

**Купчук І.М.**

к.т.н., доцент

**Вінницький національний  
аграрний університет****Kupchuk I.**Candidate of Technical Sciences,  
Associate Professor**Vinnitsia National Agrarian  
University****УДК 631.363.7:519.87****DOI: 10.37128/2306-8744-2026-3-19****СИСТЕМАТИЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ  
МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСУ ЗМІШУВАННЯ  
КОРМОВИХ МАТЕРІАЛІВ**

Математичний опис змішування кормових матеріалів потребує розмежування моделей, оскільки різноманітність компонентів і складність їх переміщення визначають специфіку перенесення, сегрегації та міжчастинкової взаємодії. Це обмежує безпосереднє перенесення моделей і їх параметрів між різними матеріальними системами.

Метою дослідження є систематизація математичних моделей змішування, визначення їх функціональних взаємозв'язків, умов переходу між рівнями опису та меж застосування з урахуванням властивостей матеріалів і конструктивно-технологічних параметрів змішувачів. Методологічну основу становили системний, структурно-функціональний і порівняльний підходи. Проаналізовано статистичні, кінетичні, RTD, зональні, марковські, континуальні та частинкові моделі.

Моделі порівняно за математичним об'єктом, просторово-часовим масштабом, змінними стану, законом еволюції, способом спостереження, параметрами та вихідними показниками. Запропоновано операторну архітектуру, яка розмежовує фізичний стан суміші, його модельне представлення, еволюцію, формування спостережуваних величин і кількісне оцінювання. Показано, що коефіцієнт варіації, індекси змішування та моменти RTD є переважно результатами спостереження й згортання даних, а не універсальними змінними стану.

Встановлено, що перехід від DEM до континуального опису здійснюється просторовим усередненням, до зональної моделі – інтегруванням балансів у виділених об'ємах, а марковське та RTD-представлення формуються через опис міжзонного обміну й спостереження вихідного сигналу. Визначено інформацію, що зберігається та втрачається під час редукції моделей. Обґрунтовано, що вибір математичного представлення має визначатися метою розрахунку, необхідною деталізацією, властивостями матеріалу, конструкцією змішувача та доступними експериментальними даними. Сформульовані положення створюють основу для розроблення зонально-балансових моделей змішування кормових матеріалів.

**Ключові слова:** змішування кормових матеріалів, математична модель, статистична модель, кінетична модель, континуальне моделювання, зональна модель, RTD, DEM, однорідність суміші.

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ  
МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСУ ЗМІШУВАННЯ  
КОРМОВИХ МАТЕРІАЛІВ © 2026 by  
Купчук І.М. is licensed under CC BY 4.0

**Вступ.** Ефективність підготовки кормових сумішей визначається не лише конструкцією та режимом роботи змішувача, а й характером переміщення компонентів, їх взаємодією та формуванням просторової неоднорідності. Особливу складність становлять кормові матеріали, які поєднують різні за розміром,

формою, густиною, вологістю, когезією та деформівністю компоненти. За таких умов однаковий зовнішній результат змішування може формуватися різними внутрішніми механізмами.

Для математичного опису процесу застосовують статистичні, кінетичні, RTD,



зональні, марковські, континуальні та частинкові моделі. Вони відрізняються не лише рівнем деталізації, а й математичним об'єктом, змінними стану, способом опису еволюції та процедурою оцінювання однорідності. Тому коефіцієнт варіації, розподіл часу перебування, концентраційне поле, міжзонний баланс і траєкторія частинки не можуть розглядатися як безпосередньо взаємозамінні характеристики одного рівня.

Наукова проблема полягає у відсутності узгодженого підходу до порівняння різнорівневих математичних представлень змішування, визначення взаємозв'язків між ними та встановлення меж коректного перенесення моделей і їх параметрів на різні кормові матеріали й конструкції змішувачів. Це ускладнює обґрунтований вибір моделі, зіставлення розрахункових та експериментальних результатів і побудову спрощених описів без втрати суттєвої інформації про процес.

**Метою дослідження є** систематизація та порівняльне оцінювання математичних моделей процесу змішування кормових матеріалів на основі єдиної схеми опису стану суміші, його еволюції, спостереження та кількісного оцінювання, а також обґрунтування переходів між моделями різного масштабу й умов їх вибору залежно від фізико-механічних і реологічних властивостей компонентів.

Для досягнення поставленої мети передбачено розв'язання таких завдань:

- обґрунтувати критерії зіставлення математичних моделей процесу змішування та сформулювати єдину операторну схему, яка пов'язує фізичний і модельний стани суміші, еволюцію модельних змінних, формування спостережуваних величин та кількісне оцінювання результату;

- систематизувати та порівняти статистичні, кінетичні, континуальні, RTD, зональні, марковські й частинкові моделі за математичним об'єктом, просторово-часовим масштабом, змінними стану, вихідними рівняннями, необхідними параметрами, способом експериментальної перевірки та одержуваними показниками;

- встановити взаємозв'язки між моделями різного рівня деталізації, визначити умови переходу між частинковим, континуальним, зональним та інтегральним описами, а також пов'язані з цими переходами втрати інформації про просторово-часовий стан суміші.

- визначити можливості, обмеження й умови застосування розглянутих моделей залежно від фізико-механічних і реологічних властивостей кормових компонентів, конструктивного типу змішувача, мети моделювання та доступних експериментальних даних.

### **Матеріали та методи досліджень.**

Дослідження має теоретико-методологічний характер і ґрунтується на критичному порівняльному синтезі наукових праць, у яких процес змішування дисперсних і багатокомпонентних матеріалів описано через змінні стану, рівняння або оператори їх еволюції, параметри моделі та кількісні показники якості суміші. Аналіз охоплював статистичні та кінетичні моделі [1–10], представлення на основі розподілу часу перебування, зональних балансів і марковських переходів [11–22], континуальні моделі перенесення та сегрегації [23–30], частинкове моделювання методом дискретних елементів [31–37], а також узагальнювальні й предметно орієнтовані дослідження [38–42].

Методологічну основу становили системний, структурно-функціональний і порівняльний підходи. Процес змішування розглядався як еволюція просторово розподіленої матеріальної системи, стан якої визначається розміщенням і рухом компонентів, їх контактною взаємодією та можливими проявами сегрегації. Відповідно, математичну модель трактували як узгоджену сукупність способу представлення стану суміші, закону його зміни, процедури формування спостережуваних величин і функціонала кількісного оцінювання. Це дало змогу порівнювати моделі незалежно від конструктивного типу змішувача.

Одиницею аналізу була математична постановка процесу, яку характеризували математичним об'єктом, змінними стану, просторово-часовим масштабом, законом еволюції, початковими й крайовими умовами, параметрами та способом їх ідентифікації, а також зв'язком розрахованих величин з експериментальними спостереженнями. За цими ознаками розмежовано мікроскопічні представлення окремих частинок і контактів, мезоскопічні зональні та марковські моделі, макроскопічні континуальні поля й інтегральні статистичні та кінетичні характеристики. RTD, коефіцієнти варіації та індекси змішування розглядалися як результати спостереження й кількісного оцінювання, а не як еквівалентні моделі внутрішнього стану системи [1, 5–6, 11–18, 38–39].

Порівняння здійснювали з урахуванням фізичного змісту змінних, розмірності параметрів, прийнятих припущень, залежності ефективних коефіцієнтів від режиму роботи, масштабу усереднення та процедури спостереження. Взаємозв'язки між рівнями опису встановлювали через аналіз просторового усереднення частинкових даних, формування континуальних полів, зональної дискретизації, побудови марковських переходів, отримання RTD, пробовідбору та скаляризації



розподілів. Для кожного переходу визначали збережені характеристики, необхідні припущення й інформацію, яка втрачається зі зменшенням просторової або часової деталізації [19, 21, 23, 28, 31, 35, 37–38].

Обґрунтованість узагальнень оцінювали за відповідністю математичного рівня опису, способу спостереження та критерію перевірки. Збіг інтегрального показника однорідності не розглядали як підтвердження локальної кінематики частинок, а відтворення RTD — як доказ просторової однорідності суміші. Застосовність моделей до кормових матеріалів визначали з урахуванням гранулометричного та морфологічного складу, когезії, вологості, деформованості, характеру контактів, геометрії змішувача й режиму процесу. Числові параметри, установлені для інших дисперсних систем, переносили на кормові суміші лише за фізичної подібності умов, тоді як для довговолокнистих, зволожених і в'язкопластичних компонентів оцінювали передусім придатність самої структури математичного опису [24, 29–30, 40–42].

Дослідження є методологічним синтезом, а не кількісним метааналізом, оскільки опубліковані результати відрізняються за властивостями матеріалів, масштабом опису, показниками якості та процедурами експериментальної перевірки. Тому висновки стосуються логічної сумісності математичних представлень, умов переходу між ними та меж втрати інформації, а не універсальної прогностичної точності окремої моделі для всіх типів кормових матеріалів.

#### Результати досліджень та обговорення.

Порівняння математичних підходів до опису змішування ускладнюється тим, що під спільною назвою «модель процесу» часто об'єднують об'єкти різної функціональної природи. Статистичні підходи характеризують вибірковий розподіл вмісту компонентів, його дисперсію та статистичний еталон випадкової суміші [1-6], кінетичні моделі описують часову зміну інтегральної характеристики неоднорідності суміші [7-10], RTD-підходи визначають розподіл часу перебування і відповідну часову вхідно-вихідну характеристику безперервної системи [11-18], зональні моделі ґрунтуються на балансах мас або концентрацій у виділених областях, марковські — на ймовірностях переходів між дискретними станами чи зонами [19-22], континуальні моделі задають просторові поля концентрації та потоки перенесення [23-30], DEM-моделі відтворюють рух і контактну взаємодію окремих частинок матеріалу [31-37]. У працях теоретико-методологічного характеру також наголошено на залежності результату від масштабу спостереження та на необхідності розмежовувати макроскопічне переміщення

матеріалу, гомогенізацію (молекулярну в рідких середовищах або зумовлену механічним перерозподілом частинок у дисперсних системах) і статистичне оцінювання досягнутого стану [38-40].

Отже, розгляд DEM, континуальних рівнянь, марковських ланцюгів, RTD, коефіцієнта варіації та індексів змішування як рівноправних альтернатив одного рівня є методологічно некоректним, оскільки вони виконують різні функції в математичному описі процесу. DEM, континуальні та марковські моделі задають стан системи і закономірності його еволюції з різним рівнем деталізації; RTD характеризує часову вхідно-вихідну поведінку системи; коефіцієнт варіації та індекси змішування є функціоналами кількісного оцінювання одержаних даних. Для узгодження цих складових сформовано операторну архітектуру, у якій розмежовано простір модельного стану, оператор відображення фізичного стану системи в цей простір, оператор еволюції, оператор спостереження та функціонал кількісного оцінювання. Розширену математичну постановку класу  $m$  доцільно визначати не одним рівнянням, а впорядкованою сукупністю:

$$\mathcal{M}_m = \langle \mathcal{Z}_m, P_m, F_m, H_m, Q_m; \theta_m, \eta_m \rangle, \quad (1)$$

де  $\mathcal{Z}_m$  — простір модельних станів;  $P_m$  — оператор модельного представлення;  $F_m$  — оператор або генератор еволюції стану;  $H_m$  — оператор спостереження;  $Q_m$  — функціонал кількісного оцінювання;  $\theta_m$  — сукупність параметрів моделі, що характеризують властивості матеріалу, геометрію змішувача, режим його роботи та прийняті залежності між змінними;  $\eta_m$  — параметри схеми спостереження, зокрема просторове вікно, маса і положення проб, частота реєстрації або конфігурація трасерного експерименту.

