

**Михалевич В. М.**

д.т.н., професор

**Вінницький національний  
технічний університет****Колісник М. А.**

д.ф., ст. викладач

**Вінницький національний  
аграрний університет****Димніч І.В.**

радник з безпеки

**DIDWW, Ізраїль****Mykhalevych V.**Doctor of Technical Sciences,  
Professor**Vinnytsia National  
Technical University****Kolisnyk M.**Doctor of Philosophy, Senior  
Lecturer**Vinnytsia National Agrarian  
University****Dymnich I.**

Security Advisor

**DIDWW, Israel****УДК 621.73:539.374; 519.8; 621.77**  
**DOI: 10.37128/2306-8744-2026-3-10****ВИБІР РЕЖИМУ ЗМІНИ ШВИДКОСТІ  
ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ  
ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОМУ  
ТОРЦЬОВОМУ ОСАДЖЕННІ  
ЗАГОТОВОК ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ**

У статті розглянуто задачу вибору раціонального режиму зміни швидкості деформації при високотемпературному ізотермічному торцьовому осадженні заготовок циліндричної форми. Об'єктом дослідження є процес гарячого осадження, предметом — закон зміни швидкості деформації в критичній точці заготовки та відповідний йому закон руху деформованого інструмента. Актуальність роботи зумовлена тим, що осадження належить до найбільш енергоємних операцій кування, а швидкість руху інструмента на практиці призначають сталою, виходячи з можливостей обладнання, а не з умов найповнішого використання пластичних можливостей матеріалу.

Відомі результати оптимізації швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування отримано для процесів з однорідним напружено-деформованим станом, для яких показник жорсткості напруженого стану залишається незмінним. При торцьовому осадженні цей показник у критичній точці на екваторі бічної поверхні змінюється по ходу процесу внаслідок бочкоутворення, що формально унеможливило пряме перенесення відомих результатів.

Для подолання цієї перешкоди сформульовано гіпотезу про слабку залежність граничної деформації від показника жорсткості напруженого стану при високотемпературному деформуванні для певного класу матеріалів. Показано, що для коректного перенесення результатів достатньо послабленої форми гіпотези, яка вимагає незалежності від показника жорсткості лише показника швидкісної чутливості. Установлено, що параметр ресурсної залежності входить виключно до масштабного множника розв'язку і не впливає на форму оптимальної траєкторії, а відносна похибка граничної деформації є меншою за відносну похибку цього параметра.

Розв'язано задачу узгодження оптимального закону зміни швидкості деформації з кінематикою інструмента. Отримано замкнений аналітичний вираз для швидкості руху інструмента, який не потребує чисельного обернення залежності інтенсивності деформацій від ступеня осадки. Для експоненціальної та поліноміальної траєкторій закон руху інструмента подано у явному вигляді. Запропоновано оцінку відхилення швидкості деформації в межах ступеня, яка надає кількості ступенів конкретний технологічний зміст.

Числовим розрахунком для сталі 14X17H2 при температурі 1150 °С встановлено, що пластичний ресурс матеріалу при торцьовому осадженні не вичерпується, тобто процес обмежений геометрично, а не деформаційно. Для таких матеріалів змістовною є задача мінімізації часу процесу. Отримано співвідношення, яке пов'язує скорочення часу деформування з приростом граничної деформації; показано, що приріст граничної деформації на 5,9 % відповідає скороченню часу осадження на 47 %.

ВИБІР РЕЖИМУ ЗМІНИ ШВИДКОСТІ  
ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ  
ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОМУ ТОРЦЬОВОМУ  
ОСАДЖЕННІ ЗАГОТОВОК ЦИЛІНДРИЧНОЇ  
ФОРМИ © 2026 by Михалеви́ч В. М., Колі́сник М.  
А., Димні́ч І.В. is licensed under CC BY 4.0

*Визначено умови застосовності отриманих результатів до процесів локального деформування обкаткою роликками.*

**Ключові слова:** гаряче деформування, торцьове осадження, пластичність, швидкість деформації, варіаційна задача, лінійне програмування, руйнування, обкатка роликками.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Осадження є однією з найпоширеніших і водночас найбільш енергоємних операцій кування. Його застосовують як самостійну формозмінювальну операцію, як підготовчий перехід перед штампуванням у закритих штампах, а також для руйнування литої структури зливка та підвищення однорідності властивостей поковки [5]. Незважаючи на технологічну поширеність, задачі високотемпературного осадження залишаються недостатньо вивченими саме в частині раціонального вибору швидкісного режиму: на практиці швидкість руху інструмента здебільшого призначають сталою, виходячи з можливостей обладнання, а не з умов найповнішого використання пластичних можливостей матеріалу.

Тривалість деформування при гарячій обробці є істотним чинником, що визначає енерговитрати процесу. Підтримання необхідної температури заготовки потребує витрат енергії, а зниження температури погіршує пластичні характеристики матеріалу й підвищує опір деформуванню, що знову призводить до зростання роботи деформування [6]. Тому скорочення тривалості процесу є самостійною технологічною метою, яку, однак, не можна досягати ціною погіршення якості виробу.

Питання граничного формозмінення при немонотонних траєкторіях деформування залишається предметом активних досліджень і в сучасній літературі [2]. Експериментальними дослідженнями гарячого деформування встановлено, що на граничну деформацію, яку матеріал здатний витримати без руйнування, суттєво впливає швидкість деформування: при деформуванні зі сталою швидкістю її збільшення призводить до зниження граничної деформації [1]. Процеси зі змінною швидкістю деформації досліджено значно менше. Водночас показано, що вже для найпростішої схеми зі змінною швидкістю — двоступеневої — можна отримати як збільшення, так і зменшення граничної деформації порівняно з деформуванням зі сталою швидкістю [1, 14]. Це означає, що оптимальний швидкісний режим належить до класу деформування зі змінною швидкістю, а його пошук є самостійною задачею.

Для визначення такого режиму сформульовано варіаційну задачу на основі моделі накопичення пошкоджень спадкового типу: визначити закон зміни швидкості деформації, за якого задана деформація досягається за найкоротший час, або, в еквівалентному ізопериметричному формулюванні, за якого за

заданий час матеріал набуває найбільшої деформації [8, 9]. Розв'язок задачі знайдено в класі кусково-сталих функцій, що технологічно відповідає простому багатоступеневому гарячому деформуванню [10].

Основним обмеженням такого підходу є те, що складність задачі визначається наперед заданою кількістю ступенів: цільова функція залежить від  $2k-1$  параметрів, а для пошуку точок можливого оптимуму необхідно розв'язати  $2^{k-1}$  систем нелінійних рівнянь. Навіть із залученням сучасних систем комп'ютерної математики розв'язки було отримано лише для кількості ступенів, що не перевищує шести [10].

Цю проблему подолано в роботах [10, 11] шляхом введення двох додаткових умов: однакової тривалості ступенів і зміни швидкості деформації за траєкторією, що задається функцією з параметрами. Кількість шуканих невідомих при цьому визначається виглядом функції, а не кількістю ступенів. Показано, що для експоненціальної траєкторії задача зводиться до розв'язання одного нелінійного рівняння, а для поліноміальної — до задачі лінійного програмування відносно коефіцієнтів полінома [11].

Окремий напрям становить дослідження циклічного деформування з паузами, під час яких відбувається часткове відновлення пластичності матеріалу [12]. Модель накопичення пошкоджень спадкового типу описує цей ефект природним чином, без введення додаткових гіпотез [1]. Разом із тим встановлено, що в межах цієї моделі свідоме введення пауз дає незначний приріст граничної деформації, який не виправдовує ускладнення технології; ефект виявляється відчутнішим для матеріалів із яскравіше вираженою залежністю пластичності від швидкості деформування [12].

