

**Ольшанський В.П.**

д. ф.-м. н., професор

Ольшанський С.В.

к. ф.-м. н.

*Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені П. Василенка*

Токарчук О.А.

к.т.н., доцент

*Вінницький національний
аграрний університет*

Olshansky V.**Olshansky S.**

*Kharkiv Petro Vasilenko
National Technical
University of Agriculture*

Tokarchuk O.

*Vinnitsia National Agrarian
University*

УДК 534.1:539.3**DOI: 10.37128/2306-8744-2020-1-6**

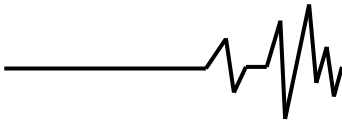
ПРО КОЛИВАННЯ, ЯКІ ОПИСУЄ УЗАГАЛЬНЕНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РЕЛЕЯ

В статті розглянуто рух коливальної системи з одним ступенем вільності, описаний узагальненим диференціальним рівнянням Релея. Узагальнення досягнуто заміною кубічного доданку, що виражає дисипативну силу в рівнянні руху, на степеневий доданок з довільним додатнім показником. До дослідження коливального процесу залучено метод енергетичного балансу. Користуючись ним, складено наближене диференціальне рівняння обвідної графіка коливального процесу і побудовано його аналітичний розв'язок, з якого випливає, що квазілінійні фрикційні автоколивання можливі лише тоді, коли показник степеня більший одиниці. Від значення показника залежить і значення амплітуди автоколивань в усталеному режимі. Виведено компактну формулу для обчислення цієї амплітуди. В загальному випадку обчислення пов'язане з використанням таблиці гама-функції. У випадку, коли показник степеня дорівнює трьом амплітуда виявилась такою, як і в асимптотичному розв'язку рівняння Релея, який побудував Стокер. Амплітуда не залежить від початкових умов. Автоколивання неможливі, якщо показник степеня менший або дорівнює одиниці, бо, в залежності від початкового відхилення системи, відбувається або розгойдування коливань (проходить втрата стійкості) або спадання розмахів до нуля з обмеженою кількістю циклів, що зазвичай спостерігається при вільних коливаннях осцилятора з сухим тертям. Ці властивості коливальної системи підтверджено також чисельним комп'ютерним інтегруванням диференціального рівняння руху для конкретних вхідних даних. У середовищі Maple побудовано траєкторії руху осцилятора при різних значеннях показника нелінійності в виразі сили в'язкого опору та проведено відповідний порівняльний аналіз, чим підтверджено адекватність наближених аналітичних розв'язків.

Ключові слова: квазілінійні автоколивання, узагальнене рівняння Релея, метод енергетичного балансу, чисельне інтегрування задачі Коші.

Вступ. Автоколивання це поширений варіант циклічної зміни у часі параметрів руху різних систем, спричинений неколивальним джерелом енергії. З ними мають справу в акустиці, електро- і радіотехніці, механіці, металообробці, сільськогосподарському виробництві, тощо. Отже, важливо знати закономірності автоколивань, в моделюванні яких важливу роль відіграє рівняння Релея.

Огляд літературних джерел і постановка проблеми. Автоколивання є різновидом нелінійних коливань. Тому в нелінійній динаміці, як правило, приділяють автоколиванням належну увагу. Це спостерігається на протязі тривалого часу [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Крім того, автоколиванням присвячені окремі видання [7, 8, 9] та ін. В останні роки розроблену теорію використовують для розв'язання різних



інженерних задач. Так викладений в [5] найпростіший варіант теорії, коли приймається миттєва зміна значення коефіцієнта тертя, було використано в [10], при дослідженні автоколивань скребкового конвеєра. Подальше узагальнення ця теорія одержала в публікаціях [11, 12]. Відома теорія квазілінійних автоколивань, викладена в [5], була застосована в [13] для аналізу роботи вібраційної розпушувальної лапи культиватора. На відміну від вказаних публікацій, тут розглядаємо коливальний рух, який описує узагальнене диференціальне рівняння Релея. Класичне рівняння Релея мало кубічну нелінійність у виразі дисипативної сили і відіграло важливу роль в моделюванні автоколивань у електро- і радіотехніці [4, 14]. Тут розглядаємо його більш загальний варіант, що має степеневу нелінійність з додатнім показником степеня.

