}L_c)$	$-U[k_{ci}(L_c-L_1)]$	0	
$-\xi V(k_{ci}L_c)$	$-\xi T(k_{ci}L_c)$					$-\xi T[k_{ci}(L_c-L_1)]$		
$V(k_{ci}L_c)$	$T(k_{ci}L_c)$	$-U(k_{ci}L_c)$	$-V(k_{ci}L_c)$	$-S(k_{ci}L_c)$	$-T(k_{ci}L_c)$	$T[k_{ci}(L_c-L_1)]$	0	
$U(k_{ci}L_c)$	$S(k_{ci}L_c)$	$-T(k_{ci}L_c)$	$-U(k_{ci}L_c)$	$-V(k_{ci}L_c)$	$-S(k_{ci}L_c)$	$S[k_{ci}(L_c-L_1)]$	0	(13)

де  $\xi = k_{ci} \delta_c EI$ .

Рішення характеристичного рівняння (13) відносно  $k_{ci}L$  дозволяє визначити власні частоти пошкодженої конструкції

$$f_{ci} = \frac{(k_{ci}L)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (14)$$

Таким же чином було отримано характеристичне рівняння для випадку локального пошкодження на третьому прольоті. Заради стислості це рівняння тут не наведено.

У розрахунках форм коливань та власних частот мосту Z24 значення для площі та моменту інерції перерізу, були, відповідно,  $A=3,448 \text{ м}^2$  та  $I=0,543 \text{ м}^4$ . Значення густини та модуля пружності залізобетону становили, відповідно,  $\rho=2580 \text{ кг/м}^3$  та  $E=3,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Перші чотири форми поперечних коливань були обчислені згідно рівнянь (4)-(6) і показані на рис. 2. Вони відповідають формам коливань мосту Z24, отриманим в результаті вібраційних досліджень [12]. Деяка різниця між обчисленими ( $f_1=3,86 \text{ Гц}$ ;  $f_2=10,31 \text{ Гц}$ ;  $f_3=13,81 \text{ Гц}$ ;  $f_4=16,38 \text{ Гц}$ ) і експериментальними ( $f_1=3,86 \text{ Гц}$ ;  $f_2=9,76 \text{ Гц}$ ;  $f_3=10,30 \text{ Гц}$ ;  $f_4=12,46 \text{ Гц}$ ) власними частотами коливань мосту може

Піддатливість поперечного перерізу з тріщиною визначалася на основі теорії лінійної механіки руйнування. Для лінійно-пружного матеріалу (наприклад, бетону [13]) зміну енергії деформацій внаслідок виникнення крайової поперечної тріщини нормального відриву з прямим фронтом можна виразити через коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I$  наступним чином [14]

$$\Delta U = \frac{b_0(1-\nu^2)}{E} \int_0^a K_I^2 d\alpha, (0 \leq a \leq h_1) \quad (15)$$

полягати в тому, що жорсткість опор в моделі є нескінченно великою, що робить модельований міст більш жорстким, ніж реальний.

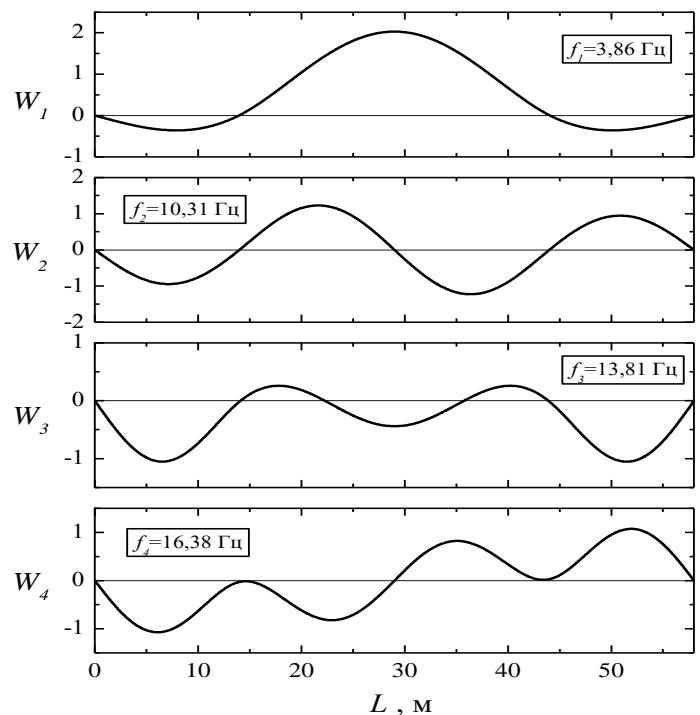


Рис. 2. Форми коливань мосту Z24

$$\Delta U = \frac{(1-\nu^2)}{E} \left( b_0 \int_0^{h_1} K_I^2 d\alpha + 3b_1 \int_{h_1}^a K_I^2 d\alpha \right), (h_1 \leq a \leq 0.6h) \quad (16)$$

де  $a$  - глибина тріщини;  $b_0$  - ширина фронту тріщини;  $b_1$  - ширина внутрішньої стінки поперечного перерізу (рис. 3);  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона.