Стосовно власне осадження циліндричних заготовок у літературі докладно досліджено напружено-деформований стан і показники вичерпання ресурсу пластичності на бічній поверхні заготовки в зоні найбільшого бочкоутворення; зокрема встановлено, що застосування мастильних матеріалів на контактних поверхнях знижує вичерпання ресурсу пластичності та запобігає руйнуванню [3]. Визначено також функціональний зв'язок між показниками бочкоутворення і коефіцієнтом контактного тертя, а також вплив відношення розмірів заготовки, діапазону деформацій, температури та типу матеріалу на цей ефект [4]. Методику оцінювання використаного ресурсу пластичності з побудовою траєкторій навантаження характерних точок і

пошуком найнебезпечнішої з них розвинуто в роботі [7].

Істотним є те, що результати оптимізації швидкісного режиму [10, 11] отримано для деформування з незмінними показником жорсткості напруженого стану та напрямним тензором приростів деформацій, тобто для процесів з однорідним напружено-деформованим станом, зокрема для кручення суцільних зразків. Перенесення цих результатів на процеси з неоднорідним станом, до яких належить торцьове осадження [13], у відомих публікаціях не виконувалося. Саме ця прогалина визначає постановку задачі цієї роботи.

Окремо зазначимо, що клас процесів, до яких може бути застосований розглядуваний підхід, не обмежується осадженням циліндричних заготовок. До нього також належать, зокрема, і процеси локального деформування обкаткою роликів [18, 19], у яких матеріальна частинка періодично навантажується й розвантажується, а кількість циклів може бути достатньо великою. Для таких процесів класичне формулювання задачі багатоступеневого деформування є принципово нерозв'язним, що робить підхід, складність якого не залежить від кількості ступенів, чи не єдиним можливим.

**Мета дослідження.** Метою роботи є перенесення відомих результатів оптимізації швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування на процес високотемпературного ізотермічного торцьового осадження заготовок циліндричної форми.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- сформулювати й обґрунтувати припущення, за якого задача оптимізації швидкісного режиму для процесу з неоднорідним напружено-деформованим станом зберігає структуру, властиву задачі для однорідного стану;

- оцінити вплив можливої похибки цього припущення на форму оптимальної траєкторії та на абсолютну величину досяжної граничної деформації;

- розв'язати задачу узгодження оптимального закону зміни швидкості деформації в критичній точці заготовки з законом руху деформівного інструмента;

- виконати числовий розрахунок для конкретного матеріалу й оцінити технологічний ефект оптимізації;

- визначити умови застосовності отриманих результатів до процесів локального деформування обкаткою роликів.

**Виклад основного матеріалу.**

**Гіпотеза про слабку залежність граничної деформації від показника жорсткості**

**напруженого стану.** В основу подальшого викладу покладено модель накопичення пошкоджень спадкового типу [1], згідно з якою умова непорушення суцільності матеріалу має вигляд:

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\beta_{ij}(\tau)) d\tau \leq 1, \quad \forall t \in [0, t_*], \quad (1)$$

де  $I(\tau)$  - сукупність безрозмірних інваріантів напружено-деформованого стану, до якої входять показник жорсткості напруженого стану  $\eta$  та напрямний тензор приростів деформацій  $\beta_{ij}$ ;  $t_*$  - граничний час, що відповідає руйнуванню;  $\varphi$  - ядро спадковості;  $f$  - деяка функція.

Залежність часу до руйнування від швидкості деформування апроксимується степеневою функцією

$$t_{*c} = \gamma \cdot \alpha^n, \quad n = -1/\alpha, \quad 0 < n < 1, \quad (2)$$

причому параметри  $\gamma = \gamma(I)$  та

$\alpha = \alpha(I)$  у загальному випадку залежать від усієї сукупності інваріантів.

Саме тут виникає принципова відмінність між крученням і торцьовим осадженням. При крученні суцільного зразка показник жорсткості залишається незмінним уздовж усього процесу, а отже  $\gamma$  і  $\alpha$  є сталими величинами, визначеними температурою деформування. Це й дозволило звести варіаційну задачу до задачі математичного програмування зі сталими коефіцієнтами [10, 11].

При торцьовому осадженні циліндричної заготовки руйнування найімовірніше починається в точці А на екваторі бічної поверхні [3, 7]. Із розвитком бочкоутворення в цій точці зростає колове розтягувальне напруження, унаслідок чого показник жорсткості не залишається сталим, а є функцією поточного ступеня осадки. Формально це означає, що умова простого деформування порушується, а коефіцієнти  $\gamma$  і  $\alpha$  у (2) стають змінними по ходу процесу - і задача втрачає ту структуру, яка забезпечувала її розв'язність.

**Гіпотеза.** Для певного класу матеріалів в умовах високотемпературного деформування гранична деформація слабо залежить від показника жорсткості напруженого стану в діапазоні значень, що реалізуються в критичній точці при торцьовому осадженні. Відповідно параметри ресурсної залежності (2) вважаються функціями лише температури деформування:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \approx 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \approx 0, \quad \gamma = \gamma(T), \quad \alpha = \alpha(T). \quad (3)$$

Підкреслимо, що гіпотеза свідомо формулюється не як універсальне твердження, а як припущення, застосовність якого до конкретного матеріалу підлягає експериментальній перевірці.

Обґрунтуємо її трьома групами міркувань.

По-перше, у прикладних розрахунках граничного формозмінення при осадженні гіпотеза фактично вже застосовується неявно. За критичну приймають величину інтенсивності деформацій у точці  $A$ , отриману з випробувань на монотонний розтяг. Таке зіставлення правомірне лише за умови, що гранична деформація не є суттєво чутливою до показника жорсткості - інакше дані розтягу не можна було б переносити на осадження. У цій роботі гіпотеза лише виводиться з розряду неявних допущень і формулюється явно.

По-друге, розрахунки граничного ступеня осадки, виконані з використанням зазначеного допущення, якісно узгоджуються з дослідними даними [3, 7]. Це свідчить, що похибка, внесена гіпотезою, не є визначальною для інженерних оцінок.

По-третє, при високих гомологічних температурах суттєво зростає роль дифузійних механізмів та динамічної рекристалізації. Механізм руйнування зміщується від пороутворення, чутливого до гідростатичної складової напруженого стану, до зерномежового проковзування й міжзеренного руйнування. Відповідно чутливість граничної деформації до показника жорсткості при гарячому деформуванні виражена значно слабше, ніж при холодному, де ця залежність є визначальною [7].

Зазначимо також, що у критичній точці при торцьовому осадженні без значного бочкоутворення показник жорсткості змінюється у вузькому діапазоні. Гіпотеза (3) стосується саме цього діапазону і не поширюється на процеси з істотно відмінними схемами напруженого стану.

Розглянемо наслідки прийнятої гіпотези.

**Наслідок 1 (структурна тотожність задач).** За умови (3) параметри  $\gamma$  і  $\alpha$  у задачі про торцьове осадження є сталими, як і у задачі про кручення. Унаслідок цього формулювання задачі оптимізації швидкісного режиму для осадження структурно тотожне раніше розв'язаній задачі, а весь побудований апарат [10, 11] - стягування системи обмежень до однієї нерівності, теорема про монотонність цільової функції, зведення до розв'язання одного нелінійного рівняння для експоненціальної траєкторії та до задачі лінійного програмування для поліноміальної - переноситься без жодних змін. Таким чином, гіпотеза (3) є не технічним спрощенням, а тією умовою, яка робить перенесення результатів можливим.

**Наслідок 2 (інваріантність форми оптимальної траєкторії).** Розглянемо систему, що визначає параметри оптимальної експоненціальної траєкторії [10]:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{\gamma^n}{\Delta t^n \sum_{i=1}^k \left( (k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}}, \\ \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \left( (k-i)^n - (k-i-1)^n \right) \lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^k \left( (k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1}} = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Друге рівняння системи, з якого визначається  $\lambda$ , не містить  $\gamma$  - воно залежить виключно від кількості ступенів  $k$  та показника  $n$ . Параметр  $\gamma$  входить лише до виразу для масштабного множника  $c_0$ , причому

$$c_0 \sim \gamma^n, \quad \varepsilon_u \sim \gamma^n. \quad (5)$$

Аналогічний результат має місце і для поліноміальної траєкторії: у задачі лінійного програмування коефіцієнти системи обмежень пропорційні  $\gamma^{-n}$ , тому зміна  $\gamma$  приводить до пропорційного масштабування всіх коефіцієнтів шуканого полінома, залишаючи нормовану форму траєкторії незмінною.