Метою роботи є дослідження можливості використання узагальненого рівняння Релея для моделювання квазілінійних автоколивань та аналіз особливостей описаного ним руху.

Засобом досягнення поставленої мети беремо метод енергетичного балансу, який систематично використовували в [11, 12]. Для перевірки достовірності наближених розрахункових формул проводимо додатково чисельне комп'ютерне інтегрування

диференціального рівняння руху і подаємо результати у вигляді осцилограм.

Викладення основного матеріалу.

Будемо використовувати термінологію механіки, яку, при потребі, можна замінити на електротехнічну [4]. Переміщення системи $x(t)$, як функцію часу t , описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} - k_1\dot{x} + k_2|\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (1)$$

в якому m – маса осцилятора; $k_1 > 0, k_2 > 0$ – коефіцієнти опору; $v \geq 0$ – показник нелінійності; c – коефіцієнт пружності; крапка над x означає похідну за часом t .

При $v=3$ рівняння (1) переходить у відоме рівняння Релея [4, 14].

В роботі [15] розглянуто вільні коливання осцилятора, описані диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2|\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = 0.$$

Воно лише знаком перед k_1 відрізняється від (1). Тому далі скористаємося результатами роботи [15]. У відповідності до неї, тепер:

$$x(t) \approx a(t) \cos(\omega t); \quad (2)$$

$$a(t) = \begin{cases} \left[b + (a_0^{1-v} - b) e^{\lambda_1(v-1)t} \right]^{\frac{1}{1-v}} & v \neq 1 \\ a_0 = a_0 \exp\left(\frac{k_1 - k_2}{2m} t\right) & v = 1; \end{cases} \quad \text{при} \quad (3)$$

$$\omega = \sqrt{c/m}; \quad b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad \lambda_1 = \frac{k_1}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{k_2 \omega^{v+1}}{\pi c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}$$

$a_0 = a(0)$ – початкове відхилення системи від положення рівноваги; $\Gamma(z)$ – гама функція.

1. Розглянемо коливальний рух, який описують вирази (2), (3) при $v > 1$. У цьому випадку:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda(1-v)t} = 0; \quad a_* = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = b^{\frac{1}{1-v}},$$

незалежно від a_0 . Якщо $a_0 > b^{\frac{1}{1-v}} = a_*$, то виконується нерівність $a(t) > a_*$. При $a_0 < a_*$

має місце $a(t) < a_*$. Отже, в залежності від співвідношення між a_0 і a_* , розмахи коливань асимптотично прямують зверху або знизу до значення амплітуди усталеного циклу a_* , яка подається формулою:

$$a_* = \left[2 \frac{k_2}{k_1} \frac{\omega^{v-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{1-v}}. \quad (4)$$



Якщо $\nu=3$; $\omega=1 \text{ с}^{-1}$; $\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{3} \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$; то

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2}; \Gamma(3) = 2 \text{ і } a_* = 2 \text{ м, тобто } a_*$$

таке як в асимптотичному розв'язку в [14]. Таким чином, при $\nu > 1$ рівняння (1) і вирази (2) і (3) описують квазілінійні автоколивання, що мають в усталеному режимі амплітуду a_* , яка не залежить від a_0 .

Розглянемо приклад. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 1 \text{ кг}$; $k_1 = 10 \text{ Нс/м}$; $k_2 = 0,8 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$; $\nu = 2$; $c = 3600 \text{ Н/м}$. Для цих даних: $\omega = 60 \text{ с}^{-1}$;

$\Gamma(2)=1$; $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2}$. Тоді по формулі (4)

одержуємо $a_* \approx 0,0491 \text{ м}$. Період усталеного циклу коливань становить $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0,1047 \text{ с}$.