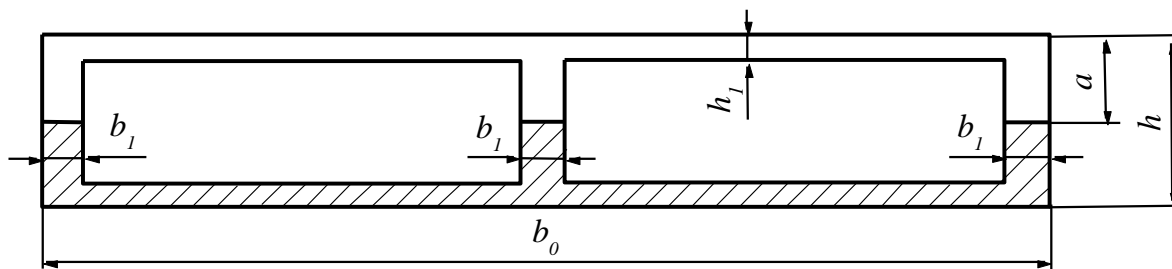
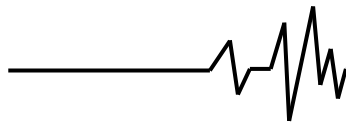


Рис. 3. Поперечний переріз мосту Z24 з крайовою тріщиною.

У той же час зміну енергії деформації поперечного перерізу з тріщиною можна виразити через зміну піддатливості цього перерізу  $\delta_c$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \delta_c M^2, \quad (17)$$

де  $M$  - згинальний момент у пошкодженому поперечному перерізі.

Для крайової тріщини з прямим фронтом при згинанні балки коефіцієнт інтенсивності напружень визначається за такою формулою [14]

$$K_I = F_I \frac{M}{W} \sqrt{\pi a}, \quad (18)$$

де

$F_I = 1,122 - 1,40\gamma + 7,33\gamma^2 - 13,08\gamma^3 + 14,0\gamma^4$  ;  
 $\gamma = a/h < 0,6$ ;  $W$  - момент опору поперечного перерізу. У випадку, що розглядається,

$$\beta_\gamma = 0,6294 - 1,0472 \gamma + 4,6021 \gamma^2 - 9,9751 \gamma^3 + 20,2948 \gamma^4 - 32,9933 \gamma^5 + 47,0408 \gamma^6 - 40,6933 \gamma^7 + 19,6\gamma^8;$$

$$\beta_h = 0,6294 - 1,0472 \frac{h_1}{h} + 4,6021 \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 - 9,9751 \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 + 20,2948 \left(\frac{h_1}{h}\right)^4 - 32,9933 \left(\frac{h_1}{h}\right)^5 + 47,0408 \left(\frac{h_1}{h}\right)^6 - 40,6933 \left(\frac{h_1}{h}\right)^7 + 19,6 \left(\frac{h_1}{h}\right)^8.$$

При розрахунках власних частот коливань мосту Z24 були прийняті наступні параметри конструкції та властивості залізобетону:  $L=58$  м;  $L_1=14$  м;  $L_2=44$  м;  $h=1,1$  м;  $h_1=0,2$  м;  $b_0=6,08$  м;  $b_1=0,5$  м;  $A=3,482$  м<sup>2</sup>;  $I=0,543$  м<sup>4</sup>;  $W=0,852$  м<sup>3</sup>;  $E=32$  ГПа;  $\rho=2580$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu=0,18$ .

Спочатку було досліджено вплив розміру тріщини на власні частоти конструкції.

$W=0,852$  м<sup>3</sup>.

Рівняння (15)-(18) дозволяють отримати формули для розрахунку зміни піддатливості пошкодженого перерізу

$$\delta_c = \frac{2\pi N_c a^2 b_0 (1-\nu^2)}{E_c \cdot W^2} \beta_\gamma, \quad (0 \leq a \leq h_1); \quad (19)$$

$$\delta_c = \frac{2\pi N_c (1-\nu^2)}{E_c \cdot W^2} [b_0 h_1^2 \beta_h + 3b_1 (a^2 \beta_\gamma - h_1^2 \beta_h)], \quad (h_1 \leq a \leq 0,6h), \quad (20)$$

де  $N_c$  - кількість тріщин, яка моделює розтріскування бетону [15];  $E_c$  - модуль пружності пошкодженої ділянки;  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона бетону (при розрахунках було прийнято, що  $\nu=0,18$  [4]);

Як видно з рис. 4, навіть відносно глибока тріщина ( $a/h=0,4$ ), розташована в найбільш напруженій зоні конструкції, викликає незначне зниження власних частот мосту Z24: до 4,8% для частоти першої форми коливань, і до 4,2% - для другої.