Звідси випливає висновок, що має самостійне значення: можлива похибка гіпотези щодо параметра  $\gamma$  не впливає на форму оптимального закону зміни швидкості деформації, а позначається лише на абсолютній величині досяжної граничної деформації. Понад те, оскільки  $0 < n < 1$ , відносна похибка при цьому не зростає, а послаблюється:

$$\frac{\delta \varepsilon_u}{\varepsilon_u} = n \cdot \frac{\delta \gamma}{\gamma} < \frac{\delta \gamma}{\gamma}. \quad (6)$$

**Наслідок 3 (послаблення гіпотези).** З наслідку 2 випливає, що для коректності перенесення результатів достатньо вимагати незалежності від показника жорсткості не самої граничної деформації, а лише показника швидкісної чутливості  $n$ . Це суттєво слабша вимога: вона стосується не абсолютного рівня пластичності, а характеру її залежності від швидкості деформування. Тому гіпотезу (3) доцільно застосовувати у послабленій формі

$$\frac{\partial n}{\partial \eta} \approx 0, \quad (7)$$

залишаючи за  $\gamma$  можливість залежати від показника жорсткості. Саме така редакція гіпотези і використовується надалі.

**Математична модель оптимізації швидкісного режиму.** Розглядається ізотермічне торцьове осадження циліндричної заготовки початкової висоти  $h_0$  та діаметра  $d_0$ . Критичною вважається точка  $A$  на екваторі

бічної поверхні, у якій імовірність порушення суцільності є найвищою [3].

Задача оптимізації швидкісного режиму формулюється як варіаційна задача ізопериметричного типу: визначити закон зміни швидкості деформації  $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$  у критичній точці, за якого за заданий час  $t_*$  матеріал набуває найбільшої деформації без порушення суцільності

$$\varepsilon_{\max} = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau) d\tau \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) d\tau \leq 1, \quad \forall t \in (0, t_*). \quad (9)$$

Згідно з гіпотезою (7) показник швидкісної чутливості  $n$  у критичній точці вважається сталим упродовж процесу, що забезпечує сталість структури умови (9) незалежно від зміни показника жорсткості напруженого стану.

Розв'язок шукаємо в класі кусково-сталих функцій

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, & 0 \leq t \leq t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \dots & M \\ \dot{\varepsilon}_{uk}, & t_{k-1} \leq t \leq t_*, \end{cases} \quad (10)$$

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = f(c_0, c_1, \dots, c_m, (i-1)\Delta t), \quad (i-1)\Delta t \leq t < i \cdot \Delta t, \quad i = \overline{1, k}, \quad (11)$$

а задача (8)–(9) з урахуванням (2) зводиться до задачі математичного програмування

$$\varepsilon_u(c_0, \dots, c_m) = \Delta t \sum_{i=1}^k f(c_0, \dots, c_m, (i-1)\Delta t) \rightarrow \max, \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^k ((k-i+1)^n - (k-i)^n) f(c_0, \dots, c_m, (i-1)\Delta t) = 1, \\ \frac{\Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^q ((q-i+1)^n - (q-i)^n) f(c_0, \dots, c_m, (i-1)\Delta t) \leq 1, \quad q = \overline{1, k-1}. \end{cases} \quad (13)$$

Принципово, що цільова функція тепер залежить від параметрів траєкторії, а не від кількості ступенів: кількість шуканих невідомих визначається виглядом функції  $f$  і не зростає зі збільшенням  $k$ .

Аналіз розв'язків задачі багатоступеневого деформування свідчить, що оптимальний закон зміни швидкості деформації є монотонно спадною функцією [10]. Це обґрунтовує вибір траєкторії у вигляді

що технологічно відповідає багатоступеневому режиму осадження з дискретною зміною швидкості руху інструмента.

Безпосереднє зведення задачі (8)–(9) з урахуванням (10) до задачі нелінійного програмування приводить до цільової функції, залежної від  $2k-1$  параметрів, і системи з  $k$  умов, серед яких одне строге нелінійне рівняння та  $k-1$  нелінійних нерівностей. Кількість систем рівнянь, які необхідно розв'язати для визначення точок можливого оптимуму, становить  $2^{k-1}$ , що робить задачу практично нерозв'язною вже при  $k > 6$  [10].

Для усунення залежності структури задачі від кількості ступенів приймаємо дві додаткові умови: тривалість кожного ступеня є незмінною,  $\Delta t_i = \Delta t = \text{const}$ ; зміна швидкості деформації при переході до наступного ступеня відбувається за траєкторією, що задається функцією  $f(c_0, c_1, \dots, c_m, t)$  із параметрами. Тоді закон зміни швидкості деформації набуває вигляду

$f(c_0, c_1, t) = c_0 e^{c_1 t}$ . Увівши позначення  $\lambda = e^{c_1 \Delta t}$ , отримуємо

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = c_0 \lambda^{i-1}, \quad (i-1)\Delta t \leq t < i \cdot \Delta t, \quad (14)$$

і задача (12)–(13) набуває вигляду

$$\varepsilon_u(c_0, \lambda) = c_0 \Delta t \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} \rightarrow \max, \quad (15)$$

з відповідною системою обмежень. Цільова функція залежить лише від двох

параметрів -  $c_0$  та  $\lambda$  - незалежно від кількості ступенів. Застосування результатів [10] дозволяє замінити  $k-1$  нерівностей системи обмежень єдиною нерівністю та звести визначення оптимальних параметрів до системи (4), друге рівняння якої визначає  $\lambda$  і містить лише  $k$  та  $n$ .

Подання закону зміни швидкості деформації у вигляді полінома степеня  $p$

$$f(t) = \sum_{j=0}^p c_j t^j \quad (16)$$

приводить до якісно іншого результату [11]. Після введення позначень

$$u_{0j} = \Delta t \sum_{i=1}^k ((i-1)\Delta t)^j, \quad (17)$$

$$u_{kj} = \frac{\Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^k \left( (k-i+1)^n - (k-i)^n \right) ((i-1)\Delta t)^j, \quad (18)$$

$$u_{qj} = \frac{\Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^q \left( (q-i+1)^n - (q-i)^n \right) ((i-1)\Delta t)^j, \quad q = \overline{1, k-1}, \quad (19)$$

задача набуває вигляду задачі лінійного програмування відносно коефіцієнтів полінома

$$\varepsilon_u(c_0, \dots, c_p) = \sum_{j=0}^p u_{0j} c_j \rightarrow \max, \quad (20)$$

$$\sum_{j=0}^p u_{kj} c_j = 1; \quad \sum_{j=0}^p u_{qj} c_j \leq 1, \quad q = \overline{1, k-1}. \quad (21)$$

Таким чином, вихідна варіаційна задача зводиться до задачі лінійного програмування, для якої існують стандартні методи розв'язання, стійкі до збільшення розмірності. Це знімає обмеження на кількість ступенів  $k$ , яке було визначальним для попередніх постановок. Зауважимо, що коефіцієнти (18)–(19) пропорційні  $\gamma^{-n}$ , тому, згідно з наслідком 2, невизначеність щодо значення  $\gamma$  приводить лише до пропорційного масштабування розв'язку, не змінюючи нормованої форми оптимальної траєкторії.