При $a_0 = 0,01 \text{ м}$ перехідний процес буде мати наростаючі розмахи коливань, а при $a_0 = 0,08 \text{ м}$ – вони будуть спадати з плином часу t . Це підтверджують графіки коливального процесу, одержані числовим комп'ютерним інтегруванням рівняння (1), які подано на рис. 1 і рис. 2.

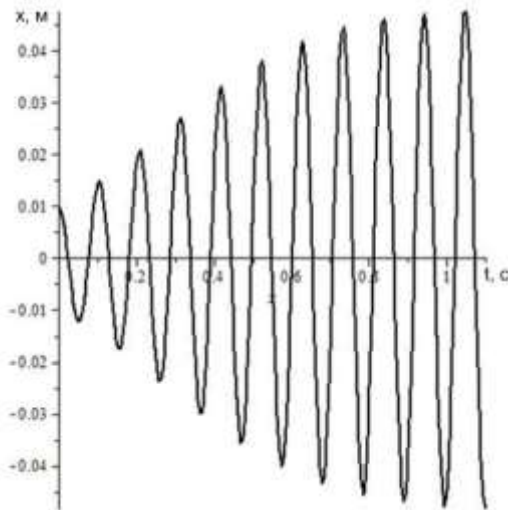


Рис. 1. Графік автоколивань при $\nu = 2$, $a_0 = 0,01 \text{ м}$

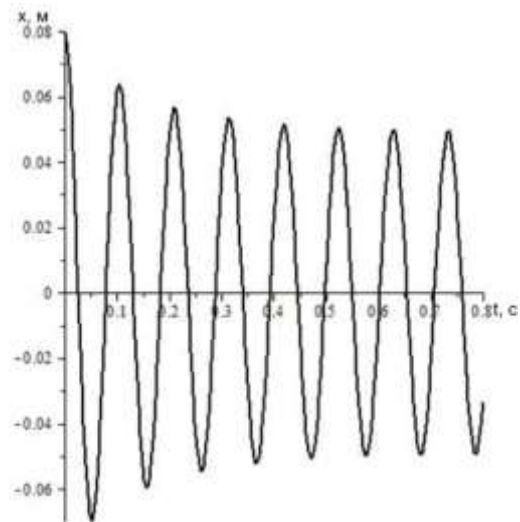


Рис. 2. Графік автоколивань при $\nu = 2$, $a_0 = 0,08 \text{ м}$

Щоб одержати інформацію про похибки формули (3) в табл. 1 і табл. 2 наведено значення максимумів відхилень осцилятора від положення рівноваги і час їх досягнення, обчислені по формулі (3) і комп'ютерним

інтегруванням рівняння (1). Значення піків в табл. 1 одержано при $a_0 = 0,01 \text{ м}$, а в табл. 2 – при $a_0 = 0,08 \text{ м}$. Позначка * відноситься до результатів чисельного інтегрування.

Таблиця 1.

Значення $\max x(t)$, при $a_0 = 0,01 \text{ м}$

i	$10t = \frac{20i\pi}{\omega}, \text{ с}$	$10^2 a(t), \text{ м}$	$10t_*, \text{ с}$	$10^2 x(t_*), \text{ м}$
1	1,0472	1,481	1,0488	1,482
2	2,0944	2,070	2,0971	2,072
3	3,1416	2,708	3,1448	2,711
4	4,1888	3,314	4,1921	3,317
5	5,2360	3,820	5,2395	3,824
6	6,2832	4,199	6,2869	4,204
7	7,3304	4,462	7,3344	4,467
8	8,3776	4,634	8,3821	4,638
9	9,4248	4,742	9,4298	4,747
10	10,472	4,809	10,478	4,813



Розбіжність результатів розрахунку не суттєві. Якщо результати числового інтегрування, тобто значення $x(t_*)$ вважати умовно точними, то приходимо до висновку, що

метод енергетичного балансу, яким виведена в [15] формула (3), теж дає задовільні результати. Похибка менша одного відсотка.

Таблиця 2.