Нехай  $S(t) \in \mathcal{S}$  позначає фактичний фізичний стан суміші, до якого належать просторове розташування компонентів, їхні швидкості та орієнтації, контактна структура, локальні деформації, внутрішні властивості матеріалу й інші характеристики, необхідні для повного фізичного опису. Такий стан у реальному змішувачі практично недоступний для безпосереднього визначення, тому модель використовує його редуковане представлення, а подальшу динаміку відтворює у власному просторі станів:

$$\begin{aligned} z_m(0) &= P_m[S(0)], \\ z_m(t) &= \mathcal{E}_m^t(z_m(0), u; \theta_m) \approx P_m[S(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

де  $z_m(t) \in \mathcal{Z}_m$  — стан моделі;  $\mathcal{E}_m^t$  — оператор перенесення модельного стану на інтервалі  $t$ ;  $u(t)$  — зовнішні режимні або керувальні впливи. Наближений характер другого співвідношення має принципове значення, оскільки результат

еволюції модельного стану повинен узгоджуватися з проекцією фактичного стану суміші у простір  $Z_m$  у межах заданої похибки, однак модель не відтворює характеристик повного стану  $S(t)$ , які не зберігаються оператором  $P_m$ .

Оператор  $P_m$  здійснює редукцію повного фізичного стану суміші до сукупності змінних, які зберігаються у відповідному модельному представленні. У DEM-моделі змінними стану є координати й орієнтації частинок, їхні поступальні та кутові швидкості, а контактна взаємодія описується відповідними силовими законами [31-37]. У континуальній моделі стан описується просторовими полями концентрації компонентів, швидкості, густини та, залежно від постановки, напружень [23-30]. У зонально-марковській моделі стан задається вектором мас або концентрацій компонентів у виділених зонах, тоді як оператор міжзонних переходів визначає його еволюцію [19-22]. Коефіцієнт варіації, індекси змішування та моменти RTD у загальному випадку не є змінними стану, а являють собою функціонали даних, одержаних унаслідок спостереження. Інтегральна характеристика неоднорідності набуває статусу змінної стану лише в спеціально редукованій кінетичній моделі [1-18, 38-39].

Еволюція модельного стану задається оператором  $F_m$ , який у неперервному часі виконує функцію генератора динаміки, а в дискретному описі з кроком  $\Delta t$  набуває форми оператора переходу  $\mathcal{E}_m^{\Delta t}$ . Відповідні співвідношення мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{z}_m(t) &= F_m(z_m'(t); u(t); \theta_m), \\ z_m^{k+1} &= \mathcal{E}_m^{\Delta t}(z_m^k, u^k, \theta_m). \end{aligned} \quad (3)$$

Конкретна форма закону еволюції визначається рівнем модельного представлення. У частинковій моделі вона задається рівняннями руху та законами контактної взаємодії, у континуальній – рівняннями балансу з адвективними, дифузійними та сегрегаційними потоками, у зональній – системою матеріальних балансів виділених областей, у марковській – оператором або матрицею переходів, у редукованій кінетичній моделі – рівнянням зміни інтегральної характеристики неоднорідності [7-10, 19-37]. Фізичні механізми перенесення, зсувного переміщення, дифузійного перерозподілу та сегрегації враховуються безпосередньо в рівняннях еволюції або через прийняті матеріальні й емпіричні залежності, але не ототожнюються з показниками оцінювання результату. При цьому CFD є обчислювальним підходом до моделювання континуальних полів, FEM, FDM і FVM – методами дискретизації відповідних рівнянь, тоді як DEM описує рух і контактну взаємодію окремих частинок [24, 28-37].

Перехід від внутрішнього стану системи до величин, доступних для зіставлення з експериментальними даними, здійснюється відповідними операторами спостереження. Для модельного та фізичного станів ці відображення записуються як

$$\begin{aligned} \hat{y}_m(t) &= H_m(z_m'(t); \eta_m), \\ y^{\text{exp}}(t) &= H_{\text{exp}}(S; (t); \eta_{\text{exp}}) + \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\hat{y}_m(t)$  – прогнозовані моделлю спостережувані величини;  $y^{\text{exp}}(t)$  – результати фізичного експерименту;  $H_m$  – оператор формування спостережуваних величин із модельного стану;  $H_{\text{exp}}$  – оператор експериментального вимірювання;  $\eta_m$  і  $\eta_{\text{exp}}$  – параметри відповідних процедур спостереження;  $\varepsilon(t)$  – похибка експериментального вимірювання.

Для кількісного зіставлення до модельних та експериментальних спостережень застосовується однаковий функціонал  $Q$ :

$$\hat{q}_m = Q(\hat{y}_m), \quad q^{\text{exp}} = Q(y^{\text{exp}}). \quad (5)$$

Під час оцінювання однорідності оператори  $H_m$  і  $H_{\text{exp}}$  повинні формувати вибірки концентрацій, узгоджені за кількістю, розташуванням, масою або об'ємом проб та моментами їх відбору, функціонал  $Q$  обчислює за цими вибірками коефіцієнт варіації або прийнятий індекс змішування. Для визначення характеристик RTD зіставляються часові залежності концентрації трасера в однаково заданому контрольному перерізі, за якими розраховуються середній час перебування та дисперсія розподілу (рис. 1). Під час енергетичного оцінювання вихідними спостереженнями є реалізації крутного моменту і кутової швидкості, а результатом функціонального перетворення – робота приводу або питомі витрати енергії за однаковий інтервал процесу. Тому відмінність між  $\hat{q}_m$  і  $q^{\text{exp}}$  може характеризувати адекватність моделі лише за узгоджених просторово-часових параметрів спостереження [1, 5-6, 38-39].

#### Статистичні та кінетичні моделі.

Статистичні й кінетичні моделі описують процес змішування на послідовних, але не тотожних рівнях редукції. У статистичному представленні математичним об'єктом є розподіл концентрації компонента у вибірках, сформованих заданим оператором спостереження. Кінетична модель доповнює це представлення законом зміни вибраної статистичної характеристики в часі. Отже, кінетичне рівняння описує не повний просторовий стан суміші, а еволюцію конкретного функціонала, визначеного для незмінної схеми спостереження.

Статистичне представлення процесу змішування ґрунтується на розподілі концентрації  $p_\eta(c; t)$ , одержаному для сукупності проб або контрольних об'ємів, параметри яких

задано схемою спостереження  $\eta$ . Середнє значення, дисперсія, коефіцієнт варіації та індекси змішування є характеристиками цього розподілу, а не незалежними описами внутрішнього стану суміші. Тому зміна маси, форми чи просторового розташування проб змінює не тільки похибку оцінювання, але й сам масштаб неоднорідності, доступний для спостереження [1, 5-6].

Для відокремлення структурованої неоднорідності від флуктуацій, властивих випадковому розподілу частинок, доцільно використовувати різницю

$$\xi_{\eta}(t) = \sigma_{\eta}^2(t) - \sigma_{r,\eta}^2, \quad (6)$$

де  $\sigma_{\eta}^2(t)$  – дисперсія концентрації за прийнятої схеми спостереження;  $\sigma_{r,\eta}^2$  – дисперсія статистично випадкової суміші, визначена для тієї самої маси й геометрії проби;  $\xi_{\eta}(t)$  – залишкова структурована неоднорідність. У звичайному переході від сегрегованого до випадкового стану  $\xi_{\eta}(t) \geq 0$ , проте для впорядкованих сумішей можливі значення  $\sigma_{\eta}^2 < \sigma_{r,\eta}^2$ .

Для бінарної суміші однакових за масою частинок за незалежного випадкового розподілу і фіксованої кількості  $n_p$  частинок у пробі статистична межа наближено визначається як

$$\sigma_{r,\eta}^2 = \frac{\bar{c}(1-\bar{c})}{n_p}. \quad (7)$$

Наведене співвідношення не можна безпосередньо застосовувати до полідисперсних кормових сумішей, частинки яких відрізняються масою та розмірами. У цьому випадку дисперсія випадкової суміші  $\sigma_r^2$  залежить від масової частки компонента, розподілу мас його частинок, маси проби, а за вибіркового відбору – також від імовірності включення частинок різних фракцій у пробу. Тому  $\sigma_r^2$  необхідно розраховувати за моделлю, що враховує ці чинники, або визначати експериментально за повторними пробами з референтної випадково сформованої суміші, відібраними за тією самою схемою [5-6, 38-39]. Отже, для дискретних матеріалів нульова дисперсія не є загальною статистичною межею процесу змішування.

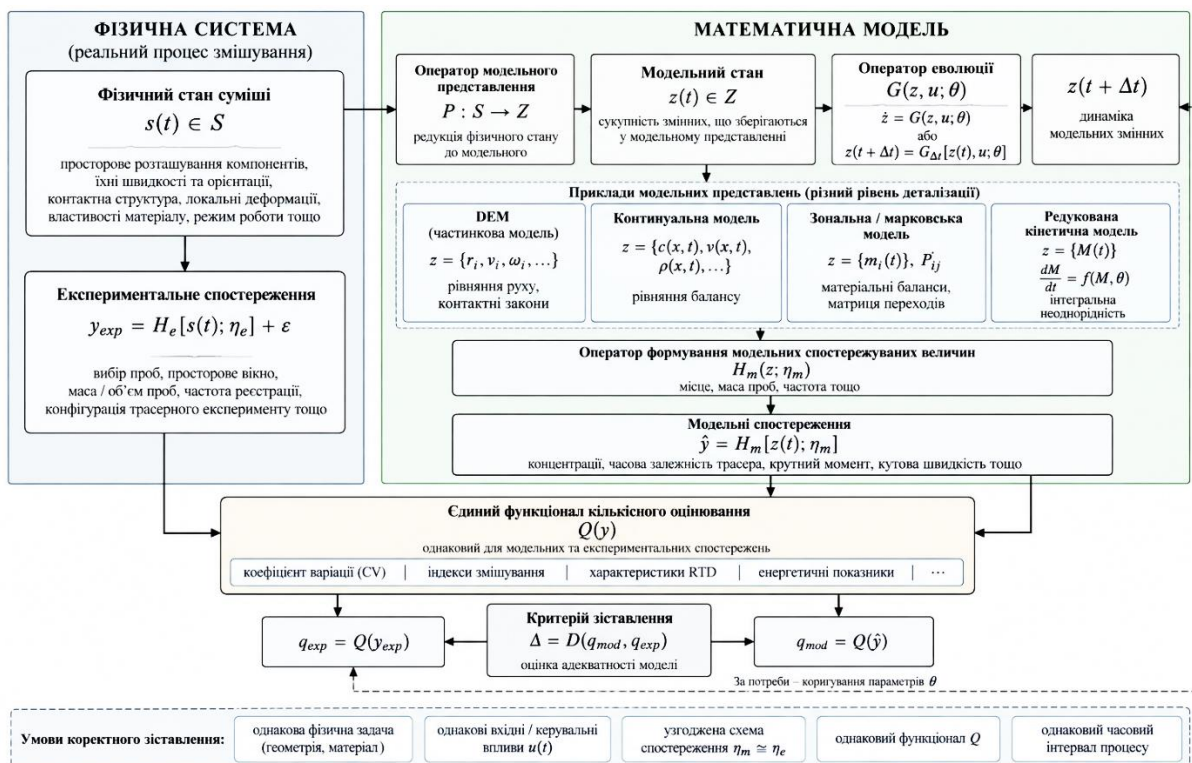


Рис.1. Операторна схема формування, зіставлення та експериментальної перевірки показників математичної моделі процесу змішування

Врахування початкового та випадкового станів реалізується, зокрема, індексом Лейсі:

$$M_L(t) = \frac{\sigma_{0,\eta}^2 - \sigma_{\eta}^2(t)}{\sigma_{0,\eta}^2 - \sigma_{r,\eta}^2}, \quad (8)$$

де  $\sigma_{0,\eta}^2$  – дисперсія, що відповідає прийнятому початковому сегрегованому стану;  $\sigma_{r,\eta}^2$  – дисперсія статистично випадкової суміші за

заданої схеми відбору проб;  $\sigma_{\eta}^2$  – поточна дисперсія вмісту компонента у пробах. За умови  $\sigma_{r,\eta}^2 \leq \sigma_{\eta}^2 \leq \sigma_{0,\eta}^2$  індекс Лейсі належить інтервалу  $0 \leq M_L \leq 1$ : значення  $M_L = 0$  відповідає початковому сегрегованому стану, а  $M_L = 1$  – статистично випадковому розподілу [2-3]. Формально можливі також значення за межами



цього інтервалу. Якщо  $\sigma_{\eta}^2 < \sigma_{r,\eta}^2$ , то  $M_L > 1$ , що може свідчити про більш упорядкований порівняно з випадковим розподіл компонентів або про некоректне визначення  $\sigma_{r,\eta}^2$ . Якщо  $\sigma_{\eta}^2 > \sigma_{0,\eta}^2$ , то  $M_L < 0$ , що вказує на посилення сегрегації відносно прийнятого початкового стану або на невідповідність початкового еталона. Такі значення не характеризують ступінь змішування понад одиницю або нижче нуля, а мають діагностичне значення й потребують перевірки еталонних дисперсій та процедури відбору проб.