#### Визначення закону руху інструмента.

Розв'язок задачі оптимізації визначає закон зміни швидкості деформації  $\dot{\varepsilon}_u(t)$  у критичній точці  $A$ . Проте безпосереднім об'єктом керування в технологічному процесі є не ця величина, а швидкість руху рухомого інструмента

$$v(t) = -\frac{dh}{dt}, \quad (22)$$

де  $h = h(t)$  - поточна висота заготовки.

Отже, для практичної реалізації оптимального режиму необхідно розв'язати задачу узгодження: за відомим законом  $\dot{\varepsilon}_u(t)$

визначити закон  $v(t)$ , що його реалізує. Без розв'язання цієї задачі результати оптимізації залишаються суто теоретичними.

Введемо відносний ступінь осадки

$$\varepsilon_h = \frac{h_0 - h}{h_0}, \quad \dot{\varepsilon}_h = \frac{v}{h_0}. \quad (23)$$

Унаслідок неоднорідності напружено-деформованого стану інтенсивність логарифмічних деформацій у критичній точці не збігається зі ступенем осадки. Зв'язок між ними встановлюється скінченно-елементним моделюванням процесу для заданих геометричних параметрів заготовки та умов контактного тертя [3, 4] і апроксимується залежністю

$$\varepsilon_u = g(\varepsilon_h) = a\varepsilon_h^2 + b\varepsilon_h, \quad (24)$$

де  $a, b$  - коефіцієнти, що визначаються відношенням  $h_0/d_0$ , показником тертя та температурно-швидкісними умовами деформування. Квадратичний характер залежності (24) відображає прогресуюче бочкоутворення: зі зростанням ступеня осадки деформація в екваторіальній зоні накопичується випереджально порівняно із середньою деформацією заготовки.

Диференціюючи (24) за часом з урахуванням (23), отримуємо

$$\dot{\varepsilon}_u = g'(\varepsilon_h) \cdot \dot{\varepsilon}_h = (2a\varepsilon_h + b) \frac{v}{h_0}, \quad (25)$$

звідки

$$v(t) = \frac{h_0 \dot{\varepsilon}_u(t)}{2a\varepsilon_h(t) + b}. \quad (26)$$

Співвідношення (26) містить поточне значення  $\varepsilon_h(t)$ , яке безпосередньо невідоме. Обернення залежності (24) дає

$$\varepsilon_h = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a\varepsilon_u}}{2a}, \quad (27)$$

причому обирається корінь, що задовольняє умову  $\varepsilon_h(0) = 0$ . Підставивши (27) у знаменник (26), отримуємо

$$2a\varepsilon_h + b = \sqrt{b^2 + 4a\varepsilon_u}, \quad (28)$$

тобто радикал скорочується тотожно, і закон руху інструмента набуває замкненого вигляду

$$v(t) = \frac{h_0 \&u(t)}{\sqrt{b^2 + 4a \varepsilon_u(t)}}, \quad \varepsilon_u(t) = \int_0^t \&u(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Відповідно закон зміни висоти заготовки

$$h(t) = h_0 \left( 1 - \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a \varepsilon_u(t)}}{2a} \right). \quad (30)$$

Істотно, що співвідношення (29) не потребує чисельного обернення залежності (24) на кожному кроці: швидкість інструмента виражається безпосередньо через оптимальний закон зміни швидкості деформації та відповідну йому накопичену деформацію.

Для експоненціальної траєкторії, коли  $\&u = c_0 e^{c_1 t}$  і  $\varepsilon_u(t) = (c_0 / c_1)(e^{c_1 t} - 1)$ , з (29) отримуємо

$$v(t) = \frac{h_0 c_0 e^{c_1 t}}{\sqrt{b^2 + \frac{4ac_0}{c_1}(e^{c_1 t} - 1)}}. \quad (31)$$

Оскільки для оптимального розв'язку  $c_1 < 0$ , чисельник (31) монотонно спадає, а знаменник зростає, отже швидкість руху інструмента є монотонно спадною функцією часу без розривів і точок зламу. Технологічно такий режим реалізується на гідравлічному пресі з програмним керуванням.

Для поліноміальної траєкторії накопичена деформація

$$\varepsilon_u(t) = \sum_{j=0}^p \frac{c_j}{j+1} t^{j+1}, \quad (32)$$

а закон руху інструмента

$$v(t) = \frac{h_0 \sum_{j=0}^p c_j t^j}{\sqrt{b^2 + 4a \sum_{j=0}^p \frac{c_j}{j+1} t^{j+1}}}. \quad (33)$$

Таким чином, розв'язок задачі лінійного програмування (20)–(21) безпосередньо визначає закон руху інструмента в аналітичному вигляді.

Для кусково-сталого закону (14) швидкість деформації на  $i$ -му ступені стала, проте з (29) випливає, що швидкість інструмента в межах ступеня не залишається сталою, а спадає внаслідок зростання накопиченої деформації. Якщо технологічне обладнання забезпечує лише сталу швидкість на кожному ступені, фактична

швидкість деформації в критичній точці зростатиме в межах ступеня. Відносно відхилення на  $i$ -му ступені оцінюється як

$$\delta_i = \sqrt{\frac{b^2 + 4a \varepsilon_u(t_i)}{b^2 + 4a \varepsilon_u(t_{i-1})}} - 1. \quad (34)$$

Оцінка (34) дозволяє обґрунтовано призначати кількість ступенів: за заданого допустимого відхилення кількість ступенів обирається з умови неперевикнення цього відхилення на кожному ступені. Це надає параметру  $k$ , що в задачі оптимізації був формальним, конкретний технологічний зміст.

Зазначимо, що залежність (24) будується за результатами моделювання процесу зі сталою швидкістю руху інструмента. Її застосування до режимів зі змінною швидкістю ґрунтується на припущенні, що інтенсивність деформацій у критичній точці визначається поточним ступенем осадки й не залежить від траєкторії, якою цей ступінь досягнуто. Це припущення є природним наслідком того, що (24) відображає передусім геометрію формозміни - розвиток бочкоутворення, зумовлений умовами контактного тертя [4], - а не кінетику накопичення пошкоджень. Водночас строга перевірка цього припущення потребує окремого скінченно-елементного моделювання процесу зі змінною швидкістю руху інструмента, яке доцільно виконати в подальших дослідженнях.

#### Числовий приклад.

Розрахунок виконано для сталі 14X17H2 при температурі 1150 °С, для якої параметри ресурсної залежності (2) становлять  $n = 0,911$ ,  $\gamma = 1,37$ . Прийнято тривалість процесу  $t_* = 30$  с та кількість ступенів  $k = 1000$ , що практично відповідає неперервній зміні швидкості.

Розв'язання рівняння системи (4) дає  $\lambda = 0,99666911$ , звідки

$$c_0 = 0,2197, \quad c_1 = \frac{k \ln \lambda}{t_*} = -0,111215. \quad (35)$$

Отримані значення збігаються з відомими результатами оптимізації для цього матеріалу [10, 11] ( $c_0 = 0,21901$ ,  $c_1 = -0,111212$ ) із точністю до четвертого знака, що підтверджує коректність реалізації обчислювальної схеми. Накопичена деформація за оптимальним законом становить  $\varepsilon_u = 1,909$  проти  $\varepsilon_* = \gamma^n t_*^{1-n} = 1,803$  при деформуванні зі сталою швидкістю  $\&u = 0,0601 \text{ с}^{-1}$ , тобто приріст складає 5,9 %. Відповідні залежності наведено на рис. 1.