Значення $\max x(t)$, при $a_0 = 0,08$ м

i	$10t = \frac{20i\pi}{\omega}$, с	$10^2 a(t)$, м	$10t_*$, с	$10^2 x(t_*)$, м
1	1,0472	6,366	1,0509	6,364
2	2,0944	5,679	2,0998	5,679
3	3,1416	5,338	3,1482	5,339
4	4,1888	5,154	4,1965	5,156
5	5,2360	5,051	5,2444	5,054
6	6,2832	4,992	6,2923	4,995
7	7,3304	4,958	7,3403	4,961
8	8,3776	4,938	8,3882	4,941
9	9,4248	4,926	9,4361	4,930
10	10,472	4,919	10,484	4,923

2. У випадку, коли $\nu=1$ рівняння (1) може моделювати три варіанти руху. При $k_1 < k_2$ воно описує вільні затухаючі коливання, де зменшення розмахів відбувається за законом геометричної прогресії, а коливальний процес не обмежений у часі. Якщо $k_1 > k_2$, то згідно з (3),

відбувається розгойдування коливань, підпорядковане експоненціальному закону, тобто спостерігається втрата стійкості системи. При $k_1 = k_2$ маємо вільні незатухаючі коливання зі сталою амплітудою a_0 .

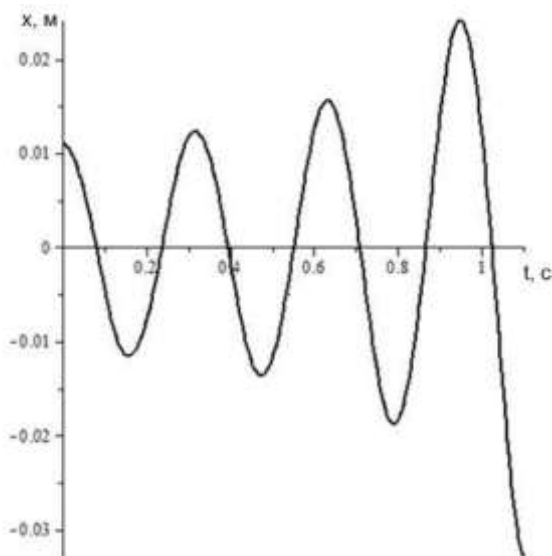


Рис. 3. Графік коливань при $\nu = 0,5$, $a_0 = 0,011$ м

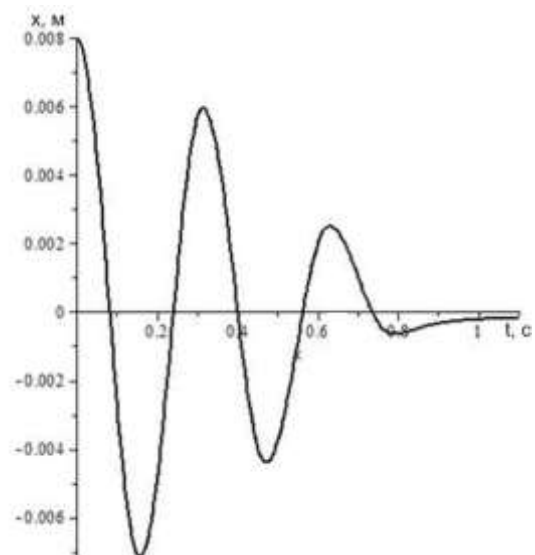


Рис. 4. Графік коливань при $\nu = 0,5$, $a_0 = 0,008$ м

3. Розглянемо далі більш детально випадок, коли $0 \leq \nu < 1$. Тепер у формулі (3)

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda(1-\nu)t} = \infty$. Отже, якщо $a_0 > b^{\frac{1}{1-\nu}} = a_*$, то, аналогічно попередньому випадку, маємо

втрата стійкості, бо $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$. При малому початковому відхиленні $a_0 < a_*$, з плином t , зменшується $a(t)$, тобто відбувається спадання розмахів коливань, але цей процес триває лише на проміжку $t \in (0; t^*)$, де



$$t^* = \frac{1}{\lambda_1(1-\nu)} \ln \frac{b}{b-a_0^{1-\nu}} \dots\dots\dots(5)$$