Коефіцієнт варіації нормує стандартне відхилення за середньою концентрацією, але не враховує ні початкової дисперсії, ні випадкової межі. Тому однакові значення  $CV$ , одержані для різних концентрацій контрольного компонента або різних параметрів  $\eta$ , не є безпосередньо еквівалентними. Для зіставлення режимів змішування схема спостереження, середня концентрація та спосіб визначення компонента мають залишатися незмінними [5-6].

Подання результатів відбору проб лише через дисперсію або коефіцієнт варіації не дає змоги визначити характер розподілу концентрацій у суміші. За однакових середнього значення та дисперсії вибірка може мати одновершинний розподіл, містити кілька відокремлених груп концентрацій або поодинокі проби з різко відмінним вмістом компонента. Тому для виявлення застійних зон, стійких скупчень компонентів і локальної сегрегації разом із дисперсією або  $CV$  необхідно аналізувати емпіричний розподіл концентрацій та їх залежність від місця відбору проб [1, 38-39].

Статистична модель характеризує неоднорідність суміші за результатами конкретної процедури спостереження, але не описує механізм її формування та часову еволюцію. Одержаний статистичний показник може використовуватися як змінна кінетичної моделі лише за незмінної схеми спостереження  $\eta$ .

Кінетична модель процесу змішування задає часову еволюцію вибраної інтегральної характеристики. Для дискретної суміші такою характеристикою доцільно приймати  $\xi_{\eta}(t)$ , визначену рівнянням (6), оскільки вона відокремлює поточну неоднорідність від флуктуацій випадкової суміші. За одномодового релаксаційного наближення маємо:

$$\frac{d\xi_{\eta}}{dt} = -k_{\sigma}\xi_{\eta}, \quad \xi_{\eta}(t) = \xi_{\eta}(0) \exp(-k_{\sigma}t), \quad (9)$$

де  $k_{\sigma}$  – параметр швидкості зменшення надлишкової дисперсії. Таке рівняння відповідає монотонному наближенню до статистично випадкового стану і не враховує повторного розшарування суміші [3-4, 8-9].

За незмінної протягом процесу середньої концентрації компонента рівняння (9) можна записати через коефіцієнт варіації:

$$CV_{\eta}^2(t) - CV_{r,\eta}^2 = [CV_{\eta}^2(0) - CV_{r,\eta}^2] \exp(-k_{\sigma}t), \quad (10)$$

де  $CV_{r,\eta}$  – коефіцієнт варіації, що відповідає випадковій межі. Отже, експоненційно зменшується не безпосередньо  $CV$ , а різниця його квадратів відносно статистично обумовленого залишкового рівня.

Звідси

$$CV_{\eta}(t) = \sqrt{CV_{r,\eta}^2 + [CV_{\eta}^2(0) - CV_{r,\eta}^2] \exp(-k_{\sigma}t)}.$$

Лише за умови  $CV_{r,\eta} \ll CV_{\eta}(t)$  ця залежність наближено зводиться до експоненти для самого коефіцієнта варіації:

$$CV_{\eta}(t) \approx CV_{\eta}(0) \exp\left(-\frac{k_{\sigma}}{2}t\right).$$

Тому параметри, одержані апроксимацією  $CV(t)$ ,  $CV^2(t)$  та індексу змішування, мають різний зміст і не можуть ототожнюватися без відповідного перетворення.

Для заданого допустимого значення  $CV_* > CV_{r,\eta}$  тривалість змішування в межах одномодової моделі становить

$$t_* = \frac{1}{k_{\sigma}} \ln \frac{CV_{\eta}^2(0) - CV_{r,\eta}^2}{CV_*^2 - CV_{r,\eta}^2}. \quad (11)$$

Ця оцінка має зміст лише за монотонного зменшення неоднорідності та незмінної випадкової межі. Якщо в процесі змінюються середня концентрація в контрольній області, кількість частинок у пробі або сама схема спостереження, значення  $k_{\sigma}$  включатиме не тільки кінетику змішування, але й зміну способу формування показника.

Одномодова залежність є прийнятною, якщо часову зміну  $\xi_{\eta}$  визначає один домінуючий масштаб релаксації. За наявності швидкого початкового перерозподілу та повільного обміну із застійними або слабкоактивними зонами доцільніше багатомодове представлення

$$\xi_{\eta}(t) = \sum_{j=1}^r a_j \exp(-k_j t), \quad \sum_{j=1}^r a_j = \xi_{\eta}(0), \quad (12)$$

де  $a_j$  визначають внесок окремих мод, а  $k_j$  – відповідні швидкості релаксації. У разі монотонного зменшення неоднорідності приймають  $a_j \geq 0$  і  $k_j > 0$ . Проте швидкі й повільні експоненційні складові не можна без додаткових просторових даних однозначно ототожнювати з конвективним перенесенням, дифузійним перерозподілом або міжзонним обміном. Вони характеризують часові масштаби спостережуваного показника, а не безпосередньо фізичні механізми [8-9].

Для кормових матеріалів із вираженою схильністю до сегрегації монотонна релаксація не є загальним випадком. Вплив одночасного змішування та розшарування доцільно подавати балансом

$$\frac{d\xi_\eta}{dt} = -\Phi_{\text{mix}}(\xi_\eta, w, \theta) + \Phi_{\text{seg}}(\xi_\eta, w, \theta), \quad (13)$$

де  $\Phi_{\text{mix}}$  характеризує швидкість зменшення неоднорідності, а  $\Phi_{\text{seg}}$  – її формування внаслідок сегрегації. Мінімум кінетичної кривої досягається за умови рівності цих складових. Тому подальше збільшення тривалості роботи змішувача не обов'язково покращує результат: після досягнення мінімальної неоднорідності може встановлюватися ненульовий стаціонарний рівень або розпочинатися повторне розшарування [7, 10].

За однією часовою залежністю  $CV(t)$  окремі внески  $\Phi_{\text{mix}}$  і  $\Phi_{\text{seg}}$  загалом не ідентифікуються: спостерігається лише їх результуюча дія. Для розділення цих процесів необхідні додаткові дані про просторовий розподіл компонентів, міжзонні потоки або зміни складу в характерних областях змішувача. З цієї ж причини збільшення кількості експоненціальних складових у рівнянні (12) без достатньої кількості часових точок може покращувати формальну апроксимацію, але не забезпечувати фізичної визначеності параметрів.

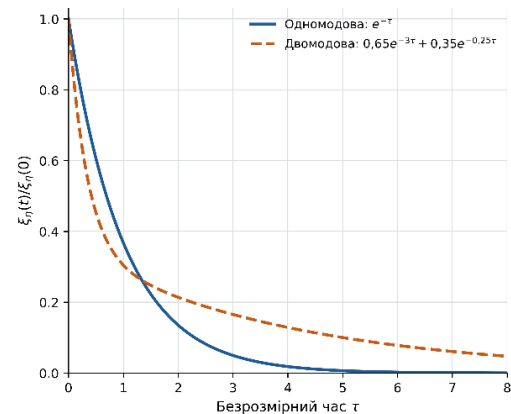
Параметри кінетичної моделі не є універсальними константами змішувача, а залежать від складу й властивостей матеріалу, рівня завантаження, режиму роботи, конструкції робочих органів та вибраного показника неоднорідності. Крім того, через залежність  $\xi_\eta$  від оператора спостереження значення  $k_\sigma$  може змінюватися зі зміною маси проби, просторової роздільності або частоти реєстрації навіть для того самого фізичного процесу.

Отже, статистична модель відповідає на питання про зафіксований розподіл концентрації в певний момент, а кінетична – про зміну обраної статистичної характеристики в часі. Обидва підходи придатні для визначення досягнутої однорідності та раціональної тривалості процесу, але не зберігають локалізації неоднорідності, структури циркуляції й безпосередньої інформації про сили та траєкторії частинок. Такі характеристики потребують переходу до континуального, зонального або частинкового представлення.

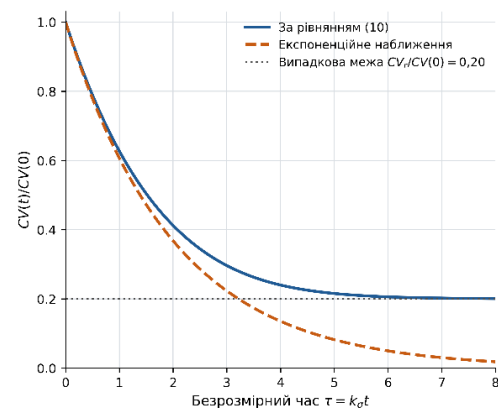
Для зіставлення одномодового і багатомодового описів та визначення наслідків урахування випадкової межі виконано безрозмірний розрахунок за рівняннями (9), (10) і (12) (рис. 2). У двомодовому прикладі виділено швидко початкову та повільну завершальну складові зменшення неоднорідності.

Одномодова модель задає один характерний часовий масштаб, тому нормована надлишкова дисперсія зменшується за однією експонентою. Двомодова залежність поєднує швидко складову  $0,65e^{-3\tau}$  і повільну складову  $0,35e^{-0,25\tau}$ . У результаті після інтенсивного початкового

зменшення неоднорідності формується повільний кінцевий відрізок кривої. Апроксимація такої залежності однією експонентою може зміщувати оцінки константи швидкості та тривалості досягнення заданої однорідності.



а)



б)

Рис. 2. Розрахункова ілюстрація властивостей кінетичних моделей змішування: а – одномодова та двомодова релаксація нормованої надлишкової дисперсії; б – вплив ненульової випадкової межі на часову зміну нормованого коефіцієнта варіації

За ненульового значення  $CV_r$  розв'язок рівняння (10) наближається до статистичної межі випадкової суміші, тоді як спрощена експоненціальна залежність прямує до нуля. Отже, наближення  $CV(t) \approx CV(0)e^{-k_\sigma t/2}$  придатне лише на ділянці, де  $CV_r$  є малим порівняно з поточним значенням  $CV(t)$ . Поблизу випадкової межі кінетичну залежність доцільно визначати для величини  $CV^2(t) - CV_r^2$ , а не безпосередньо для  $CV(t)$  [3-10].