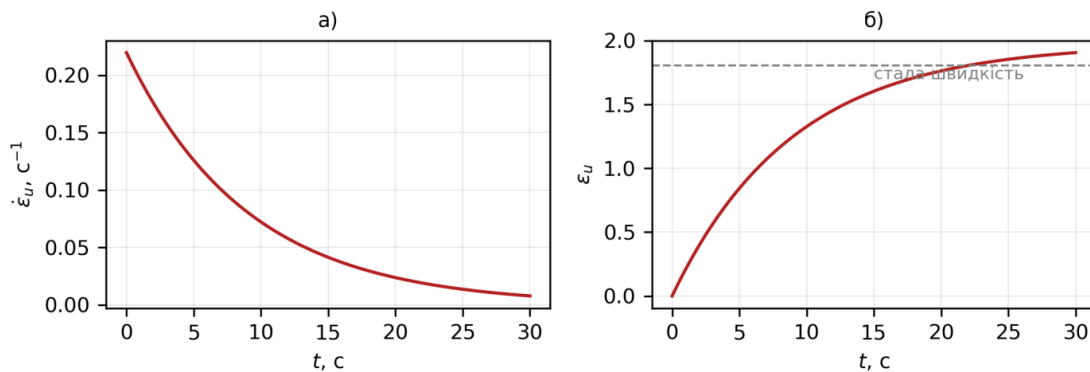


Рис. 1. Оптимальний закон зміни швидкості деформації за експоненціальною траєкторією: а – швидкість деформації; б – накопичена деформація (штрихова лінія – деформування зі сталою швидкістю)

Визначимо ступінь осадки, що відповідає граничній деформації  $\varepsilon_u = 1,909$ , за формулою (27) із оціночними коефіцієнтами  $a = 0,3725$ ,  $b = 0,7977$ :

$$\varepsilon_h = \frac{-0,7977 + \sqrt{0,7977^2 + 4 \cdot 0,3725 \cdot 1,909}}{2 \cdot 0,3725} = 1,43. \quad (36)$$

Отримане значення перевищує одиницю, що суперечить означенню ступеня осадки. Граничному значенню  $\varepsilon_h = 1$  відповідає  $\varepsilon_u = a + b = 1,170$ , тобто лише 61 % від наявного пластичного ресурсу. Цей результат має чіткий фізичний зміст: при торцювому осадженні заготовки із сталі 14X17H2 при 1150 °C пластичний ресурс матеріалу не вичерпується - заготовку буде розплющено до нульової висоти раніше, ніж у критичній точці настане граничний стан. Обмеження процесу є геометричним, а не деформаційним.

Звідси випливає висновок щодо коректної постановки задачі. Формулювання «набути найбільшої деформації за заданий час» для такої пари «матеріал - процес» втрачає технологічний зміст, оскільки максимум обмежений геометрією, а не пластичністю. Натомість змістовною стає вихідна постановка - досягти заданої деформації за найкоротший час. Згідно з теоремою про взаємозв'язок розв'язків варіаційних задач [9], оптимальний закон зміни швидкості деформації для обох постановок є тим самим; змінюється лише спосіб використання розв'язку.

З виразу для накопиченої деформації випливає, що для обох режимів

$$\varepsilon_u = A t_*^{1-n}, \quad (37)$$

де для сталої швидкості  $A_{\text{ст}} = \gamma^n$ , а для оптимального закону  $A_{\text{опт}} = K \gamma^n$ , причому

коефіцієнт  $K$  залежить лише від  $n$  і  $k$ . Звідси час досягнення заданої деформації

$$\frac{t_{\text{опт}}}{t_{\text{ст}}} = K^{\frac{1}{1-n}}. \quad (38)$$

Співвідношення (38) є основним результатом роботи. Оскільки для гарячого деформування показник  $n$  близький до одиниці, показник степеня  $1/(1-n)$  великий, і незначний приріст граничної деформації трансформується у значне скорочення часу процесу. Для розглядуваного випадку  $K = 1,0586$ ,  $1/(1-n) = 11,24$ , і відношення часів становить 0,527. Тобто деформація  $\varepsilon_u = 1,803$ , для досягнення якої при сталій швидкості потрібно 30,0 с, за оптимальним законом досягається за 15,8 с - скорочення часу на 47 %. Для поліноміальної траєкторії 4-го степеня, за якої  $K = 1,0723$  [11], скорочення становить 54 %.

Отже, приріст граничної деформації на 5,9 %, який сам по собі навряд чи виправдовує ускладнення технології, еквівалентний скороченню тривалості найбільш енергоємної операції кування майже вдвічі.

Оскільки гіпотеза у послабленій формі (7) стосується саме параметра  $n$ , доцільно оцінити, як він впливає на ефект оптимізації. Відповідні залежності наведено на рис. 2. Вони виявляють нетривіальну закономірність: приріст граничної деформації є немонотонною функцією  $n$  із максимумом близько  $n \approx 0,5$ , тоді як скорочення часу зростає монотонно з наближенням  $n$  до одиниці. Пояснення полягає в тому, що при  $n \rightarrow 1$  гранична деформація дедалі слабше залежить від тривалості процесу, тому навіть малий її приріст «окуповується» великим виграшем у часі. Практичний наслідок: оптимізація швидкісного режиму є тим ефективнішою, чим ближчий

показник швидкісної чутливості до одиниці, тобто саме для високотемпературного деформування.

Для заготовки початкової висоти  $h_0 = 20$  мм закон руху інструмента, що реалізує оптимальний режим, обчислено за формулою (31). Результати наведено в табл. 1 та на рис. 3

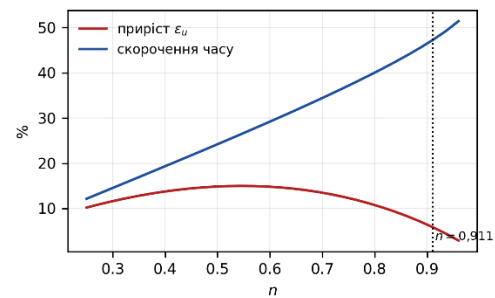


Рис. 2. Вплив показника швидкісної чутливості на ефект оптимізації швидкісного режиму

Таблиця 1 – Параметри оптимального режиму торцювого осадження та відповідний закон руху інструмента

| $t, \text{с}$ | $\varepsilon_u, \text{с}^{-1}$ | $\varepsilon_u$ | $\varepsilon_h$ | $h, \text{мм}$ | $v, \text{мм/с}$ |
|---------------|--------------------------------|-----------------|-----------------|----------------|------------------|
| 0             | 0,2197                         | 0               | 0               | 20,00          | 5,51             |
| 1             | 0,1966                         | 0,208           | 0,235           | 15,30          | 4,04             |
| 2             | 0,1759                         | 0,394           | 0,414           | 11,72          | 3,18             |
| 3             | 0,1574                         | 0,561           | 0,558           | 8,85           | 2,60             |
| 4             | 0,1408                         | 0,710           | 0,676           | 6,48           | 2,16             |
| 5             | 0,1260                         | 0,843           | 0,776           | 4,49           | 1,83             |
| 6             | 0,1128                         | 0,962           | 0,860           | 2,79           | 1,57             |
| 7             | 0,1009                         | 1,069           | 0,933           | 1,34           | 1,35             |
| 8,07          | 0,0896                         | 1,170           | 1,000           | 0              | 1,16             |

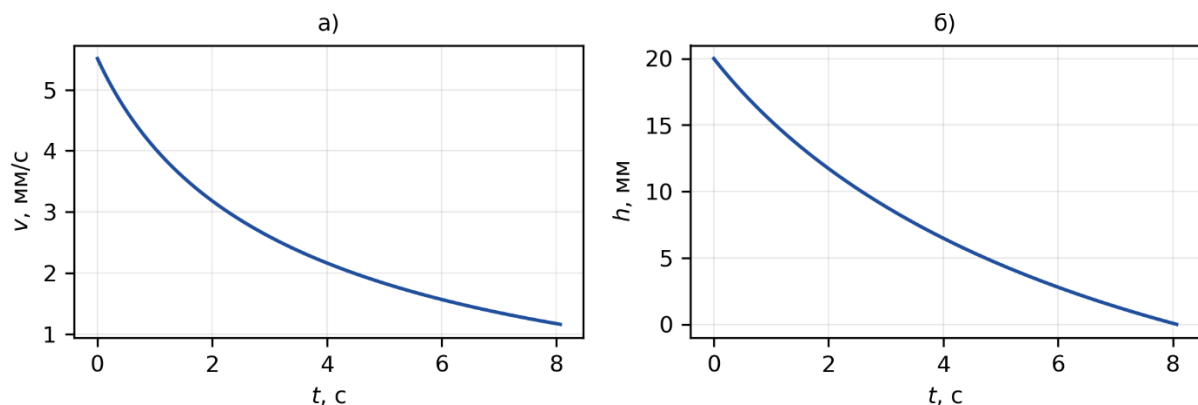


Рис. 3. Закон руху інструмента (а) та зміна висоти заготовки (б) при реалізації оптимального швидкісного режиму