Таким чином, процес вільних коливань складається з обмеженої кількості циклів, що властиво системам з сухим тертям, якщо немає тут при $\nu > 0$. Сухе тертя є коли $\nu = 0$. Тоді вільні затухаючі коливання з обмеженою кількістю циклів можливі за умови, що:

$$\frac{F_T}{c} < a_0 < a_* = \frac{4 F_T}{\pi k_1 \omega} \dots\dots\dots(6)$$

де $F_T = k_2$ – сила сухого тертя. Такі коливання неможливі, якщо $a_0 > a_*$, бо система втрачає стійкість. Отже, при $0 \leq \nu < 1$ маємо вільні коливання, що залежать від початкових умов.

З метою апробації записаних формул розглянемо приклади. Для проведення розрахунків приймаємо: $m=1$ кг; $k_1=10$ Нс/м; $k_2=4$ Н(с/м)^{1/2}; $\nu=0,5$; $c=400$ Н/м. При таких вхідних даних: $\omega=20$ с⁻¹; $\Gamma(1,25) \approx 0,90640$; $\Gamma(1,75) \approx 0,91906$; $b=0,099535$ м^{1/2}; $a_* = 0,009907$ м. Значення гама-функції взяли з таблиці в [16]. При

$a_0 = 0,011$ м ($a_0 > a_*$) маємо розгойдування коливань (втрата стійкості), а при $a_0 = 0,008$ м ($a_0 < a_*$) – затухання коливань, що відображено на віброграмах коливань відповідно на рис. 3 і рис. 4. Віброграми одержані чисельним інтегруванням рівняння (1).

Розрахована по формулі (5) тривалість коливального руху становить $t^* \approx 0,915$ с, що узгоджується з віброграмою на рис. 4, де при $t > t^*$ $x(t)$ монотонно прямує до нуля.

Якщо $\nu=0$, $k_2 = F_T = 4$ Н, то, при збереженні решти вхідних даних, обчислене за формулою (6), $a_* = 0,02546$ м. Одержані для нього графіки коливань чисельним інтегруванням рівняння (1) зображено на рис. 5 і рис. 6.

На рис. 5 маємо втрату стійкості, бо він одержаний при $a_0 = 0,03$ м, тобто коли $a_0 > a_*$.

На рис. 6, який одержано при $a_0 = 0,024$ м, дія сили сухого тертя і «від'ємного в'язкого опору» призводить до затухаючих коливань з обмеженою кількістю циклів.