**Континуальні балансово-транспортні моделі.** Континуальне представлення застосовують, коли предметом розрахунку є не траєкторії окремих частинок, а просторове переміщення зон із різним вмістом компонентів. Стан суміші задається полями об'ємної густини  $\rho(x,t)$ , швидкості  $v(x,t)$  і масових часток

компонентів  $c_i(x, t)$ , для яких  $\sum_i c_i = 1$ . Таке представлення потребує просторового усереднення: характерний розмір області усереднення  $\ell_a$  має охоплювати достатню кількість частинок, але залишатися меншим за розмір зон концентраційної неоднорідності  $L_c$ , тобто  $d_p \ll \ell_a \ll L_c$ , де  $d_p$  – характерний розмір частинок.

За відсутності утворення або втрати речовини всередині розрахункової області рівняння збереження загальної маси, імпульсу та маси  $i$ -го компонента суміші записуються як:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) &= \nabla \cdot T + \rho g, \\ \frac{\partial (\rho c_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_i v) &= -\nabla \cdot J_i, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $T$  – тензор напружень у матеріальному середовищі;  $J_i$  – потік компонента відносно середньої швидкості суміші. У змішувачі періодичної дії на непроникних поверхнях задають відсутність нормального потоку компонента. У безперервному апараті витрати та склад матеріалу встановлюють на вхідних і вихідних межах, дія лопаті або шнека за явного відтворення їх геометрії задається умовами на рухомих поверхнях, а подання цієї дії як розподіленої об'ємної сили допустиме лише в моделях із відповідною апроксимацією робочого органа.

Потік компонента доцільно розділити на механічне дисперсійне перенесення та спрямовану сегрегацію:

$$J_i = -\rho D_i^{\text{eff}} \nabla c_i + \rho c_i w_i^{\text{seg}}, \quad \sum_i J_i = 0, \quad (15)$$

де  $D_i^{\text{eff}}$  – тензор ефективної дисперсії;  $w_i^{\text{seg}}$  – швидкість переміщення компонента відносно суміші. Якщо зміною насипної густини суміші внаслідок ущільнення або розпушення матеріалу можна знехтувати, рівняння перенесення  $i$ -го компонента набуває вигляду:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + v \cdot \nabla c_i = \nabla \cdot (D_i^{\text{eff}} \nabla c_i) - \nabla \cdot (c_i w_i^{\text{seg}}). \quad (16)$$

Перший член у лівій частині рівняння (16) характеризує локальну зміну концентрації  $i$ -го компонента, а другий – його адвективне перенесення із загальним потоком матеріалу. За відсутності дисперсії та сегрегації адвекція переміщує і деформує концентраційні області, але сама по собі не забезпечує необоротного вирівнювання складу. Згладжування локальних градієнтів концентрації визначається дисперсійним потоком, тоді як сегрегаційне переміщення частинок може підтримувати або посилювати ці градієнти та формувати зони переважного накопичення окремих компонентів. Отже, збільшення інтенсивності руху матеріалу не обов'язково підвищує однорідність суміші,

якщо одночасно посилюється сегрегація частинок за розміром, густиною або формою [23–30].

У моделях сухих сипких матеріалів  $D_i^{\text{eff}}$  характеризує не молекулярну дифузію, а механічне розсіювання частинок унаслідок пересипання, зіткнень і локальних зсувів. Його визначають за швидкістю поширення трасера, зміною профілю концентрації або за усередненими результатами DEM. Хаджра та Хахар [25] експериментально визначали самодифузію частинок у поперечному перерізі обертового барабана. Лю та співавтори [28] поєднали розрахунок руху матеріалу методом скінченних елементів із рівнянням адвективно-дисперсійного перенесення, а Чжен та співавтори [29] використали континуальний підхід для розрахунку просторової зміни складу гранулярної суміші в обертовому барабані. Ці результати показують, що  $D_i^{\text{eff}}$  не є універсальною характеристикою матеріалу, а його значення залежить від частоти обертання, заповнення апарата, геометрії робочої зони та властивостей частинок.

Для бідисперсної сипкої суміші, в якій розділення компонентів зумовлене різницею розмірів частинок у зсувному шарі, сегрегаційний потік може бути заданий як

$$J^{\text{seg}} = \rho S \mid \dot{\gamma} \mid c(1-c) e_s, \quad (17)$$

де  $S$  – характерний масштаб сегрегаційного переміщення;  $\dot{\gamma}$  – локальна швидкість зсуву;  $e_s$  – напрям переважного переміщення компонента. Множник  $c(1-c)$  забезпечує зникнення потоку в однокомпонентних областях. Такі залежності використовують для моделювання конкуренції між просіюванням дрібних частинок крізь порожнини шару та їх зворотним дисперсійним перемішуванням [26–27]. У моделі лопатевого змішувача представленого у дослідженнях Яна та співавторів [30] аналогічне розмежування потоків дало змогу відтворити просторове розділення бідисперсної суміші. Рівняння (17) не є універсальним для кормових матеріалів: для багатокомпонентної суміші відносний потік необхідно задавати окремо для кожної фракції з урахуванням розміру, густини, форми та вологості частинок.

Якщо стан компонента описується густиною ймовірності його розташування  $p_i(x, t)$ , відповідне рівняння Фоккера–Планка у дрейфово-дисперсійному наближенні має вигляд

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\nabla \cdot [(v + w_i^{\text{seg}}) p_i] + \nabla \cdot (D_i^{\text{eff}} \nabla p_i). \quad (18)$$

Дрейфовий складник у рівнянні (18) визначає спрямоване переміщення частинок, а дисперсійний – розширення області їх можливого розташування. Тому рівняння Фоккера–Планка слід розглядати не як окремий механізм змішування, а як імовірнісну форму

балансу між спрямованим перенесенням, випадковим розсіюванням і сегрегацією [23-27].

Для практичного розрахунку задають геометрію робочого об'єму, ступінь його заповнення, закон руху лопатей або шнека, початкові поля  $c_i(x, 0)$ , параметри матеріалу та умови його взаємодії зі стінками. Поле швидкості  $v$  одержують із рівняння імпульсу, експериментальних вимірювань або шляхом просторово-часового усереднення результатів DEM. Останній варіант забезпечує перехід від частинкового до континуального рівня, але усуває інформацію про траєкторії окремих частинок, контакти, орієнтацію та локальні флуктуації швидкості.

Чисельна реалізація повинна зберігати баланс маси компонентів і відтворювати рухомі межі робочих органів. FVM (Finite Volume Method) зручний для консервативного дискретизування балансових рівнянь, FEM (Finite Element Method) – для складної геометрії та поєднання перенесення з механікою матеріального середовища; FDM (Finite Difference Method) – переважно для областей із регулярною сіткою. CFD (Computational Fluid Dynamics) у цьому переліку є не окремим рівнянням або методом дискретизації, а обчислювальним середовищем розрахунку полів. Рух лопатей і шнеків відтворюють за допомогою рухомих, деформованих або ковзних сіток чи методів зануреної границі. Вибір чисельної схеми не компенсує невизначеності в залежностях для  $T$ ,  $D_i^{\text{eff}}$  і  $w_i^{\text{seg}}$ , тому ці параметри необхідно ідентифікувати для конкретного матеріалу та режиму роботи змішувача.

Розраховане поле концентрації не можна безпосередньо порівнювати з вибірковою  $CV$ , одержаним у фізичному експерименті. Для області  $\Omega_r$ , що відповідає масі, геометрії та положенню  $r$ -ї проби, прогнозована концентрація визначається віртуальним відбором:

$$\hat{c}_{i,r}(t) = \frac{\int_{\Omega_r} \rho(x,t) c_i(x,t) dv}{\int_{\Omega_r} \rho(x,t) dv}. \quad (19)$$

Із сукупності  $\hat{c}_{i,r}(t)$  розраховують дисперсію,  $CV$  або індекс змішування за тією самою процедурою, що й для експериментальних проб. Використання концентрацій в окремих чисельних комірках замість віртуальних проб дає показник, залежний від розміру сітки, і не забезпечує коректного зіставлення з експериментом. Рівняння (19) конкретизує оператор синтетичного спостереження  $H_m$ , введений у рівнянні (4), та забезпечує однакову просторову основу оцінювання модельних і фізичних даних [1, 5-6, 38-39].

Континуальний підхід найбільш обґрунтований для сипких сумішей, у яких кожний об'єм усереднення містить достатню

кількість частинок, а локальна поведінка може бути описана через середні поля. Для полідисперсної суміші необхідно вводити окремі концентрації та параметри перенесення для основних фракцій. У когезійних і зволжених кормах модель повинна враховувати залежність напружень від ущільнення і вологості, границю текучості та руйнування агломератів. Для довговолоконистих компонентів одного скалярного поля концентрації недостатньо, оскільки воно не відображає орієнтацію волокон, їх взаємне зачеплення та формування просторового каркаса; у цьому випадку потрібне додаткове поле орієнтації або поєднання континуального опису з DEM.

Отже, безпосереднім результатом континуальної моделі є просторово-часові поля руху і складу суміші. Дисперсія,  $CV$  та індекси змішування одержуються з цих полів лише після відтворення заданої процедури відбору проб. Це дає змогу застосовувати континуальний підхід не тільки для розрахунку загальної зміни неоднорідності, а й для локалізації застійних зон, визначення напрямків сегрегації та оцінювання впливу геометрії і режиму роботи змішувача на просторовий розподіл кормових компонентів.

**RTD, зональні та марковські моделі.** Для безперервних змішувачів результат процесу визначається не лише інтенсивністю перерозподілу компонентів усередині робочого об'єму, а й тривалістю їх перебування в апараті. Частина матеріалу може залишати змішувач майже одразу після надходження, тоді як інша – багаторазово проходити через активні зони або затримуватися в областях слабого переміщення. Тому моделі розподілу часу перебування, зональні баланси та марковські ланцюги описують різні сторони одного редукованого представлення потоку матеріалу. RTD (Residence Time Distribution) встановлює часовий зв'язок між входом і виходом, зональна модель зберігає розподіл матеріалу між виділеними областями, а марковська матриця визначає його переміщення між ними [11-22].

Експериментальну RTD-характеристику безперервного змішувача одержують введенням трасера на вході та реєстрацією його концентрації на виході. Для імпульсного введення нормована густина розподілу часу перебування визначається як

$$E(t) = \frac{c_{tr}^{\text{out}}(t)}{\int_0^\infty c_{tr}^{\text{out}}(\tau) d\tau}, \quad \int_0^\infty E(t) dt = 1, \quad (20)$$

де  $c_{tr}^{\text{out}}(t)$  – виміряна концентрація трасера у вихідному потоці. Середній час перебування та дисперсія розподілу становлять

$$\bar{t} = \int_0^\infty t E(t) dt, \quad \sigma_t^2 = \int_0^\infty (t - \bar{t})^2 E(t) dt. \quad (21)$$

Ці параметри мають різне прикладне



значення. Величина  $\bar{t}$  характеризує середню тривалість проходження матеріалу через змішувач, тоді як  $\sigma_t^2$  відображає розкид індивідуальних часів перебування. Ранній максимум  $E(t)$  може бути ознакою переважного каналу швидкого проходження матеріалу, а протяжний правий «хвіст» – затримання частини матеріалу у слабообмінних або застійних областях. Проте сама форма RTD не дає однозначного просторового пояснення: подібний вихідний сигнал може утворюватися за різної конфігурації внутрішніх потоків [11-18].

За умови стаціонарності процесу, пасивності трасера та лінійності входу-вихідного перетворення зміна концентрації компонента на виході визначається згортою вхідного сигналу з RTD:

$$c_i^{\text{out}}(t) = \int_0^\infty E(\tau) c_i^{\text{in}}(t - \tau) d\tau. \quad (21)$$

Співвідношення (22) дає змогу оцінити, наскільки змішувач послаблює коливання подачі компонента. Ширша RTD зазвичай забезпечує сильніше часове згладжування короточасних збурень, однак може супроводжуватися збільшенням частки матеріалу з надмірно коротким або надмірно тривалим перебуванням. Тому зростання  $\bar{t}$  або  $\sigma_t$  саме по собі не свідчить про підвищення однорідності продукції.