Швидкість руху інструмента монотонно спадає від 5,5 до 1,2 мм/с, тобто змінюється приблизно в 4,7 рази. Такий діапазон є цілком реалізовним на гідравлічному пресі з програмним керуванням. Звертає на себе увагу, що швидкість інструмента спадає повільніше, ніж швидкість деформації (у 4,7 рази проти 2,5 рази): знаменник у (29) зростає із накопиченням деформації, частково компенсуючи спадання чисельника. Це наслідок прогресуючого

бочкоутворення - та сама швидкість руху інструмента наприкінці процесу спричиняє більшу швидкість деформації в критичній точці.

Наведений приклад потребує двох застережень. По-перше, коефіцієнти  $a$ ,  $b$  залежності (24) прийнято оцінючими: вони отримані для іншого матеріалу й геометрії, а їх уточнення для конкретних умов потребує окремого скінченно-елементного моделювання. Оскільки, згідно з наслідком 2, форма

оптимальної траєкторії від цих коефіцієнтів не залежить, уточнення вплине лише на перерахунок ступеня осадки та закону руху інструмента, не змінюючи оптимального закону зміни швидкості деформації. По-друге, клас матеріалів, для яких оптимізація дає приріст граничного ступеня осадки, - це матеріали зниженої пластичності, у яких руйнування настає при  $\varepsilon_h < 1$ . Для високопластичних матеріалів, до яких належить розглянута сталь, ефект оптимізації реалізується у формі скорочення часу процесу. Обидва випадки описуються тією самою моделлю й відрізняються лише інтерпретацією розв'язку.

**Поширення підходу на процеси локального деформування обкаткою роликми.** Торцьове осадження та локальне деформування обкаткою роликми на перший погляд належать до різних технологічних класів: у першому випадку осередок деформації охоплює весь об'єм заготовки, у другому - лише незначну його частину, що переміщується відносно заготовки [18, 19]. Проте з погляду моделі накопичення пошкоджень (1) різниця між ними зводиться до вигляду функції  $\&_i(t)$  у критичній точці. При обкатці матеріальна частинка, розташована на поверхні заготовки, періодично входить в осередок деформації та виходить із нього, унаслідок чого закон зміни швидкості деформації в ній набуває вигляду

$$\&_i(t) = \begin{cases} \&_i, & (i-1)(t_d + t_n) \leq t < i(t_d + t_n) + t_n; \\ 0, & (i-1)(t_d + t_n) + t_n \leq t < i(t_d + t_n), \end{cases} \quad (39)$$

де  $t_d$  - тривалість перебування частинки в осередку деформації за один оберт,  $t_n$  - тривалість паузи між послідовними навантаженнями,  $i = 1, k$  - номер оберту.

Закон (39) є частинним випадком багатоступеневої схеми (11) із чергуванням ступенів деформування та ступенів із нульовою швидкістю. Отже, весь апарат підрозділу 3.2 застосовний до цієї схеми без структурних змін - потрібна лише відповідна модифікація коефіцієнтів системи обмежень (17)–(19).

Принципова відмінність обкатки від осадження полягає в кількості ступенів. При осадженні  $k$  є параметром, який призначає технолог; при обкатці він визначається кінематикою процесу й дорівнює кількості обертів заготовки. Саме тут запропонований підхід виявляє свою перевагу найвиразніше: класичне формулювання задачі багатоступеневого деформування для таких значень  $k$  є принципово нерозв'язним, натомість перехід до траєкторії із фіксованою кількістю параметрів робить складність задачі

незалежною від  $k$ , а поліноміальне подання траєкторії зводить її до задачі лінійного програмування, розмірність якої визначається степенем полінома.

Наявні результати дослідження гарячого циклічного деформування з паузами свідчать, що в межах спадкової моделі накопичення пошкоджень свідоме введення пауз дає незначний ефект [12]. При обкатці роликми, однак, постановка питання інша: паузи тут не вводяться додатково, а є невід'ємною властивістю кінематики процесу. Тому предметом оптимізації стає не наявність пауз, а розподіл швидкості деформації між циклами за заданого співвідношення тривалостей деформування та паузи, що визначається геометрією ролика та частотою обертання. Керованими параметрами при цьому виступають подача ролика та частота обертання заготовки [15, 16, 17].

Перенесення результатів на обкатку роликми потребує розв'язання двох питань, які виходять за межі цієї роботи. Перше - обґрунтування гіпотези підрозділу 3.1 для схеми напруженого стану при локальному деформуванні: осередок деформації при обкатці характеризується, як правило, сприятливішим рівнем гідростатичного тиску, ніж екваторіальна зона при осадженні, що формально розширює діапазон значень показника жорсткості, у якому має виконуватися гіпотеза. Друге - побудова аналога залежності (24), що пов'язує деформацію в критичній точці з технологічними параметрами процесу: для осадження таким параметром є ступінь осадки, для обкатки - подача ролика за оберт. Структура розв'язку задачі узгодження при цьому зберігається.

#### Висновки:

1. Сформульовано гіпотезу про слабку залежність граничної деформації від показника жорсткості напруженого стану при високотемпературному деформуванні для певного класу матеріалів. Показано, що в прикладних розрахунках граничного формозмінення при осадженні ця гіпотеза фактично вже застосовується неявно. Установлено, що для коректного перенесення результатів достатньо послабленої форми гіпотези, яка вимагає незалежності від показника жорсткості не самої граничної деформації, а лише показника швидкісної чутливості.

2. Доведено, що за умови прийнятої гіпотези задача оптимізації швидкісного режиму торцьового осадження є структурно тотожною раніше розв'язаній задачі для деформування з однорідним напруженим станом. Це дозволило перенести на осадження весь наявний апарат: подання траєкторії зміни швидкості деформації функцією із параметрами, стягування системи



обмежень до однієї нерівності та зведення вихідної варіаційної задачі до розв'язання одного нелінійного рівняння для експоненціальної траєкторії або до задачі лінійного програмування для поліноміальної.

3. Установлено, що параметр  $\gamma$  ресурсної залежності входить лише до масштабного множника розв'язку і не впливає на форму оптимальної траєкторії. Відповідно можлива похибка гіпотези позначається виключно на абсолютній величині досяжної граничної деформації, причому, оскільки  $0 < n < 1$ , відносна похибка при цьому послаблюється.

4. Розв'язано задачу узгодження оптимального закону зміни швидкості деформації з кінематикою інструмента. Отримано замкнений аналітичний вираз (29) для швидкості руху інструмента, який не потребує чисельного обернення залежності інтенсивності деформацій від ступеня осадки. Для експоненціальної та поліноміальної траєкторій закон руху інструмента подано у явному вигляді.

5. Отримано оцінку (34) відхилення швидкості деформації в межах ступеня при реалізації східчастої схеми зі сталою швидкістю інструмента. Ця оцінка надає кількості ступенів, що в задачі оптимізації є формальним параметром, конкретний технологічний зміст.

6. Розрахунком для сталі 14X17H2 при температурі 1150 °C встановлено, що граничний деформації  $\varepsilon_u = 1,91$  відповідає ступінь осадки  $\varepsilon_h = 1,43$ , тобто пластичний ресурс матеріалу при торцювому осадженні не вичерпується - процес обмежений геометрично, а не деформаційно. Для таких матеріалів змістовною є не задача максимізації граничної деформації, а задача мінімізації часу процесу.