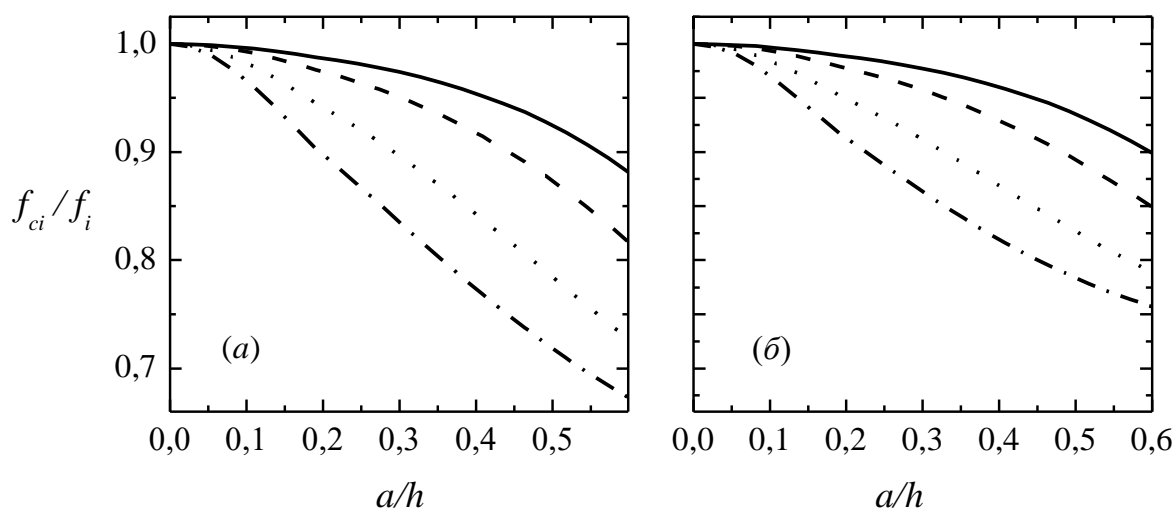
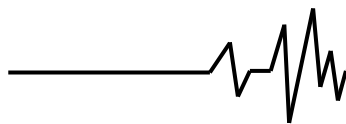


Рис. 4. Залежність власних частот першої (а,  $L_c/L=0,5$ ) і другої (б,  $L_c/L=0,375$ ) форми коливань мосту Z24 від глибини тріщини при різній кількості тріщин: суцільна лінія –  $N_c=1$ ; штрихова лінія –  $N_c=2$ ; пунктирна лінія –  $N_c=5$ ; штрихпунктирна лінія –  $N_c=10$ .

Особливість пошкодження бетонних конструкцій полягає у формуванні множинних відносно неглибоких тріщин [15]. Такий тип пошкоджень значно збільшує інтенсивність зміни власних частот, як це випливає з рис. 4. У випадку 10 тріщин зміна власних частот перших двох форм коливань досягає 33,2 та 18,4% відповідно ( $a/h=0,4$ ). Очевидно, що необхідність врахування фактора багатотріщинності у бетоні значно ускладнює вирішення зворотної задачі вібраційної діагностики пошкоджень (знаходження параметрів тріщини/тріщин за відомими вібраційними характеристиками).

На власні частоти також впливає згинальний момент у пошкодженому перерізі: чим вище його значення, тим інтенсивніше змінюються власні частоти. І навпаки: пошкодження, розташоване в слабконапружених ділянках конструкції, практично неможливо діагностувати за зміною частоти, оскільки ця зміна буде в межах похибки вимірювання. Це пояснює різну інтенсивність відносної зміни власних частот по відношенню до місця розташування пошкодження (рис. 5).

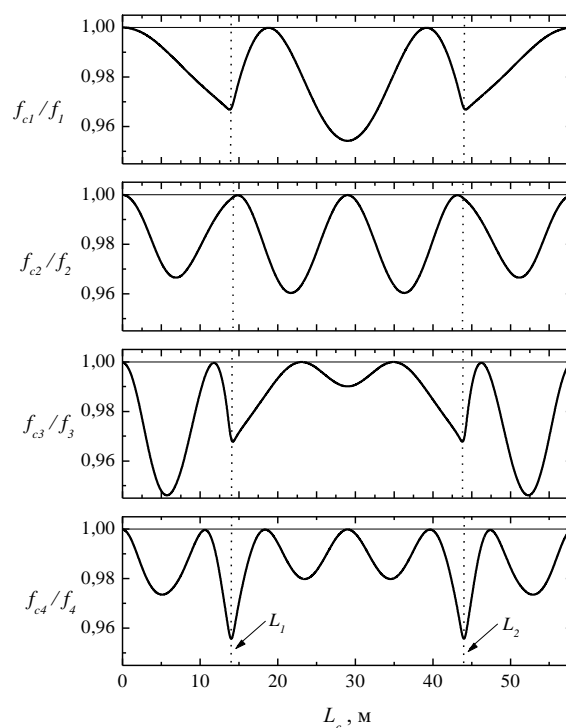


Рис. 5. Залежність власних частот мосту Z24 від місця розташування тріщини ( $a/h=0,4$ ;  $N_c=1$ ).

Слід зазначити, що зміна власних частот залежить не лише від параметрів пошкодження (розміру та місця розташування), а й від ряду факторів навколишнього середовища, таких як температура, вплив якої, як це було продемонстровано в огляді літератури, робить вібраційну діагностику проблематичною.

Розрахунки на основі вищенаведеної моделі показали, що зниження температури в

діапазоні  $-20...50^{\circ}\text{C}$  спричиняє збільшення модуля пружності бетону до 37% і, отже, збільшення власних частот моделі мосту Z24 до 17%. Таке збільшення модуля пружності бетону є реальним, оскільки воно був зафіксовано експериментально [4]. У багатьох випадках зміна власних частот до 17%, спричинена впливом температури, є набагато вищою, ніж зумовлена пошкодженням, що робить вібродіагностику



неможливою.