У дослідженні Гао та співавторів експериментальні RTD використовували для розділення впливу коливань живлення, внутрішнього перерозподілу матеріалу та сегрегації на дисперсію складу вихідного потоку. Такий підхід показує практичне призначення RTD: вона дає змогу прогнозувати передачу вхідних збурень через безперервний змішувач, але не замінює безпосередньої оцінки просторової або вибіркової однорідності суміші [15-18]. Це підтверджено на прикладі безперервного конвективного змішування ацетамінофену з лактозою [17].

Для компонентів із близькими фізико-механічними властивостями може застосовуватися спільна функція  $E(t)$ . Якщо ж компоненти відрізняються розміром, густиною, сипкістю або когезійністю, їхні траєкторії та ймовірності виходу можуть бути неоднаковими. У такому разі необхідно визначати компонентні характеристики  $E_i(t)$ . Відмінність між ними є вже не випадковою похибкою трасерного експерименту, а проявом селективного проходження або сегрегації матеріалу. Особливо це важливо для кормових сумішей, у яких гранульовані, подрібнені, волокнисті та зволожені компоненти можуть мати різні швидкості осьового перенесення й різну схильність до затримання.

Отже, експериментальна RTD у прийнятій операторній архітектурі є результатом спостереження  $H_{\text{exp}}$ , тоді як апроксимація цієї

кривої каскадом ідеально перемішаних комірок, моделлю осьової дисперсії або зонального системою вже становить математичну модель внутрішнього перенесення. Таке розмежування усуває поширене ототожнення вимірної трасерної кривої з моделлю стану суміші.

Зональний підхід застосовують тоді, коли повний просторовий розподіл концентрації є надмірним для поставленої задачі, але зведення всього змішувача до однієї RTD не дає змоги розрізнити активні, циркуляційні та слабообмінні області. Робочий об'єм поділяють на  $N$  зон, кожна з яких характеризується масою матеріалу  $m_j$  і середньою концентрацією компонента  $c_{i,j}$ . Межі зон повинні відповідати встановленій структурі потоку, а не лише геометричному поділу апарата.

Для вертикального шнекового змішувача такими областями можуть бути зона безпосередньої дії шнека, нижня зона захоплення матеріалу, верхня зона виходу матеріалу з висхідного потоку та його радіального перерозподілу, пристінна зона низхідного руху і зона випуску. Їх розташування може визначатися за трасерними дослідженнями, відеореєстрацією, PEPT (Positron Emission Particle Tracking), локальним відбором проб або траєкторіями DEM. Такий поділ має фізичний зміст лише тоді, коли матеріал усередині кожної зони перемішується швидше, ніж відбувається обмін між зонами.

Матеріальний баланс компонента  $i$  у зоні  $j$  можна записати як

$$\frac{d(m_j c_{i,j})}{dt} = q_{\text{in},j} c_i^{\text{in}} + \sum_{\ell \neq j} q_{\ell j} c_{i,\ell} - (q_{\text{out},j} + \sum_{\ell \neq j} q_{j\ell}) c_{i,j}, \quad (23)$$

де  $q_{\ell j}$  – потік матеріалу із зони  $\ell$  до зони  $j$ ;  $q_{j\ell}$  – потік у зворотному напрямку;  $q_{\text{in},j}$  і  $q_{\text{out},j}$  – зовнішні вхідний та вихідний потоки.

Концентрація компонента у сумарному вихідному потоці визначається як

$$c_i^{\text{out}}(t) = \frac{\sum_{j=1}^N q_{\text{out},j} c_{i,j}(t)}{\sum_{j=1}^N q_{\text{out},j}}. \quad (24)$$

На відміну від інтегральної кінетичної моделі, система (23) зберігає інформацію про місце накопичення компонента. Вона дає змогу відрізнити недостатній обмін між верхньою і нижньою частинами апарата від швидкого проходження матеріалу до випускного отвору або його затримання у пристінній області.

У роботі Маріха та співавторів безперервний порошковий змішувач було спочатку представлено ланцюгом із десяти послідовних перемішуваних комірок, а потім розширено до двовимірної зональної схеми для врахування поперечного перемішування. Параметри моделі

визначали за трасерною RTD, отриманою методом аналізу зображень. Одновимірною схемою відтворювала осьове проходження матеріалу, тоді як двовимірною давала змогу окремо врахувати поперечний обмін і циркуляцію [20].

Принциповим обмеженням зональної моделі є не кількість зон як така, а ідентифікованість міжзонних потоків. За однією вихідною RTD неможливо однозначно визначити всі  $q_{j\ell}$ : різні структури внутрішнього обміну можуть формувати близькі вихідні сигнали. Тому складну зональну схему необхідно доповнювати локальними вимірюваннями або даними DEM/CFD. Інакше збільшення кількості зон створює додаткові параметри без відповідного збільшення експериментальної інформації.

Марковська модель є дискретно-часовою формою зонального опису. Її станом є вектор розподілу маси компонента або трасера між зонами:

$$s_i^k = [s_{i,1}^k \ s_{i,2}^k \ \dots \ s_{i,N}^k]^T.$$

Зміна стану впродовж інтервалу  $\Delta t$  визначається матрицею переходів:

$$s_i^{k+1} = P_i s_i^k + b_i u_i^k, \quad (25)$$

де  $p_{rj}$  – частка матеріалу, яка протягом одного кроку переходить із зони  $j$  до зони  $r$ . Для замкненої системи:

$$0 \leq p_{rj} \leq 1, \quad \sum_{r=1}^N p_{rj} = 1. \quad (26)$$

Діагональний елемент  $p_{jj}$  характеризує частку матеріалу, що залишається в зоні  $j$ , а позадіагональні елементи – інтенсивність обміну із сусідніми або функціонально пов'язаними зонами. Отже, матриця  $P$  не є лише чисельним коефіцієнтом, а її структура безпосередньо відображає прийнятну схему циркуляції матеріалу [19-22]. Загальні принципи побудови таких моделей для процесів із дисперсними матеріалами сформульовано в статті Berthiaux та ін. [19].

Для опису відкритого безперервного змішувача до марковської моделі додають стан виходу, який відповідає матеріалу, що залишив робочий об'єм і більше не бере участі в міжзонних переходах. У теорії марковських ланцюгів такий стан називають поглинальним. Якщо  $T$  є підматрицею переходів між внутрішніми зонами, а  $r^T$  містить ймовірності переходу з них до виходу, то

$$P = \begin{bmatrix} T & 0 \\ r^T & 1 \end{bmatrix}, \quad E_k = r^T T^{k-1} s^0, \quad (27)$$

де  $E_k$  – частка імпульсно введенного трасера, що залишає змішувач після  $k$ -го переходу. Відповідно, розрахункова RTD є вихідною характеристикою марковської моделі, а не окремою моделлю того самого рівня.

Матрицю переходів можна визначати двома способами. За експериментального підходу трасер початково розміщують у вибраній зоні,

після різної кількості обертів або проміжків часу визначають його розподіл між зонами, а елементи  $P$  знаходять за найкращим узгодженням розрахункових та експериментальних концентрацій. За DEM-підходу перехідні ймовірності обчислюють безпосередньо з траєкторій частинок:

$$p_{rj} = \frac{N_{j \rightarrow r}}{N_j}, \quad (28)$$

де  $N_j$  – кількість частинок у зоні  $j$  на початку інтервалу, а  $N_{j \rightarrow r}$  – кількість частинок, що за час  $\Delta t$  перейшли до зони  $r$ . Саме такий підхід використано Doucet та співавторами для побудови багатовимірного марковського оператора за результатами DEM [21].

Приклад прикладного визначення структури  $P$  наведено в статті Legoix та співавторів для циліндричного лопатевого змішувача [22]. Робочий об'єм було поділено на шість поперечних зон, а один крок моделі прирівняно до чверті оберту лопатей. Окремі коефіцієнти описували конвективне перенесення в області руху лопатей, обвалювання матеріалу на вільній поверхні, горизонтальний і вертикальний обмін між зонами. Досліди проводили за частоти обертання 6 рад/с і заповнення змішувача 83 % [22].

Для вільносіпкої манної крупи модель задовільно відтворювала експериментальне перерозподілення трасера. Ідентифікований коефіцієнт конвективного переходу становив  $c = 0,4999$ , тоді як коефіцієнт поверхневого обвалювання –  $a = 0,0347$ ; вертикальний дифузійний обмін був суттєво слабшим,  $d_v = 0,0071$ . Отже, в дослідженому режимі основний міжзонний перенос забезпечувався рухом матеріалу разом із лопатями, а не повільним дифузійним вирівнюванням.

Для когезійної лактози стала матриця переходів відтворювала експеримент гірше. Після перших переходів експериментальний розподіл трасера майже стабілізувався, тоді як лінійна модель прогнозувала подальше вирівнювання концентрації між зонами. Автори пов'язали цю невідповідність з ущільненням шару та зменшенням рухливості когезійного порошку. Отже, для такого матеріалу припущення про незмінність  $P$  порушується: перехідні ймовірності мають залежати від часу, локального ущільнення або поточного стану шару [22].

Цей результат безпосередньо стосується кормових матеріалів. Для сухих вільносіпких компонентів стаціонарна матриця переходів може бути прийнятним наближенням. Для зволжених, в'язкопластичних, довговолокнутих або схильних до ущільнення сумішей необхідна нестационарна модель:

$$s_i^{k+1} = P_i(s^k, \theta^k) s_i^k, \quad (29)$$

у якій переходи залежать від вологості,

насипної густини, ступеня ущільнення, швидкості робочого органа та попередньої історії навантаження. Іншим варіантом є розширення простору станів шляхом додавання класів ущільнення, вологості або орієнтації волокнистих частинок.

Зональна та марковська моделі, таким чином, утворюють послідовну редукцію детального просторового опису. Континуальна або DEM-модель може використовуватися для визначення меж зон і параметрів міжзонного обміну. Зональна система описує зміну в часі мас і концентрацій компонентів у кожній зоні, а марковська матриця задає їх дискретне перенесення між зонами. На основі отриманої динаміки оператор спостереження формує розрахункову RTD та залежність концентрації компонента у вихідному потоці від часу. Перехід до такого представлення зменшує обчислювальні витрати, але усуває інформацію про розподіл концентрації всередині окремої зони та про траєкторії конкретних частинок.

**Частинкові та гібридні моделі.** На відміну від континуального опису, в якому стан суміші задається усередненими полями концентрації, густини та швидкості, метод дискретних елементів (DEM) зберігає інформацію про положення й рух окремих частинок. Модельний стан у такому представленні можна записати як:

$$z_{\text{DEM}}(t) = \{r_p(t), v_p(t), q_p(t), \omega_p(t)\}_{p=1}^N, \quad (30)$$

де  $r_p$  і  $v_p$  – координати та поступальна швидкість  $p$ -ї частинки,  $q_p$  – параметри її орієнтації,  $\omega_p$  – кутова швидкість,  $N$  – кількість модельованих частинок. Для контактних моделей, у яких сила тертя залежить від попереднього взаємного переміщення поверхонь, до стану також належать відповідні контактні змінні. Базові принципи такого частинкового представлення закладені в роботі Cundall і Strack [31].