7. Для задачі мінімізації часу отримано співвідношення (38). Оскільки при гарячому деформуванні показник швидкісної чутливості близький до одиниці, незначний приріст граничної деформації відповідає значному скороченню тривалості процесу: для розглянутого матеріалу приріст на 5,9 % за експоненціальною траєкторією еквівалентний скороченню часу осадження на 47 %, а за поліноміальною траєкторією 4-го степеня (приріст 7,2 %) - на 54 %.

8. Установлено, що приріст граничної деформації є немонотонною функцією показника швидкісної чутливості з максимумом близько  $n \approx 0,5$ , тоді як скорочення часу процесу монотонно зростає з наближенням цього показника до одиниці. Отже, оптимізація швидкісного режиму є тим ефективнішою, чим вищий показник швидкісної чутливості, тобто

саме в умовах високотемпературного деформування.

9. Показано, що процеси локального деформування обкаткою роликми описуються тією самою моделлю як частинний випадок багатоступеневої схеми з чергуванням ступенів деформування та пауз. Оскільки кількість циклів у таких процесах може бути достатньо великою, класичне формулювання задачі є для них принципово нерозв'язним, а запропонований підхід, складність якого не залежить від кількості ступенів, залишається застосовним. Це визначає процеси локального деформування як перспективну область подальших досліджень.

### Список використаних джерел

1. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. Вінниця : Універсум-Вінниця, 1998. 195 с.
2. Sampaio R. F. V., Pragana J. P. M., Joaquim G. P., Bragança I. M. F., Silva C. M. A., Martins P. A. F. Reevaluating fracture forming limits in bulk forming under non-monotonic strain loading paths. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 2026. Vol. 10, № 2. 66. <https://doi.org/10.3390/jmmp10020066>
3. Kukhar V., Artiukh V., Butyrin A., Prysiaznyi A. Stress-strain state and plasticity reserve depletion on the lateral surface of workpiece at various contact conditions during upsetting. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2018. Vol. 692. P. 201–211.
4. Kukhar V. V., Klimov E. S., Chernenko S. M., Balalayeva E. Yu. Correlation of barreling effect with boundary friction coefficient during upsetting of various materials workpieces under processing conditions. *Materials Science Forum*. 2020. Vol. 992. P. 751–756.
5. Zhabankov I. G., Markov O. E., Perig A. V. Rational parameters of profiled workpieces for an upsetting process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2014. Vol. 72. P. 865–872. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-5727-5>
6. Титов В. А., Злочевська Н. К., Лавріненков А. Д., Гараненко Т. Р. Дослідження параметрів процесу ізотермічного пресування заготовок з титанових сплавів. *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2011. № 46. С. 67–72.
7. Сивак Р. І., Коцюбівська К. І., Сухоруков С. І. Вплив протитиску, що створюється твердим середовищем, на деформівність заготовок при радіальному видавлюванні. *Вісник машинобудування та транспорту*. 2016. № 4 (2). С. 101–108.
8. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому

деформуванні. *Обробка матеріалів тиском*. 2009. № 2 (21). С. 12–16.

9. Краєвський В. О. Взаємозв'язок розв'язків варіаційних задач, що побудовані на основі моделі накопичення пошкоджень спадкового типу. Теоретичні і прикладні задачі обробки металів тиском та автотехнічних експертиз : збірник тез доповідей міжнародної науково-технічної конференції. Вінниця : ВНТУ, 2011. С. 196–198.

10. Краєвський В. О., Михалевич В. М. Оптимізація швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування при однаковій тривалості ступенів. *Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки*. 2015. № 1–2. С. 46–52.

11. Kraievskiy V. O., Mykhalevych V. M., Dobranyuk Yu. V., Sawicki D., Mussabekov K. Selection of optimal path of strain rate change in the process of multistage hot deformation under the condition of the equal duration of stages. *Proceedings of SPIE*. 2018. Vol. 10808. 108084T. <https://doi.org/10.1117/12.2501490>

12. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Оптимізація гарячого циклічного деформування із паузами. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. 2011. № 46. С. 103–106.

13. Михалевич В. М., Краєвський В. О., Добранюк Ю. В. Вісесиметрична осадка циліндричних заготовок. *Наукові нотатки*. 2009. № 25 (1). С. 241–249.

14. Mikhalevich V. M., Abramchuk I. V. Maximum accumulated strain for linear two-link triangle-like deformation trajectories. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, № 6. P. 720–736. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01121-w>

15. Михалевич В., Колісник М., Штуць А., Григоренко Н. Дослідження технологічних процесів штампування деталей типу фланець на основі застосування способів комбінованого видавлювання. *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки*. 2025. Т. 351, № 3.1. С. 590–599. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-351-77>

16. Myhalevych V. M., Shtuts A. A., Kolisnyk M. A., Zozulyak I. A., Jelenich A. P. Research into the processes of rolling stamping of ring and flange billets with a complex profile. *Metallfizika i Noveishie Tekhnologii*. 2025. Vol. 47, № 6. P. 647–666. <https://doi.org/10.15407/mfint.47.06.0647>

17. Михалевич В. М., Колісник М. А., Штуць А. А. Дослідження напружено-деформованого стану матеріалу заготовок під час пластичного штампування прокатуванням. *Металлофізика і новітні технології*. 2025. Т. 47, № 1. С. 57–81. <https://doi.org/10.15407/mfint.47.01.0057>

18. Матвійчук В. А., Михалевич В. М., Штуць А. А. Аналіз напружено-деформованого стану матеріалу заготовок при висаджуванні ресурсозберігаючим методом штампування обкочуванням. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2023. № 1 (120). С. 76–85. <https://doi.org/10.37128/2520-6168-2023-1-9>

19. Matviychuk V., Mikhalevich V., Shtuts A. Analysis of stress-strain state (SSS) of billet material in the course of setting by resource-saving method of roll stamping. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2023. № 1 (108). С. 63–72. <https://doi.org/10.37128/2306-8744-2023-1-7>

## References

1. Mykhalevych, V. M. (1998). Tenzorni modeli nakopychennia poshkodzen [Tensor models of damage accumulation]. Vinnytsia: UNIVERSUM-Vinnytsia. [in Ukraine].

2. Sampaio, R. F. V., Pragma, J. P. M., Joaquim, G. P., Bragança, I. M. F., Silva, C. M. A., Martins, P. A. F. (2026). Reevaluating fracture forming limits in bulk forming under non-monotonic strain loading paths. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 10(2), 66. <https://doi.org/10.3390/jmmp10020066>. [in Switzerland].

3. Kukhar, V., Artiukh, V., Butyrin, A., Prysiashnyi, A. (2018). Stress-strain state and plasticity reserve depletion on the lateral surface of workpiece at various contact conditions during upsetting. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 692, 201–211. [in Switzerland].

4. Kukhar, V. V., Klimov, E. S., Chernenko, S. M., Balalayeva, E. Yu. (2020). Correlation of barreling effect with boundary friction coefficient during upsetting of various materials workpieces under processing conditions. *Materials Science Forum*, 992, 751–756. [in Switzerland].

5. Zhabankov, I. G., Markov, O. E., Perig, A. V. (2014). Rational parameters of profiled workpieces for an upsetting process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 72, 865–872. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-5727-5>. [in Germany].

6. Titov, V. A., Zlochevska, N. K., Lavrinenkov, A. D., Haranenko, T. R. (2011). Doslidzhennia parametriv protsesu izotermichnoho presuvannia zahotvok z tytanovykh splaviv. *Visnyk NTU «KhPI»*, 46, 67–72. [in Ukraine].

7. Syvak, R. I., Kotsiubivska, K. I., Sukhorukov, S. I. (2016). Vplyv protytysku, shcho stvoriuietsia tverdym seredovyshchem, na deformivnist zahotvok pry radialnomu vydavliuvanni. *Visnyk mashynobuduvannia ta transportu*, 4(2), 101–108. [in Ukraine].