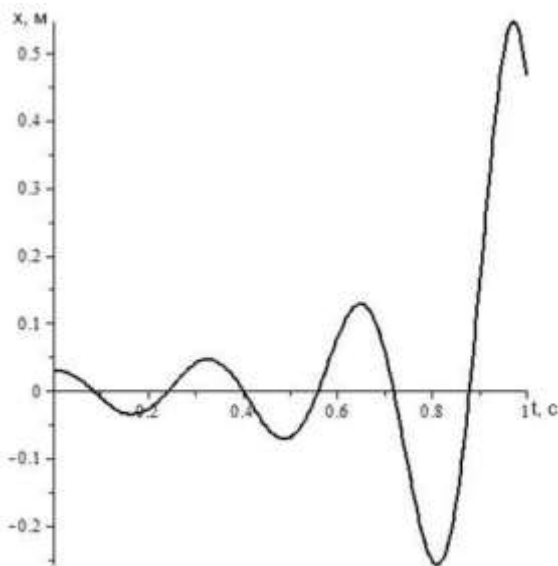


Рис. 5. Графік коливань при $\nu=0$, $a_0 = 0,03$ м

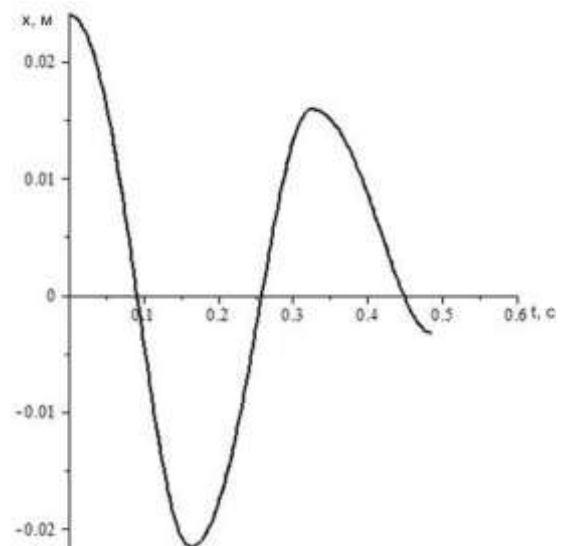


Рис. 6. Графік коливань при $\nu=0$, $a_0 = 0,024$ м

Висновки.

Дослідження показало, що узагальнене рівняння Релея в залежності від значення показника нелінійності у виразі сили опору, може описувати, як квазілінійні автоколивання з усталеним режимом, що не залежить від початкових умов, так і вільні коливання, з

обмеженою кількістю циклів до їх припинення. У другому випадку, в залежності від початкових умов, може проявлятися динамічна втрата стійкості, коли система стійка за малих збурень становиться нестійкою за «великих» збурень.

**Список використаних джерел**

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. Т. 1. 716 с.
2. Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 916 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва : Дрофа, 2004. 591 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва : Наука, 1974. 504 с.
5. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград : Машиностроение. 1976. 320 с.
6. Сурьянинов Н. Г., Дашченко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин. Одесса : ОГПУ, 2000. 306 с.
7. Костерин Ю. И. Механические автоколебания при сухом трении. Москва : Изд-во АН СССР, 1960. 76 с.
8. Лазарев Г. С. Автоколебания при резании металлов. Москва : Высшая школа, 1971. 244 с.
9. Крагельский И. В., Гиттис Н. В. Фрикционные автоколебания. Москва : Наука, 1987. 181 с.
10. Ловейкин В. С., Човнюк Ю. В., Костина О. Ю. Дослідження релаксаційних автоколивань з спрощеної характеристики тертя у скребкових конвеєрах при транспортуванні сипких матеріалів. Механізація сільськогосподарського виробництва : Вісник ХНТУСГ. 2013. Вип. 135. С. 328-335.
11. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тіщенко Л. М. та ін. Коливання дисипативних осциляторів. Харків : Міськдрук, 2015. 116 с.
12. Ольшанський В. П., Тіщенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків : Міськдрук, 2016. 264 с.
13. Войтюк Д. Г., Човнюк Ю. В., Гуменюк Ю. О., Гуцол А. П. Физико-механический анализ автоколебательных режимов работы вибрационной рыхлительной лапы культиватора. Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. 2012. № 2(66). С. 10-16.
14. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва : Изд-во иностр. литературы, 1953. 258 с.
15. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Вплив нелінійної складової в'язкого опору на тривалість вільних коливань осцилятора. Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. 2019. № 2. С. 41-47.
16. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с

формулами, графиками и математическими таблицами). М. : Наука, 1979. 832 с.