Поступальний та обертальний рух кожної частинки визначається сумою сил і моментів, які виникають під час її взаємодії з іншими частинками, стінками камери та робочими органами:

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = m_p g + \sum_{q \in C_p} (F_{pq}^n + F_{pq}^t + F_{pq}^c) + F_p^{\text{ext}}, \quad (31)$$

$$I_p \frac{d\omega_p}{dt} = \sum_{q \in C_p} [r_{pq} \times F_{pq}^t + M_{pq}^r] + M_p^{\text{ext}},$$

де  $m_p$  і  $I_p$  – маса та тензор моменту інерції частинки;  $C_p$  – сукупність її поточних контактів;  $F_{pq}^n$ ,  $F_{pq}^t$  і  $F_{pq}^c$  – нормальна, тангенціальна та когезійна складові контактної сили;  $M_{pq}^r$  – момент опору коченню;  $F_p^{\text{ext}}$  і  $M_p^{\text{ext}}$  – інші зовнішні сили та моменти. Контакти з поверхнями шнека, лопатей і корпусу враховуються за тією самою схемою, але з параметрами взаємодії «частинка – матеріал

робочого органа».

У найпоширеніших контактних моделях нормальна сила визначається величиною взаємного перекриття частинок і швидкістю їх зближення, а тангенціальна – накопиченим відносним зсувом у контакті. Її граничне значення задається умовою Кулона

$$|F_{pq}^t| \leq \mu_{pq}^s |F_{pq}^n|, \quad (32)$$

де  $\mu_{pq}^s$  – коефіцієнт тертя ковзання. Для сипких зернових матеріалів цього опису разом із коефіцієнтом відновлення та опором коченню часто достатньо для відтворення основних потоків. Моделювання дрібнодисперсних, зволожених або когезійних компонентів потребує введення сили зчеплення, поверхневої енергії або іншого параметра адгезійної взаємодії. Для подрібнених стебел, сіна та інших довговолокнистих компонентів сферична форма частинок є недостатньою, оскільки не відтворює їх орієнтацію, зачеплення та опір згину. У таких випадках застосовують складені частинки, супереліпсоїди, поліедри або зв'язані ланцюги елементів.

Практична достовірність DEM-моделі визначається не кількістю введених контактних параметрів, а процедурою їх калібрування. До первинних параметрів належать густина, гранулометричний склад і форма частинок, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнти відновлення, тертя ковзання й кочення, а для когезійних матеріалів – параметри зчеплення. Окремо задаються геометрія змішувальної камери, частота обертання робочого органа, рівень заповнення та порядок завантаження компонентів.

Частину мікромеханічних параметрів неможливо однозначно визначити прямим вимірюванням, тому їх добирають за результатами випробувань на кут природного укусу, насипну густину, зсув, ущільнення або витікання через отвір. Після такого калібрування модель необхідно перевірити на рівні самого змішувача за розподілом концентрацій, швидкостями частинок, RTD, крутним моментом або потужністю приводу. Збіг лише одного інтегрального індексу змішування не підтверджує правильності відтворення внутрішнього руху матеріалу.

У роботі Hassanpour та співавторів [35] рух частинок у лопатевому змішувачі зіставлявся з результатами позитронно-емісійного відстеження частинок (ПЕРТ). Було одержано якісне узгодження структури потоків і кількісне узгодження розподілів швидкості. У дослідженні Yaraghi та співавторів [36] DEM-модель горизонтального лопатевого змішувача калібрували за результатами безпосереднього відбору проб, після чого застосовували для визначення впливу частоти обертання, рівня заповнення та початкового розміщення

компонентів на відносне стандартне відхилення їх концентрації.

Оскільки DEM безпосередньо формує координати та властивості частинок, із розрахункового стану можна відтворити процедуру експериментального відбору проб. Для контрольного об'єму  $V_l$  масова концентрація  $i$ -го компонента визначається як

$$c_{i,l}(t) = \frac{\sum_{p \in V_l, s_p=i} m_p}{\sum_{p \in V_l} m_p}, \quad (33)$$

де  $s_p$  позначає належність частинки до відповідного компонента. Для полідисперсної кормової суміші масове зважування є коректнішим за простий підрахунок частинок, оскільки частинки різних фракцій можуть істотно відрізнятися за масою. За сукупністю значень  $c_{i,l}$  обчислюють дисперсію, коефіцієнт варіації або індекс змішування. Розміри, кількість і положення контрольних об'ємів, а також моменти їх аналізу повинні відповідати прийнятій експериментальній схемі відбору проб. Отже, розрахунок концентрації є реалізацією оператора спостереження  $H_{DEM}$ , а не безпосереднім результатом рівнянь руху.

Траєкторії частинок дають змогу також визначати час перебування в активній зоні, частоту контактів із робочим органом, інтенсивність переходів між окремими ділянками змішувача та розподіл часу перебування в апараті. Для безперервного змішувача RTD формується за моментами входу і виходу маркованих частинок. У роботі Toson та співавторів [37] контактну модель когезійної порошкової суміші попередньо калібрували за випробуваннями на стиск і зсув, а потім перевіряли за експериментальними RTD за різної продуктивності, маси матеріалу в змішувачі та частоти обертання робочого органа. Така послідовність відокремлює калібрування властивостей матеріалу від перевірки прогнозів моделі на рівні технологічного процесу.

Сили взаємодії частинок із робочим органом використовують для визначення миттєвого крутного моменту

$$M(t) = \sum_{c \in C_w} [(r_c - r_a) \times F_c] \cdot e_a, \quad (34)$$

$$P(t) = M(t)\omega(t), \quad W = \int_0^{t_{\text{mix}}} P(t) dt,$$

де  $C_w$  – сукупність контактів частинок із робочим органом;  $r_c - r_a$  – радіус-вектор точки прикладання контактної сили відносно осі;  $e_a$  – одиничний вектор осі обертання;  $P(t)$  – потужність;  $W$  – робота приводу за тривалість змішування  $t_{\text{mix}}$ . Це дає можливість зіставляти конструктивні варіанти не лише за швидкістю досягнення однорідності, а й за силовим навантаженням та питомими витратами енергії.

Водночас DEM не слід ототожнювати з показником якості суміші. Метод формує деталізований модельний стан і траєкторії частинок, тоді як концентрації у пробах, RTD, коефіцієнт варіації та енергетичні показники одержують унаслідок застосування відповідних операторів спостереження і функціоналів оцінювання. За різних схем віртуального відбору проб одна й та сама DEM-реалізація може давати різні значення коефіцієнта варіації.

Гібридизація може здійснюватися через фізичне поєднання частинкового та континуального описів або через передавання результатів DEM у редуковану модель. У CFD–DEM-моделі рух окремих твердих частинок визначається в лагранжевому представленні за рівняннями (31), тоді як газова або рідка фаза описується в ейлеровому представленні полями швидкості, тиску та густини. Взаємодія між фазами враховується через сили, що діють на частинки з боку суцільного середовища, і відповідний зворотний вплив частинок на баланс імпульсу цього середовища. Такий підхід доцільний під час моделювання аерації порошків, пневматичного подавання компонентів, введення рідких добавок і процесів із суттєвим впливом газового або рідинного потоку. Для щільного шару сухих кормових матеріалів вплив повітря зазвичай не є визначальним, тому необхідність застосування CFD–DEM має встановлюватися з урахуванням конкретного режиму змішування.

Інший варіант полягає в усередненні результатів DEM у просторових комірках. Локальна об'ємна частка  $i$ -го компонента може визначатися за координатами частинок:

$$\phi_i(x, t) = \sum_{p: s_p=i} V_p W_h(x - r_p(t)), \quad (35)$$

$$c_i(x, t) = \frac{\phi_i(x, t)}{\sum_j \phi_j(x, t)},$$

де  $V_p$  – об'єм частинки, а  $W_h$  – функція просторового усереднення з характерним масштабом  $h$ . Отримані поля концентрації та швидкості можуть використовуватися для перевірки континуальної моделі або визначення її параметрів. Зокрема, за дисперсією переміщень частинок оцінюють ефективний коефіцієнт дисперсії, а за систематичним відносним рухом фракцій – швидкість сегрегації.

Траєкторії DEM можуть бути також згорнуті до зональної або марковської моделі. Якщо робочий об'єм розділено на зони, елементи матриці переходів визначаються як

$$p_{rj} = \frac{N_{j \rightarrow r}}{N_j}, \quad (36)$$

де  $N_j$  – кількість частинок, що перебували в  $j$ -ій зоні на початку часового кроку, а  $N_{j \rightarrow r}$  – кількість частинок, які протягом цього кроку перейшли із  $j$ -ї до  $r$ -ї зони. У цьому разі DEM використовується для встановлення структури



міжзонного обміну, а подальша зміна концентрацій компонентів у зонах розраховується за марковською або балансовою моделлю, що потребує істотно менших обчислювальних ресурсів порівняно з відстеженням руху кожної частинки методом DEM [21]. Аналогічно визначена за DEM розрахункова RTD може бути використана в моделі безперервного змішувача для прогнозування згладжування коливань витрати чи концентрації компонентів [37].

Для кормових матеріалів межі застосовності DEM значною мірою визначаються формою і контактними властивостями компонентів. Модель достатньо надійна для зерна, гранул і відносно сипких подрібнених компонентів за умови калібрування тертя та відновлення. Для дрібнодисперсних добавок необхідно враховувати когезію. Відтворення довговолоконистих і зволожених кормів потребує складніших моделей форми, зчеплення та деформування, що суттєво збільшує обчислювальні ресурси. Тому для багатокомпонентної кормової суміші доцільним є гібридний підхід, за якого DEM застосовується для аналізу локального руху й контактної взаємодії репрезентативних фракцій, а повномасштабний процес описується континуальною, зональною або кінетичною моделлю.

Порівняння розглянутих моделей проведено за складом збережених змінних, просторово-часовою деталізацією, законом еволюції та способом формування вихідних показників. Окремо встановлено припущення, за яких результати одного представлення можуть використовуватися в іншому (табл. 1). Таке зіставлення дає змогу розмежувати усереднення стану, побудову наближеного закону його зміни та обчислення характеристик за результатами спостереження.

Гібридні моделі, поєднуючи змінні та закони еволюції різних представлень, не утворюють окремого фіксованого рівня просторової деталізації, тоді як зональний і марковський описи за певних умов можуть бути неперервною та дискретною формами однієї системи. Оскільки RTD і статистичні показники формуються за результатами модельних або експериментальних спостережень, їх отримання не потребує послідовного проходження через всі рівні опису.

Перехід від DEM до континуальних полів здійснюється просторовим усередненням, яке має забезпечувати збереження маси компонентів та узгоджене визначення густини, концентрації й швидкості. У підході, розвиненому Goldhirsch, масове зважування враховує відмінності мас частинок, а вибір масштабу усереднення визначає просторову

деталізацію одержаних полів [43]. При цьому усунення явного опису окремих траєкторій і контактів потребує врахування їхнього впливу через залежності для напружень, дисперсійного перенесення та сегрегаційних потоків, без обґрунтування яких усереднені поля не утворюють замкненої моделі подальшої еволюції суміші.

Просторове агрегування континуального опису до зонального ґрунтується на збереженні мас компонентів у виділених областях, для яких середня масова частка визначається співвідношенням

$$c_{i,\alpha}(t) = \frac{\int_{\Omega_\alpha} \rho(\mathbf{x},t) c_i(\mathbf{x},t) dV}{\int_{\Omega_\alpha} \rho(\mathbf{x},t) dV} = \frac{m_{i,\alpha}(t)}{M_\alpha(t)}. \quad (37)$$

Хоча інтегрування рівняння перенесення забезпечує баланс міжзонних потоків, їх обчислення залежить від локальних концентрацій на межах зон, заміна яких середніми значеннями обґрунтована за значно швидшого внутрішнього перемішування порівняно з міжзонним обміном. Якщо ця умова не виконується, потрібні дрібніше зонування або додаткові залежності для потоків, оскільки неврахований розподіл компонента всередині зони може визначати швидкість його виходу навіть за однакових середніх концентрацій.