8. Mykhalevych, V. M., Kraievskiy, V. O. (2009). Formuluvannia variatsiinoi zadachi dlia



modeli nakopychennia poshkodzen pry hariachomu deformuvanni. *Obrobka materialiv tyskom*, 2(21), 12–16. [in Ukraine].

9. Kraievskiy, V. O. (2011). Vzaïmozv'язok rozv'iazkiv variatsiinykh zadach, shcho pobudovani na osnovi modeli nakopychennia poshkodzen spadkovoho typu. Teoretychni i prykladni zadachi obrobky metaliv tyskom ta avtotehnichnykh ekspertyz: zbirnyk tez dopovidei. Vinnytsia: VNTU, 196–198. [in Ukraine].

10. Kraievskiy, V. O., Mykhalevych, V. M. (2015). Optymizatsiia shvydkisnoho rezhymu bahatostupenevoho hariachoho deformuvannia pry odnakovii tryvalosti stupeniv. *Visnyk Donetskoho natsionalnoho universytetu. Ser. A: Pryrodnychi nauky*, 1–2, 46–52. [in Ukraine].

11. Kraievskiy, V. O., Mykhalevych, V. M., Dobranyuk, Yu. V., Sawicki, D., Mussabekov, K. (2018). Selection of optimal path of strain rate change in the process of multistage hot deformation under the condition of the equal duration of stages. *Proceedings of SPIE*, 10808, 108084T. <https://doi.org/10.1117/12.2501490>. [in USA].

12. Mykhalevych, V. M., Kraievskiy, V. O. (2011). Optymizatsiia hariachoho tsyklichnoho deformuvannia iz pazamy. *Visnyk NTU «KhPI». Novi rishennia v suchasnykh tekhnolohiiakh*, 46, 103–106. [in Ukraine].

13. Mykhalevych, V. M., Kraievskiy, V. O., Dobranyuk, Yu. V. (2009). Visesymetrychna osadka tsylindrychnykh zahotovok. *Naukovi notatky*, 25(1), 241–249. [in Ukraine].

14. Mikhalevich, V. M., Abramchuk, I. V. (2021). Maximum accumulated strain for linear two-link triangle-like deformation trajectories. *International Applied Mechanics*, 57(6), 720–736. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01121-w>. [in USA].

15. Myhalevich, V., Kolisnyk, M., Shtuts, A., Hryhorenko, N. (2025). Study of technological processes of stamping of flange-type parts based on the application of combined expression methods. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*, 351(3.1), 590–599. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-351-77>. [in Ukraine].

16. Myhalevych, V. M., Shtuts, A. A., Kolisnyk, M. A., Zozulyak, I. A., Jelenich, A. P. (2025). Research into the processes of rolling stamping of ring and flange billets with a complex profile. *Metallfizika i Noveishie Tekhnologii*, 47(6), 647–666. <https://doi.org/10.15407/mfint.47.06.0647>. [in Ukraine].

17. Mykhalevych, V. M., Kolisnyk, M. A., Shtuts, A. A. (2025). Doslidzhennia napruzhenodeformovanoho stanu materialu zahotovok pid chas plastychnoho shtampuvannia prokatuvanniam. *Metallfizika i Noveishie Tekhnologii*, 47(1), 57–81.

<https://doi.org/10.15407/mfint.47.01.0057>. [in Ukraine].

18. Matviichuk, V. A., Mykhalevych, V. M., Shtuts, A. A. (2023). Analiz napruzhenodeformovanoho stanu materialu zahotovok pry vysadzhuvanni resursooshchadnym metodom shtampuvannia obkochuvanniam. *Tekhnika, enerhetyka, transport APK*, 1(120), 76–85. <https://doi.org/10.37128/2520-6168-2023-1-9>. [in Ukraine].

19. Matviychuk, V., Mikhalevich, V., Shtuts, A. (2023). Analysis of stress-strain state (SSS) of billet material in the course of setting by resource-saving method of roll stamping. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*, 1(108), 63–72. <https://doi.org/10.37128/2306-8744-2023-1-7>. [in Ukraine].

### SELECTION OF THE STRAIN RATE CHANGE MODE DURING HIGH-TEMPERATURE FLAT-DIE UPSETTING OF CYLINDRICAL BILLETS

*The paper considers the problem of selecting a rational mode of strain rate change during high-temperature isothermal flat-die upsetting of cylindrical billets. The object of the study is the hot upsetting process; the subject is the law of strain rate change at the critical point of the billet and the corresponding law of motion of the deforming tool. The relevance of the work stems from the fact that upsetting is one of the most energy-intensive forging operations, while the tool speed is in practice assigned as a constant value based on equipment capabilities rather than on conditions for the fullest use of the plastic capacity of the material.*

*Known results on the optimization of the rate mode of multistage hot deformation have been obtained for processes with a homogeneous stress-strain state, for which the stress triaxiality ratio remains unchanged. During flat-die upsetting this ratio at the critical point on the equator of the lateral surface changes during the process due to barrelling, which formally makes the direct transfer of known results impossible.*

*To overcome this obstacle, a hypothesis is formulated on the weak dependence of the limiting strain on the stress triaxiality ratio during high-temperature deformation for a certain class of materials. It is shown that a weakened form of the hypothesis is sufficient for a correct transfer of the results, requiring independence from the triaxiality ratio only for the strain rate sensitivity exponent. It is established that the resource dependence parameter enters exclusively into the scale factor of the solution and does not affect the shape of the optimal trajectory, while the relative error of the limiting strain is smaller than the relative error of this parameter.*

The problem of matching the optimal law of strain rate change with the tool kinematics is solved. A closed-form analytical expression for the tool speed is obtained, which does not require numerical inversion of the dependence of strain intensity on the upsetting ratio. For exponential and polynomial trajectories the law of tool motion is presented in explicit form. An estimate of the strain rate deviation within a stage is proposed, which gives the number of stages a specific technological meaning.

A numerical calculation for 14Kh17N2 steel at 1150 °C established that the plastic resource of the material is not exhausted during flat-die upsetting, i.e. the process is limited geometrically

rather than by deformation. For such materials the problem of minimizing the process time is meaningful. A relation is obtained linking the reduction of deformation time with the increase of the limiting strain; it is shown that an increase of the limiting strain by 5.9 % corresponds to a reduction of the upsetting time by 47 %. The conditions for applicability of the obtained results to processes of local deformation by roller burnishing are determined.

**Key words:** hot deformation, flat-die upsetting, ductility, strain rate, variational problem, linear programming, fracture, roller burnishing.

#### Відомості про авторів

**Михалевич Володимир Маркусович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету (Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна, email: mykhalevych@vntu.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-1557-7331>).

**Колісник Микола Анатолійович** – доктор філософії з матеріалознавства, старший викладач кафедри «Електроенергетики, електротехніки та електромеханіки» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, email: kolisnik30@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5502-6556>).

**Димніч Ігор Віталійович** – радник з безпеки, DIDWW (Ізраїль, email: security@didww.com, <https://orcid.org/0000-0001-5401-9143>).

**Mykhalevych Volodymyr** – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University (95 Khmelnytske Shose, Vinnytsia, 21021, Ukraine, email: mykhalevych@vntu.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-1557-7331>).

**Kolisnyk Mykola** – Doctor of Philosophy in Materials Science, Senior Lecturer of the Department of Electric Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Agrarian University (3 Soniachna str., Vinnytsia, 21008, Ukraine, email: kolisnik30@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5502-6556>).

**Dymnich Igor** – Security Advisor, DIDWW (Israel, email: security@didww.com, <https://orcid.org/0000-0001-5401-9143>).

Стаття надійшла 30.07.2026

Стаття прийнята 12.08.2026

Опубліковано 12.10.2026