Список джерел у транслітерації

1. Avramov, K. V., Mikhlin, Yu. V. (2015). [Nelineynaya dinamika uprugikh sistem]. Nonlinear dynamics of elastic systems. Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Research. [in Russian].
2. Andronov, A. A., Vit, A. A., Khaikin, S. E. (1959). [Teoriya kolebaniy] Theory of oscillations. Moscow, State. Publishing House of Phys.-Math. literature. [in Russian].
3. Babakov I. M. (2004). Teoriya kolebaniy [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa. [in Russian].
4. Bogolyubov, N. N., Mitropolsky, Yu. A. (1974). [Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy] Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow, Nauka. [in Russian].
5. Panko, Ya. G. (1976). Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mechanical Engineering. [in Russian].
6. Suryaninov, N. G., Dashchenko, A. F., Belous, P. A. (2000). [Teoreticheskiye osnovy dinamiki mashin] Theoretical foundations of the dynamics of machines. Odessa, OGPU. [in Russian].
7. Kosterin, Yu. I. (1960). [Mekhanicheskiye avtokolebaniya pri sukhom trenii] Mechanical self-oscillations during dry friction. Moscow, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR. [in Russian].
8. Lazarev, G. S. (1971). [Avtokolebaniya pri rezanii metallov] Auto-oscillations during metal cutting. Moscow, Higher School. [in Russian].
9. Kragelsky, I. V., Gittis, N.V. (1987). [Friksionnyye avtokolebaniya] Frictional self-oscillations. Moscow, Nauka. [in Russian].
10. Loveykin, V. S., Chovnyuk, Yu. V., Kostina, O. Yu. (2013). [Doslidzhennya relaksatsiynykh avtokolyvan' z sproshchenoyi kharakterystyky tertya u skrebkovykh konveyerakh pry transportuvanni sypkyykh materialiv] Investigation of relaxation self-oscillations on the simplified characteristic of friction in scraper conveyors during transportation of bulk materials. *Mechanization of agricultural productions, Bulletin of KhNTUSG*. 135, 328–335. [in Ukrainian].
11. Olshanskiy, V. P., Olshanskiy, S. V. & Tishchenko, L. N. (2015). Kolyvannya dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dissipative oscillators oscillations]. Kharkiv, Miskdruk. [in Ukrainian].
12. Olshanskiy, V. P., Tishchenko, L. N. & Olshanskiy, S. V. (2016). Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Miskdruk. [in Ukrainian].



13. Voytyuk, D. G., Chovnyuk, Yu. V., Gumenyuk, Yu. O., Gutsol, A. P. (2012). [Fiziko-mekhanicheskiiy analiz avtokolebatel'nykh ryzhimov raboty vibratsionnoy rykhritel'noy lapy kul'tivatora] Physico-mechanical analysis of self-oscillating redheads of a vibrating cultivating paw of a cultivator. *Vibrations in Engineering and Technology. All-Ukrainian Scientific and Technical Journal*. 2(66), 10–16. [in Russian].

14. Stocker, J. (1953). [Nelineynyye kolebaniya v mekhanicheskikh i elektricheskikh sistemakh]. *Nonlinear Oscillations in Mechanical and Electrical Systems*. Moscow, Publishing house of foreign countries literature. [in Russian].

15. Olshanskiy, V. P., Olshanskiy, S. V. (2019). [Vplyv nelineynoyi skladovoyi v'yazkoho oporu na tryvalist' vil'nykh kolyvan' ostsyl'yatora] Influence of nonlinear component of viscous resistance on the duration of free oscillations of the oscillator. *Bulletin of NTU "KPI". Series: Dynamics and strength of machines*. 2, 41–47. [in Ukrainian].

16. Abramovits, M., Stigan, I. (1979). *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Science. [in Russian].

О КОЛЕБАНИЯХ, КОТОРЫЕ ОПИСЫВАЕТ ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЛЕЯ

Рассмотрено движение колебательной системы с одной степенью свободы, описанное обобщенным дифференциальным уравнением Рэлея. Обобщение достигнуто заменой кубического слагаемого, которое выражает диссипативную силу в уравнении движения, на степенное слагаемое с произвольным положительным показателем. К исследованию колебательного процесса привлечен метод энергетического баланса. Используя его, составлено приближенное дифференциальное уравнение огибающей графика колебательного процесса и построено его аналитическое решение из которого следует, что квазилинейные фрикционные автоколебания возможны лишь тогда, когда показатель степени больше единицы. От значения показателя зависит и значение амплитуды автоколебаний в установившемся режиме. Выведено компактную формулу для вычисления этой амплитуды. В общем случае вычисление связано с использованием таблицы гамма-функции. В случае, когда показатель степени равен трем амплитудам, оказалась такой, как и в асимптотическом решении уравнения Рэлея, которое построил Стокер. Амплитуда не зависит от начальных условий. Автоколебания невозможны, если