Для лінійної зональної системи  $\dot{m}_i = A_i m_i$ , у якій коефіцієнти обміну є сталими, а зовнішнє надходження компонента відсутнє, зв'язок із дискретним представленням задається як

$$m_i^{k+1} = T_i(\Delta t) m_i^k, \quad T_i(\Delta t) = \exp(A_i \Delta t), \quad (38)$$

де  $A_i$  – матриця інтенсивностей обміну, невід'ємність позадіагональних елементів і нульові суми стовпців якої для замкненої системи забезпечують імовірнісну інтерпретацію  $T_i$ . Оскільки точна матрична експонента зберігає розв'язок зональної системи в дискретні моменти часу, такий перехід не спричиняє додаткового просторового усереднення, а його наближеність визначається насамперед припущеннями, прийнятими під час опису міжзонного обміну.

У разі визначення матриці переходів за DEM-траєкторіями, як у праці Doucet та співавторів [21], обґрунтуванню підлягають вибір станів, крок часу та обсяг використаних даних, причому для полідисперсних матеріалів переходи, призначені для прогнозування масових концентрацій, оцінюють з урахуванням мас частинок. Однією з перевірок стаціонарного марковського наближення є узгодженість  $T(2\Delta t)$  і  $T(\Delta t)^2$  у межах статистичної похибки, порушення якої може вказувати на змінність режиму або залежність переходів від неврахованих змінних і попередньої траєкторії.

За стаціонарного режиму RTD відкритої системи формується як нормована вихідна характеристика після імпульсного введення

консервативного трасера, яку в DEM поверхню, а в зональній або марковській – за визначають за часами виходу частинок, у виходом трасера із внутрішніх станів. континуальній моделі – за потоком через вихідну

**Таблиця 1. Порівняльні характеристики математичних представлень процесу змішування**

| Представлення   | Математичний об'єкт, змінні та масштаб                                                           | Опис еволюції                                                                             | Спостереження та вихідні показники                                                      | Основні обмеження                                                                                            |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Статистичне     | Розподіл концентрацій у пробах заданої маси, розташування та часу відбору                        | Самостійний закон еволюції не задається                                                   | Вибірki концентрацій, дисперсія, CV, індекси змішування                                 | Інтегральні показники не визначають розташування неоднорідностей і механізми їх утворення                    |
| Кінетичне       | Інтегральна характеристика неоднорідності та її зміна протягом процесу                           | Рівняння зміни неоднорідності з однією або кількома константами швидкості змішування      | Часові ряди показників, кінетичні параметри, тривалість досягнення заданої однорідності | Просторовий розподіл компонентів безпосередньо не відтворюється                                              |
| RTD             | Розподіл часу перебування матеріалу між входом і виходом апарата                                 | За стаціонарного лінійного перенесення – зв'язок вхідного та вихідного сигналів через RTD | Вихідний трасерний сигнал, середній час перебування, дисперсія RTD                      | Внутрішня структура потоків і поперечна неоднорідність не визначаються однозначно                            |
| Зональне        | Маси та середні концентрації компонентів у виділених областях, часові масштаби міжзонного обміну | Матеріальні баланси з потоками між зонами та через зовнішні межі                          | Концентрації в зонах і вихідному потоці, запаси матеріалу, час вирівнювання складу      | Потребує залежностей для міжзонних потоків і припущень щодо розподілу компонента всередині зон               |
| Марковське      | Імовірності перебування або нормовані маси компонента в дискретних станах із кроком $\Delta t$   | Матриця перехідних імовірностей                                                           | Переходи між станами, розподіл матеріалу по зонах, час виходу                           | Залежить від вибору станів, кроку часу та допустимості припущення про відсутність пам'яті                    |
| Континуальне    | Поля концентрації, густини, швидкості та напружень на обраному масштабі усереднення              | Баланси маси й імпульсу з реологічними, дисперсійними та сегрегаційними залежностями      | Просторові профілі, віртуальні проби, потоки через контрольні поверхні                  | Контакти й рух окремих частинок замінюються усередненими характеристиками та замикальними співвідношеннями   |
| Частинкове, DEM | Положення, орієнтації, швидкості частинок і змінні контактної взаємодії                          | Рівняння поступального й обертального руху з контактними законами                         | Траєкторії, віртуальні проби, контактні сили, момент на робочому органі                 | Результат залежить від представлення форми частинок, контактних параметрів і врахованих механізмів взаємодії |
| Гібридне        | Поєднання змінних двох або кількох представлень                                                  | Узгоджене розв'язання моделей або передавання параметрів між ними                         | Показники, доступні через поєднані моделі                                               | Потребує узгодження масштабів, балансів і правил передавання інформації                                      |

Практичне зіставлення марковського опису з характеристика може відповідати різним експериментальною RTD, реалізоване Marikh та внутрішнім структурам потоків. Тому співавторами [20], демонструє зв'язок цих використання RTD для прогнозування складу представлень, однак однакова вихідна потребує відповідності транспортних

властивостей трасера досліджуваному компоненту та врахування коливань подавання [17], а за змінної витрати матеріалу вихідний сигнал визначають через масову витрату трасера, оскільки самої концентрації для цього недостатньо.

Втрату інформації під час статистичного згортання можна оцінити через розклад повної дисперсії концентрацій проб, відібраних за схемою  $\eta$ , на внутрішньозональний і міжзональний внески:

$$\sigma_{\eta}^2 = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \sigma_{\eta,\alpha}^2 + \sum_{\alpha} w_{\alpha} (\bar{c}_{\eta,\alpha} - \bar{c}_{\eta})^2, \quad (39)$$

де  $w_{\alpha}$  – імовірність відбору проби із зони  $\alpha$ , а  $\bar{c}_{\eta,\alpha}$  і  $\sigma_{\eta,\alpha}^2$  – умовні середнє значення та дисперсія концентрації в цій зоні. Оскільки підміна проб їхніми зональними середніми вилучає перший внесок, CV зональних середніх не можна безпосередньо ототожнювати з CV експериментальних проб, навіть якщо середній склад суміші в обох випадках збігається. Показовим є зіставлення Liu та співавторів [28], у якому континуальна модель наближалася до нульової дисперсії, тоді як DEM зберігала флуктуації, пов'язані зі скінченною кількістю частинок у контрольному об'ємі, що підтверджує необхідність узгодження масштабу спостереження та випадкового еталона суміші.

Кінетичне згортання передбачає можливість описати зміну інтегрального показника через

обмежену кількість змінних, однак однакова дисперсія може відповідати просторовим розподілам із різною подальшою динамікою, тому автономний закон її зміни не впливає лише зі статистичного визначення. Для лінійної системи поблизу однорідного стаціонарного стану однокоекспоненційне наближення може бути обґрунтоване домінуванням однієї затухаючої моди, причому за відхилень концентрацій, пропорційних  $\exp(-\lambda t)$ , їхня дисперсія за сталих ваг змінюється пропорційно  $\exp(-2\lambda t)$ . Наявність кількох суттєвих мод або повільного обміну зі слабкорухомими областями зумовлює складнішу кінетичну залежність, обмежуючи можливість перенесення визначеної константи швидкості на іншу геометрію, режим роботи чи схему відбору проб.

Придатність редукованої моделі визначається збереженням характеристик, необхідних для конкретного розрахунку, тому прогноз часу досягнення однорідності перевіряють за кінетичною кривою та незмінною схемою відбору проб, а опис слабкорухомих областей за локальними концентраціями або трасерними переходами. Водночас прогноз навантаження на робочий орган потребує механічного опису сил і моментів, який не відновлюється лише за збігом інтегрального показника однорідності (табл. 2).

**Таблиця 2. Умови застосування математичних моделей до кормових матеріалів різних фізико-механічних властивостей**

| Матеріал                    | Доцільний опис та його обмеження                                                                                                                                                                                                                                         | Дані для обґрунтування моделі                                                                                            |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Сипкі некогезійні матеріали | DEM дає змогу досліджувати переміщення частинок, континуальний опис — перенесення концентрації, якщо визначено залежності для дисперсійного та, за потреби, сегрегаційного потоків. Штучне укрупнення частинок у DEM потребує перевірки впливу на результат.             | Розподіли розмірів і густини частинок, характеристики тертя, локальні концентрації та кінетика змішування.               |
| Когезійні компоненти        | Частинковий опис потребує врахування зчеплення, якщо воно визначає утворення та руйнування агломератів. Зональні й марковські моделі можуть відтворювати макроскопічний обмін, однак параметри переходів необхідно встановлювати для досліджуваного матеріалу та режиму. | Характеристики зчеплення й агломерації, трасерні переходи між активними та слабкорухомими областями.                     |
| Довговолоконисті корми      | DEM потребує відтворення видовженої форми, а за істотного впливу деформацій – гнучкості частинок. Для змішування з одночасним подрібненням додатково враховують зміну довжини, оскільки модель незмінних частинок не описує цей процес.                                  | Розподіл довжин, форма, опір згину, зміна фракційного складу під час оброблення.                                         |
| Зволожені суміші            | За збереження дискретної структури застосовний DEM із відповідними моделями рідинних містків і перерозподілу рідини. Сама наявність вологи не обґрунтовує застосування CFD-DEM, потребу в якому визначає вплив руху несучої фази.                                        | Вологість, змочуваність поверхонь, властивості рідкої добавки, розподіл вологи та компонентів.                           |
| В'язкопластичні матеріали   | Континуальний опис із реологічною залежністю, наприклад Гершеля–Балклі, дає змогу визначати області течії та обмеженого внутрішнього деформування. Параметри такої залежності мають відповідати умовам зсуву в апараті.                                                  | Границя текучості, залежність напруження від швидкості зсуву, розміри області активного перемішування та крутний момент. |



Для кормових матеріалів вибір моделі визначається механізмами, які обмежують вирівнювання складу, та характеристиками, необхідними для розрахунку. Оскільки когезія, волокниста структура і зволоженість можуть поєднуватися в одній суміші, наведені умови застосування слід розглядати з урахуванням фактичних властивостей компонентів і режиму роботи змішувача.

Конструкція змішувача конкретизує просторову постановку задачі, оскільки для барабанного апарата суттєвим є обмін між пересипним шаром і внутрішнім об'ємом, для лопатевого – між областями безпосередньої дії лопатей та слабкорухомим матеріалом, а для вертикального шнекового – висхідне переміщення поблизу шнека й повернення матеріалу вздовж стінок [22, 28, 42]. Такі особливості мають відтворюватися геометрією частинкової або континуальної моделі чи структурою міжзонного обміну.

Прикладом перевірки моделі за двома технологічними показниками є дослідження Сао та співавторів [42], у якому для вертикального шнекового змішувача розрахункові значення коефіцієнта варіації 12,95 % і потужності 1,35 кВт зіставлено з експериментальними 13,03 % і 1,41 кВт відповідно. Така перевірка охоплює якість суміші й енергетичне навантаження, водночас установлену відповідність слід пов'язувати з дослідженими складом корму, геометрією та режимом роботи.

Для визначення тривалості змішування у вже заданому апараті доцільним може бути кінетичний опис, параметризований за експериментальними залежностями неоднорідності, тоді як дослідження слабого обміну між областями потребує зонального або марковського представлення, перевіреного за локальними концентраціями чи трасерними переходами. Для безперервного процесу RTD використовують при оцінюванні часової реакції вихідного потоку на коливання подавання, доповнюючи її контролем складу, якщо компоненти мають різні транспортні властивості. Зміна конструкції та прогноз силових навантажень обґрунтовують застосування DEM або континуального механічного опису, проте доступні дані мають забезпечувати ідентифікацію їхніх параметрів і перевірку саме тих величин, заради яких модель ускладнюється.