Однак можна усунути вплив факторів навколишнього середовища, таких як температура, на вібраційні характеристики пошкодження. Для цього необхідно використати зміну співвідношення власних частот різних форм коливань. З рівнянь (8) і (14) видно, що хоча значення власних частот конструкції у непошкодженому чи пошкодженому стані залежить від температури (через залежність від температури модуля пружності і густини матеріалу), співвідношення частот  $i$  і  $j$  форм коливань  $f_{ij} = k_i^2 / k_j^2$  і  $f_{cij} = k_{ci}^2 / k_{cj}^2$  від температури не залежать (а також від інших експлуатаційних факторів).

В подальшому використовується нормоване значення зміни співвідношення власних частот різних форм коливань, а саме:

$$f_{ij}^{norm} = \frac{f_{ci} / f_i}{f_{cj} / f_j}, \quad (21)$$

Нормалізація відбувається відносно значення відношення частот коливань конструкції у непошкодженому стані. Для непошкодженої конструкції  $f_{ij}^{norm} = 1$ .

Очевидно, що для цілей вібродіагностики пошкоджень необхідно мати початкове значення згаданих співвідношень для споруди в неушкодженному стані. Зміна співвідношення (21) вказує на виникнення та розвиток пошкоджень, а його абсолютне значення для різних форм коливань може використовуватися для оцінки параметрів пошкодження, тобто для вирішення зворотної задачі вібродіагностики.

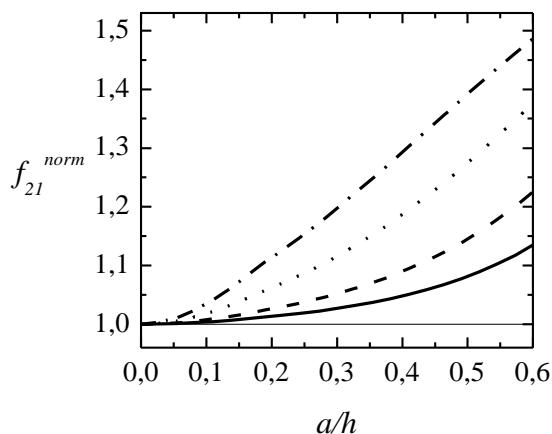


Рис. 6. Залежність нормалізованого співвідношення власних частот мосту Z24 від глибини тріщини при різній кількості тріщин: суцільна лінія –  $N_c=1$ ; штрихова лінія –  $N_c=2$ ; пунктирна лінія –  $N_c=5$ ; штрихпунктирна лінія –  $N_c=10$ .

Інтенсивність зміни нормованого відношення (21), визначена на основі другої та першої власної частоти (рис. 6), майже не відрізняється від відносної зміни цих частот (рис. 4). Максимальна зміна нормованого співвідношення досягає 5% у випадку однієї тріщини та 30,2% у випадку десяти тріщин глибиною  $a/h=0,4$ .

Як і відносна зміна власних частот, нормоване співвідношення частот суттєво залежить від місця розташування пошкодження (рис. 7). Максимальна зміна нормованого співвідношення для представлених випадків досягає 4,8% для значень  $f_{21}^{norm}$  та  $f_{41}^{norm}$ ; мінімальна зміна спостерігається для нормованого співвідношення  $f_{43}^{norm}$  і сягає 3,0%. Незважаючи на відносно невелику зміну цих характеристик, вони не залежать від експлуатаційних факторів і реагують виключно на параметри пошкоджень.

Як видно з рис. 6, зони низької чутливості характеристики пошкодження не співпадають для різних форм коливань. Чотирьох форм коливань конструкції достатньо, щоб повністю взаємно перекрити зони низької чутливості характеристики пошкодження і тим самим значно підвищити надійність вібродіагностики пошкодження.

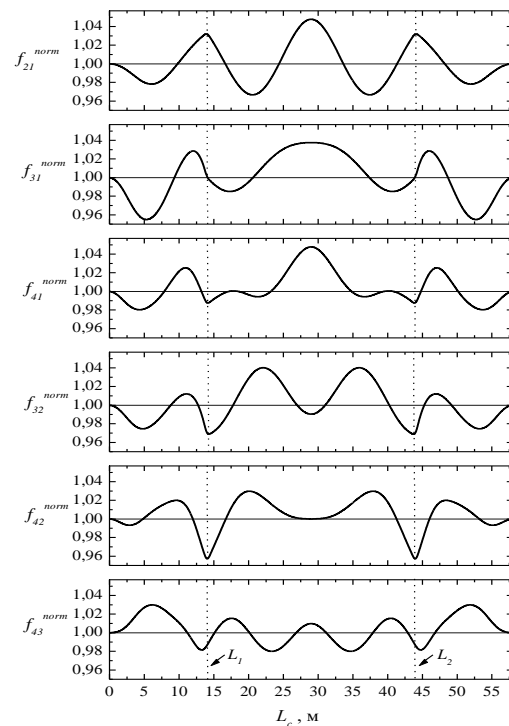


Рис. 7. Залежність нормалізованого співвідношення власних частот мосту Z24 від місця розташування тріщини ( $a/h=0,4$ ,  $N_c=1$ ).