показатель степени меньше или равен единице, так как в зависимости от начального отклонения системы происходит или раскачивание колебаний (проявляется неустойчивость системы) или убывание размахов к нулю с ограниченным количеством циклов, что обычно наблюдается при свободных колебаниях осциллятора с сухим трением. Эти свойства колебательной системы подтверждены также численным компьютерным интегрированием дифференциального уравнения движения для конкретных исходных данных. В среде Maple построены траектории движения осциллятора при различных значениях показателя нелинейности в выражении силы вязкого сопротивления и проведен соответствующий сравнительный анализ, чем подтверждена адекватность приближенных аналитических решений.

Ключевые слова: квазилинейные автоколебания, обобщенное уравнение Рэлея, метод энергетического баланса, численное интегрирование задачи Коши.

ON OSCILLATIONS DESCRIBING A GENERALIZED DIFFERENTIAL RELAY EQUATION

The motion of an oscillatory system with one degree of freedom, described by the generalized Rayleigh differential equation, is considered. The generalization is achieved by replacing the cubic term, which expresses the dissipative strength of the equation of motion, by a power term with an arbitrary positive exponent. To study the oscillatory process involved the method of energy balance. Using it, an approximate differential equation of the envelope of the graph of the oscillatory process is compiled and its analytical solution is constructed from which it follows that quasilinear frictional self-oscillations are possible only when the exponent is greater than unity. The value of the amplitude of the self-oscillations in the steady state also depends on the value of the indicator. A compact formula for calculating this amplitude is derived. In the general case, the calculation involves the use of a gamma function table. In the case when the exponent is three, the amplitude turned out to be the same as in the asymptotic solution of the Rayleigh equation that Stoker constructed. The amplitude is independent of the initial conditions. Self-oscillations are impossible if the exponent is less than or equal to unity, since depending on the initial deviation of the system, oscillations either sway (instability of the movement is manifested) or the range decreases to zero with a limited number of cycles, which is usually observed with free oscillations of the oscillator with dry friction. These properties of the oscillatory system are also



confirmed by numerical computer integration of the differential equation of motion for specific initial data. In the Maple environment, the oscillator trajectories are constructed for various values of the nonlinearity index in the expression of the viscous resistance force and a corresponding comparative analysis is carried out, which confirms the adequacy of approximate analytical solutions.

Keywords: *quasilinear self-oscillations, generalized Rayleigh equation, energy balance method, numerical integration of the Cauchy problem.*

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (вул. Алчевських 44, м. Харків, 61002, Україна, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка (вул. Алчевських 44, м. Харків, 61002, Україна, e-mail: stasolsh77@gmail.com).

Токарчук Олексій Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри технологічних процесів та обладнання переробних і харчових виробництв Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: tokarchuk@vsau.vin.ua).

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенка (ул. Алчевських 44, г. Харьков, 61002, Украина, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка (ул. Алчевських 44, г. Харьков, 61002, Украина, e-mail: stasolsh77@gmail.com).

Токарчук Алексей Анатольевич – кандидат технических наук, доцент кафедры технологических процессов та оборудования перерабатывающих и пищевых производств Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: tokarchuk@vsau.vin.ua).

Olshansky Vasilii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Physics of Theoretical Mechanics Kharkov National Technical University of Agriculture named after Petr Vasilenko (St. Alchevskih 44, Kharkov, 61002, Ukraine, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Olshansky Stanislav – PhD in Physics and Mathematics, Kharkov National Technical University of Agriculture named after Petr Vasilenko (St. Alchevskih 44, Kharkov, 61002, Ukraine, e-mail: stasolsh77@gmail.com).

Tokarchuk Oleksii – PhD, Associate Professor of the Department of «Technological Processes and Equipment for Processing and Food Productions» of the Vinnytsia National Agrarian University (St. Solnyshchnaya, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: tokarchuk@vsau.vin.ua).