Для перевірки можливості використовувати зміну співвідношення власних частот різних форм коливань в якості діагностичної ознаки пошкодження в змінних умовах навколишнього середовища були використані експериментальні дані спостережень протягом року за зміною власних частот мосту Z24, спочатку в непошкодженому

стані, а потім під час штучного створення пошкодження [12].

На рис. 8 показано, як під час спостережень змінювались нормовані співвідношення частот перших трьох форм коливань мосту. Пунктирною вертикальною лінією відмічено номер спостереження, що відповідає початковому етапу пошкодження.

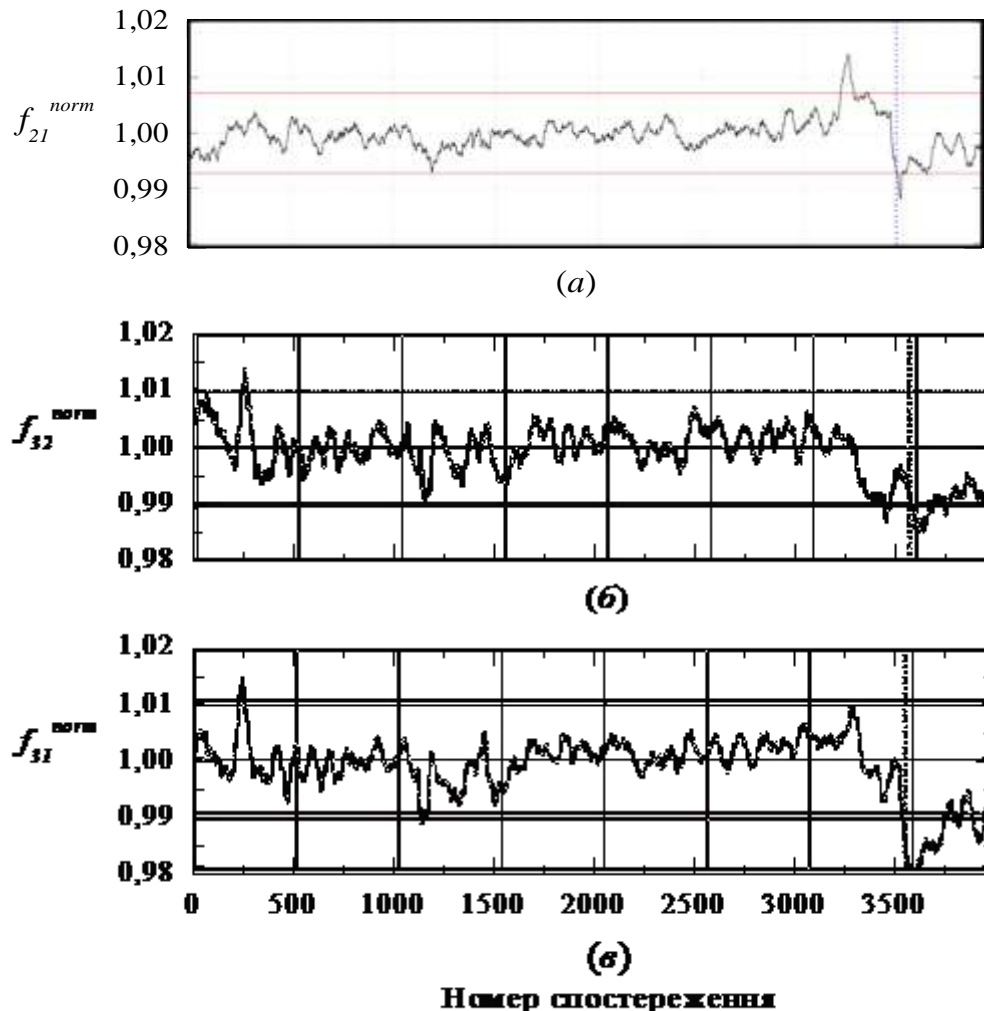


Рис. 8: Зміна нормалізованого співвідношення власних частот мосту Z24 за період спостережень [12].

На підставі цих експериментальних даних було оцінено параметри пошкодження, яке може спричинити зміни співвідношення частот, представлених на рис. 8. Для цього була використана запропонована у розділі 2 модель мосту Z24 з пошкодженням типу тріщини. В якості характеристики пошкодження були розглянуті нормовані співвідношення другої та першої ( $f_{21}^{norm}$ ), третьої та першої ( $f_{31}^{norm}$ ) та третьої та другої ( $f_{32}^{norm}$ ) власних частот.

Вихід нормованих характеристик на рис. 8 за межі довірчого інтервалу (показаний двома

горизонтальними лініями) може бути пояснений виникненням пошкоджень у вигляді зародження і розвитку набору тріщин. Зміна нормованих характеристик, що спостерігалася в експерименті [12] на початку штучного створення пошкодження, показана в табл. 1. Практично однакові зміни характеристики пошкодження можна отримати за допомогою моделі при різних сценаріях пошкодження, тобто різній глибині та кількості тріщин. З точки зору близькості експериментальних даних та результатів розрахунку найкраще усереднене розташування тріщин у цьому випадку становило  $L_c=41$  м.



Таблиця 1.

Результати експерименту та розрахунків нормованих співвідношень для моста Z24

Нормалізоване співвідношення	Експеримент (спостереження 3464)	Calculations ( $L_c=41$ м)				
		$N_c=1;$ $\gamma=0,49$	$N_c=2;$ $\gamma=0,38$	$N_c=3;$ $\gamma=0,31$	$N_c=5;$ $\gamma=0,22$	$N_c=10;$ $\gamma=0,16$
$f_{21}^{norm}$	0,993	0,992	0,991	0,992	0,992	0,991
$f_{31}^{norm}$	0,980	0,977	0,976	0,977	0,979	0,976
$f_{32}^{norm}$	0,986	0,985	0,985	0,985	0,986	0,984

Повернення нормованих характеристик в межі довірчого інтервалу в області спостереження 3665 не можна трактувати як відсутність пошкодження, оскільки в кінці випробувань конструкція дійсно була сильно пошкоджена: щонайменше десять тріщин було виявлено недалеко від третьої опори [15].

У табл. 2 показано, що такий сценарій можливий. Припустимо, що на початку виникло кілька тріщин з лівого боку від опори. Розвиток пошкодження в процесі навантаження відбувався за рахунок виникнення нових тріщин з правого боку опори. Тож осереднене місце розташування тріщин поступово зміщувалось праворуч. Результати розрахунків характеристик пошкодження, що

розглядаються, для випадку десяти тріщин відносної глибини  $\gamma=0,22$  (така ж глибина тріщини була використана в табл. 1 для випадку  $N_c=5$ ) та різних місць розташування тріщини, наведені в табл. 2. Як можна бачити,

нормалізоване співвідношення  $f_{21}^{norm}$  вище, ніж у спостереженні 3464 (табл. 1) при всіх значеннях місця розташування тріщини у діапазоні  $L_c=44...46$  м. Збільшення нормованих співвідношень  $f_{31}^{norm}$  і  $f_{32}^{norm}$  відносно спостереження 3464 має місце, коли  $L_c$  перевищує 44,5 і 45 м, відповідно. Загалом результати розрахунків є найбільш близькими до даних експерименту для всіх розглянутих характеристик пошкодження при  $L_c=45$  м.

Таблиця 2.

Результати експерименту та розрахунків нормованих співвідношень для моста Z24

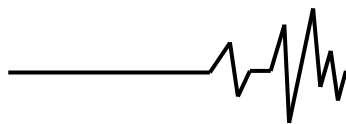
Нормалізоване співвідношення	Експеримент (спостереження 3464)	Calculations ( $N_c=10; \gamma=0,22$ )				
		$L_c=44$ м	$L_c=44,5$ м	$L_c=45$ м	$L_c=45,5$ м	$L_c=46$ м
$f_{21}^{norm}$	0,998	1,045	1,039	1,032	1,025	1,018
$f_{31}^{norm}$	0,988	0,958	0,994	1,019	1,034	1,039
$f_{32}^{norm}$	0,992	0,918	0,957	0,988	1,008	1,021

Таким чином, зсув вправо осередненого місця розташування тріщин в принципі може пояснити тенденцію експериментально отриманих даних для нормалізованої характеристики пошкодження.

**Висновки.** Вібраційна діагностика конструкційних пошкоджень на основі зміни співвідношення власних частот різних форм коливань набагато ефективніша, ніж традиційна вібраційна діагностика, заснована на зміні власних частот. Чутливість обох методів практично однакова. У той же час вібраційна характеристика пошкодження, запропонована в роботі, нечутлива до експлуатаційних факторів, вплив яких робить вібраційну діагностику проблематичною або навіть неможливою.

Надійність запропонованої вібраційної характеристики пошкодження прямо пропорційна кількості використовуваних форм коливань. Дослідження продемонструвало, що для надійного виявлення докритичних пошкоджень у такій конструкції, як міст Z24, достатньо даних про власні частоти перших чотирьох форм коливань.

Характерною особливістю пошкодження залізобетонних конструкцій є виникнення множинних тріщин. У цьому випадку кількість локально розташованих тріщин є третім фактором, поряд із розміром та місцем розташування пошкодження, що необхідно враховувати при вирішенні зворотної задачі вібродіагностики.



Безпосереднє порівняння експериментальних даних для мосту Z24, з результатами розрахунків зміни співвідношення власних частот перших чотирьох форм коливань продемонструвало здатність запропонованої вібраційної характеристики пошкодження виявляти відносно невеликі локальні пошкодження в доволі складних і великогабаритних конструкціях.

#### Список використаних джерел

1. Krämer C., De Smet C.A.M., De Roeck G. Z24 bridge damage detection. *Proc. of IMAC XVII, Kissimmee, Florida, USA*. 1999. P. 1023–1029.
2. Moser P., Moaveni B. Environmental effects on the identified natural frequencies of the Dowling Hall Footbridge. *Mechanical systems and signal processing*. 2011. V. 25, P. 2336–2357.
3. Cross E.J., Koo K.Y., W.Brownjohn J.M., Worden K. Long-term monitoring and data analysis of the Tamar Bridge. *Mechanical systems and signal processing*. 2013. V. 35, P. 16–34.
4. Samir N. Shoukry, Gergis W. William, Mourad Y. Riad. Effect of moisture and temperature on the mechanical properties of concrete. *Proc. of the SEM Annual Conference, Albuquerque, New Mexico, USA*. 2009. P. 1–9.
5. Farrar C.R., Doebling S.W., Cornwell P.J. Variability of modal parameters measured on the Alamosa Canyon Bridge. *Proc. of the 15<sup>th</sup> IMAC, Orlando, Florida, USA*. 1997. P. 257–263.
6. Peeters B., De Roeck G. One-year monitoring of the Z24-bridge: environmental effects versus damage events. *Earthquake engineering and structural dynamics*. 2001. V. 30, № 2, P. 149–171.
7. Kim C., Jung D., Kim N. Effect of vehicle weight on natural frequencies of bridges measured from traffic-induced vibration. *Earthquake engineering*. 2003. V. 2, № 1, P. 109–115.
8. Farrar C.R., Worden K. Structural health monitoring: a machine learning perspective. John Wiley & Sons, Ltd, 2013.
9. Sinou J.J. Damage assessment based on the frequencies' ratio surfaces intersection method for the identification of the crack depth, location and orientation. *Structural durability and health monitoring*. 2007. V. 3, № 3, P. 134–162.
10. Maeck J., De Roeck G. Description of Z24 benchmark. *Mechanical systems and signal processing*. 2003. – V. 17, № 1, P. 127–131.
11. Ананьев И.А. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1946. 224 с.
12. Reynders E., De Roeck G. Vibration-based damage identification: the Z24 bridge benchmark. Berlin-Heidelberg: Springer, 2014.

13. Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation / editors G.C. Sih, A. Di Tommaso. Netherlands: Springer, 1985.

14. Stress intensity factors handbook. In 3 vol. Vol. I. / editor Y. Murakami. Japan: Pergamon Press, 1987.

15. Reynders E., De Roeck G. A local flexibility method for vibration-based damage localization and quantification. [Journal of sound and vibration](#). 2010. V. 329, № 12, P. 2367–2383.

#### References

1. Krämer C., De Smet C.A.M., De Roeck G. (1999). Z24 bridge damage detection. *Proc. of IMAC XVII, Kissimmee, Florida, USA*, 1023–1029.
2. Moser P., Moaveni B. (2011). Environmental effects on the identified natural frequencies of the Dowling Hall Footbridge. *Mechanical systems and signal processing*, 25, 2336–2357.
3. Cross E.J., Koo K.Y., W.Brownjohn J.M., Worden K. (2013). Long-term monitoring and data analysis of the Tamar Bridge. *Mechanical systems and signal processing*, 35, 16–34.
4. Samir N. Shoukry, Gergis W. William, Mourad Y. Riad. (2009). Effect of moisture and temperature on the mechanical properties of concrete. *Proc. of the SEM Annual Conference, Albuquerque, New Mexico, USA*, 1–9.
5. Farrar C.R., Doebling S.W., Cornwell P.J. (1997). Variability of modal parameters measured on the Alamosa Canyon Bridge. *Proc. of the 15<sup>th</sup> IMAC, Orlando, Florida, USA*, 257–263.
6. Peeters B., De Roeck G. (2001). One-year monitoring of the Z24-bridge: environmental effects versus damage events. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 30, 2, 149–171.
7. Kim C., Jung D., Kim N. (2003). Effect of vehicle weight on natural frequencies of bridges measured from traffic-induced vibration. *Earthquake engineering*, 2, 1, 109–115.
8. Farrar C.R., Worden K. (2013). Structural health monitoring: a machine learning perspective. John Wiley & Sons, Ltd.
9. Sinou J.J. (2007). Damage assessment based on the frequencies' ratio surfaces intersection method for the identification of the crack depth, location and orientation. *Structural durability and health monitoring*, 3, 3, 134–162.
10. Maeck J., De Roeck G. (2003). Description of Z24 benchmark. *Mechanical systems and signal processing*, 17, 1, 127–131.
11. Ananiev I.V. (1946). *Spravochnik po raschiotu sobstvennykh kolebaniy uprugih system [Handbook for calculation of natural vibrations of elastic systems]*. Moscov-Leningrad: Gostekhizdat. [in Russian].



12. Reynders E., De Roeck G. (2014). Vibration-based damage identification: the Z24 bridge benchmark. Berlin-Heidelberg: Springer.

13. Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation. (1985) / editors G.C. Sih, A. Di Tommaso. Netherlands: Springer.

14. Stress intensity factors handbook. In 3 vol. Vol. I. (1987) / editor Y. Murakami. Japan: Pergamon Press.

15. Reynders E., De Roeck G. (2010). A local flexibility method for vibration-based damage localization and quantification. *Journal of sound and vibration*, 329, 12, 2367–2383.

### DIAGNOSTICS OF STRUCTURAL DAMAGE BASED ON THE NATURAL FREQUENCIES RATIO CHANGE

The problems of vibration diagnostics based on the change of natural frequencies of structures are connected with the influence of ambient and operational factors (temperature, humidity, wind, heavy traffic etc.) on the natural frequencies. In some cases, this effect is comparable with the effect of damage itself and reliable diagnostics of damage becomes problematic. To solve this problem, the use of the ratio change between natural frequencies of different mode shapes is proposed as a characteristic of damage. The study has demonstrated that this ratio is unaffected by the environmental and operational factors. Application of the proposed method is illustrated using the example of Z24 reinforced concrete bridge. As the characteristic feature of the reinforced concrete structures damage is the occurrence of multiple cracks, in the analytical model, apart from the size and location of the cracks, the possibility of several locally located cracks was taken into account. The analytical study was performed to calculate the mode shapes and natural frequencies of damaged multi-span beam-like structure. The results reveal that, in order to identify local damage of subcritical size, natural frequency data of at least four modes of vibration are necessary. The eigenfrequencies obtained experimentally in the study of the Z24 bridge were used to confirm that the change in the eigenfrequency ratio can be used to diagnose relatively small local defects in complex structures. At this the reliability of such vibration diagnostics is much higher than based on the change of natural frequencies and mode shapes, since the change in the ratio of natural frequencies does not depend on the environmental conditions and operating conditions of the structure.

**Keywords:** vibration diagnostics, local damage, environmental conditions, operational conditions, natural frequencies ratio; bridge structures.

### ДИАГНОСТИКА КОНСТРУКЦИОННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИЗМЕНЕНИЯ СООТНОШЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Проблемы вибрационной диагностики, основанные на изменении собственных частот сооружений, связаны с влиянием условий окружающей среды и эксплуатации (температура, влажность, ветер, интенсивное движение и т.п.) на собственные частоты. В некоторых случаях это влияние является сопоставимым с влиянием повреждения, поэтому надежная диагностика повреждений становится проблематичной. Для решения этой проблемы предлагается в качестве характеристики повреждения использование изменения соотношения собственных частот различных форм колебаний. Исследование показало, что на это соотношение не влияют условия окружающей среды и эксплуатации. Применение предлагаемого способа проиллюстрировано на примере железобетонного моста Z24. Поскольку характерной особенностью повреждения железобетонных конструкций является возникновение множественных трещин, в аналитической модели кроме размера и местоположения трещины были учтены и возможность возникновения нескольких локально расположенных трещин. Аналитическое исследование было проведено для расчета собственных форм частот колебаний многопролетной балочной конструкции с повреждением. Было продемонстрировано, что для выявления локального повреждения докритического размера необходимы данные о собственных частотах по меньшей мере четырех форм колебаний. Собственные частоты, полученные экспериментально при исследовании моста Z24, были использованы для подтверждения того, что изменение соотношения собственных частот может быть использована для диагностики относительно небольших локальных повреждений в сложных конструкциях. При этом надежность такой вибродиагностики намного выше, чем основанной на изменении собственных частот и форм колебаний, поскольку изменение соотношения собственных частот не зависит от условий окружающей среды и условий эксплуатации конструкции.

**Ключевые слова:** вибрационная диагностика, локальные повреждения, условия окружающей среды, эксплуатационные условия, соотношение собственных частот; мостовые сооружения.

**Відомості про авторів**

**Бовсуновський Анатолій Петрович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри машин і апаратів харчових та фармацевтичних виробництв Національного університету харчових технологій (вул. Володимирська, 68, м. Київ, Україна, 01601; e-mail: [apbovsunovsky@gmail.com](mailto:apbovsunovsky@gmail.com)).

**Бовсуновский Анатолий Петрович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры машин и аппаратов пищевых и фармацевтических производств Национального университета пищевых технологий (ул. Владимирская, 68, г. Киев, Украина, 01601; e-mail: [apbovsunovsky@gmail.com](mailto:apbovsunovsky@gmail.com)).

**Bovsunovsky Anatoliy Petrovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Department of Machines and Apparatus for Food and Pharmaceutical Production, National University of Food Technologies (Volodymyrska str., 68, Kyiv, Ukraine, 01601; e-mail: [apbovsunovsky@gmail.com](mailto:apbovsunovsky@gmail.com)).

**Сураче Чечілія** – доктор філософії, професор, відділ конструкційної, геотехнічної і будівельної інженерії, Туринський Політех (пр-т герцога Абрुцці, 24, Турин, Італія, 10129; e-mail: [cecilia.surace64@gmail.com](mailto:cecilia.surace64@gmail.com)).

**Сураче Чечилия** – доктор философии, профессор, отдел конструкционной, геотехнической и строительной инженерии, Туринский Политех (пр-т герцога Абрुцци, 24, Турин, Италия, 10129; e-mail: [cecilia.surace64@gmail.com](mailto:cecilia.surace64@gmail.com)).

**Surace Cecilia** – Philosophy Doctor, Professor, Department of Structural Geotechnical and Building Engineering, Politecnico di Torino (Corso Duca degli Abruzzi 24, Torino, Italy, 10129; e-mail: [cecilia.surace64@gmail.com](mailto:cecilia.surace64@gmail.com)).