#### **Висновки та перспективи подальших досліджень.**

1. Систематизовано математичні представлення процесу змішування кормових матеріалів за змінними стану, масштабом опису, законом еволюції та способом формування вихідних показників. Запропонована операторна схема розмежовує фізичний стан суміші, його

модельне представлення, спостереження та кількісне оцінювання, завдяки чому встановлено функціональні відмінності між моделями внутрішньої динаміки, RTD-характеристиками й показниками однорідності та визначено основу їх узгодженого використання.

2. Показано, що оцінка неоднорідності залежить від маси, розташування та часу відбору проб, тому зіставлення модельних і експериментальних результатів потребує відтворення однакової процедури спостереження. Для дискретних матеріалів необхідно враховувати ненульову дисперсію випадкової суміші, а в одномодовому кінетичному наближенні експоненційне зменшення надлишкової дисперсії загалом не означає аналогічної залежності самого коефіцієнта варіації. Відповідно, оцінки швидкості й тривалості змішування залежать від вибраного показника та прийнятої статистичної межі.

3. Обґрунтовано умови переходу від частинкового опису до континуального й зонального, за яких збереження маси має доповнюватися визначенням залежностей для усереднених напружень і потоків. Просторове агрегування усуває інформацію про внутрішньозональний розподіл компонентів, через що дисперсія зональних середніх не відтворює повної дисперсії проб. Водночас точний перехід від лінійної зональної системи зі сталими коефіцієнтами до марковського представлення не спричиняє додаткового просторового усереднення, а згортання до RTD обмежує можливість однозначного відновлення внутрішньої структури потоків.

4. Визначено, що вибір моделі має узгоджувати мету розрахунку, властивості матеріалу, конструкцію змішувача та доступність даних для ідентифікації параметрів. Кінетичний опис доцільний для оцінювання тривалості процесу, зональний і марковський для дослідження міжзонного обміну, RTD для аналізу часової поведінки вихідного потоку, а континуальний і DEM для просторових та механічних розрахунків. Застосування цих підходів до когезійних, зволжених, довговолокнистих і в'язкопластичних кормів потребує відповідного врахування зчеплення, форми й деформованості частинок або реологічних властивостей середовища.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на розроблення зонально-балансової моделі кормозмішувача, у якій структуру та параметри міжзонного обміну визначатимуть за експериментальними даними й результатами деталізованого моделювання, перевіряючи прогнозовану неоднорідність за узгодженою схемою відбору проб.

**Список використаних джерел**

1. Danckwerts P. V. The definition and measurement of some characteristics of mixtures. *Applied Scientific Research, Section A*. 1952. Vol. 3. P. 279–296. DOI: 10.1007/BF03184936.
2. Lacey P. M. C. The mixing of solid particles. *Chemical Engineering Research and Design*. 1997. Vol. 75, Suppl. S. P. S49–S55. DOI: 10.1016/S0263-8762(97)80004-4. (Reprint of the 1943 paper).
3. Lacey P. M. C. Developments in the theory of particle mixing. *Journal of Applied Chemistry*. 1954. Vol. 4, No. 5. P. 257–268. DOI: 10.1002/jctb.5010040504.
4. Rose H. E. A suggested equation relating to the mixing of powders and its application to the study of the performance of certain types of machine. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*. 1959. Vol. 37. P. 47–64.
5. Kristensen H. G. Statistical properties of random and non-random mixtures of dry solids. Part I. A general expression for the variance of the composition of samples. *Powder Technology*. 1973. Vol. 7. P. 249–257. DOI: 10.1016/0032-5910(73)80031-2.
6. Cooke M. H., Bridgwater J. The relationship between variance and sample size for mixtures. *Chemical Engineering Science*. 1977. Vol. 32, No. 11. P. 1353–1357. DOI: 10.1016/0009-2509(77)85031-8.
7. Fan L. T., Gelves-Arocha H. H., Walawender W. P., Lai F. S. A mechanistic kinetic model of the rate of mixing segregating solid particles. *Powder Technology*. 1975. Vol. 12, No. 2. P. 139–156. DOI: 10.1016/0032-5910(75)80006-4.
8. Strek F., Rochowiecki A., Karcz J. A mathematical model of mixing of particulate solids. *Powder Technology*. 1978. Vol. 20, No. 2. P. 243–248. DOI: 10.1016/0032-5910(78)80055-2.
9. Hwang C. L., Hogg R. Diffusive mixing in flowing powders. *Powder Technology*. 1980. Vol. 26, No. 1. P. 93–101. DOI: 10.1016/0032-5910(80)85011-X.
10. Habermann R. Herleitung und Validierung eines einfachen Modells zur Beschreibung des Misch- und Entmischungsprozesses beim Feststoffmischen. *Chemie Ingenieur Technik*. 2021. Vol. 93, No. 10. DOI: 10.1002/cite.202100071.
11. Danckwerts P. V. Continuous flow systems. Distribution of residence times. *Chemical Engineering Science*. 1953. Vol. 2, No. 1. P. 1–13. DOI: 10.1016/0009-2509(53)80001-1.
12. Williams J. C., Rahman M. A. Prediction of the performance of continuous mixers for particulate solids using residence time distributions. Part I. Theoretical. *Powder Technology*. 1972. Vol. 5, No. 2. P. 87–92. DOI: 10.1016/0032-5910(72)80005-6.
13. Weinekötter R., Reh L. Continuous mixing of fine particles. *Particle & Particle Systems Characterization*. 1995. Vol. 12, No. 1. P. 46–53. DOI: 10.1002/ppsc.19950120108.
14. Kehlenbeck V. Continuous dynamic mixing of cohesive powders: Dissertation. München: Technische Universität München, 2006. ISBN 3-8322-5726-8.
15. Pernenkil L., Cooney C. L. A review on the continuous blending of powders. *Chemical Engineering Science*. 2006. Vol. 61. P. 720–742. DOI: 10.1016/j.ces.2005.06.016.
16. Portillo P. M., Ierapetritou M. G., Muzzio F. J. Characterization of continuous convective powder mixing processes. *Powder Technology*. 2008. Vol. 182, No. 3. P. 368–378. DOI: 10.1016/j.powtec.2007.06.024.
17. Gao Y., Vanarase A., Muzzio F., Ierapetritou M. Characterizing continuous powder mixing using residence time distribution. *Chemical Engineering Science*. 2011. Vol. 66, No. 3. P. 417–425. DOI: 10.1016/j.ces.2010.10.045.
18. Vanarase A. U., Muzzio F. J. Effect of operating conditions and design parameters in a continuous powder mixer. *Powder Technology*. 2011. Vol. 208, No. 1. P. 26–36. DOI: 10.1016/j.powtec.2010.11.038.
19. Doucet J., Bertrand F., Chaouki J. A measure of mixing from Lagrangian tracking and its application to granular and fluid flow systems. *Chemical Engineering Research and Design*. 2008. Vol. 86, No. 12. P. 1313–1321. DOI: 10.1016/j.cherd.2008.09.003.
20. Legoix L., Milhé M., Gatumel C., Berthiaux H. Free flowing and cohesive powders agitation in a cylindrical convective blender—kinetics experiments and Markov chain modelling. *EPJ Web of Conferences*. 2017. Vol. 140. Art. 03050. DOI: 10.1051/epjconf/201714003050.
21. Doucet J., Hudon N., Bertrand F., Chaouki J. Modeling of the mixing of monodisperse particles using a stationary DEM-based Markov process. *Computers & Chemical Engineering*. 2008. Vol. 32, No. 6. P. 1334–1341. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2007.06.017.
22. Rippie E. G., Chou C. H. Kinetics of mass transport in sheared particulate beds: Markov



chains. *Powder Technology*. 1978. Vol. 21, No. 2. P. 205–216. DOI: 10.1016/0032-5910(78)80090-4

23. Dury C. M., Ristow G. H. Competition of mixing and segregation in rotating cylinders. *Physics of Fluids*. 1999. Vol. 11, No. 6. P. 1387–1394. DOI: 10.1063/1.870003.

24. Choi J., Kudrolli A., Rosales R. R., Bazant M. Z. Diffusion and mixing in gravity-driven dense granular flows. *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92. Art. 174301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.174301.

25. Hajra S. K., Khakhar D. V. Radial mixing of granular materials in a rotating cylinder: Experimental determination of particle self-diffusivity. *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17. Art. 013101. DOI: 10.1063/1.1825331.

26. Gray J. M. N. T., Thornton A. R. A theory for particle size segregation in shallow granular free-surface flows. *Proceedings of the Royal Society A*. 2005. Vol. 461, No. 2057. P. 1447–1473. DOI: 10.1098/rspa.2004.1420.

27. Chassagne R., Maurin R., Chauchat J., Gray J. M. N. T., Frey P. Discrete and continuum modelling of grain size segregation during bedload transport. *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 895. Art. A30. P. 365–398. DOI: 10.1017/jfm.2020.274.

28. Liu Y., Gonzalez M., Wassgren C. Modeling granular material blending in a rotating drum using a finite element method and advection–diffusion equation multiscale model. *AIChE Journal*. 2018. Vol. 64, No. 9. P. 3277–3292. DOI: 10.1002/aic.16179.

29. Zheng Q., Bai L., Yang L., Yu A. 110th Anniversary: Continuum modeling of granular mixing in a rotating drum. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2019. Vol. 58, No. 41. P. 19251–19262. DOI: 10.1021/acs.iecr.9b03642.

30. Yang L., Zheng Q., Yu A. A continuum model for the segregation of bidisperse particles in a blade mixer. *AIChE Journal*. 2022. Vol. 68, No. 8. Art. e17734. DOI: 10.1002/aic.17734.

31. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*. 1979. Vol. 29, No. 1. P. 47–65. DOI: 10.1680/geot.1979.29.1.47.

32. Kaneko Y., Shiojima T., Horio M. Numerical analysis of particle mixing characteristics in a single helical ribbon agitator using DEM simulation. *Powder Technology*. 2000. Vol. 108, No. 1. P. 55–64. DOI: 10.1016/S0032-5910(99)00251-X.

33. Stewart R. L., Bridgwater J., Zhou Y. C., Yu A. B. Simulated and measured flow of granules in a bladed mixer—A detailed comparison. *Chemical*

*Engineering Science*. 2001. Vol. 56, No. 19. P. 5457–5471. DOI: 10.1016/S0009-2509(01)00190-7.

34. Bertrand F., Leclaire L.-A., Levecque G. DEM-based models for the mixing of granular materials. *Chemical Engineering Science*. 2005. Vol. 60, No. 8–9. P. 2517–2531. DOI: 10.1016/j.ces.2004.11.048.

35. Hassanpour A., Tan H., Bayly A., Gopalkrishnan P., Ng B., Ghadiri M. Analysis of particle motion in a paddle mixer using Discrete Element Method (DEM). *Powder Technology*. 2011. Vol. 206, No. 1–2. P. 189–194. DOI: 10.1016/j.powtec.2010.07.025.

36. Yaraghi A., Ebrahimi M., Ein-Mozaffari F., Lohi A. Mixing assessment of non-cohesive particles in a paddle mixer through experiments and discrete element method (DEM). *Advanced Powder Technology*. 2018. Vol. 29, No. 11. P. 2693–2706. DOI: 10.1016/j.appt.2018.07.019.

37. Toson P., Doshi P., Matic M. et al. Continuous mixing technology: Validation of a DEM model. *International Journal of Pharmaceutics*. 2021. Vol. 608. Art. 121065. DOI: 10.1016/j.ijpharm.2021.121065.

38. Ghaderi A. A mathematical theory for mixing of particulate materials: PhD thesis. Guildford: University of Surrey, School of Engineering, 2006.

39. Rielly C. D. Mixing theory. *Pharmaceutical Blending and Mixing* / eds. P. J. Cullen, R. J. Romaniach, N. Abatzoglou, C. D. Rielly. Chichester: Wiley, 2015. P. 3–24. DOI: 10.1002/9781118682692.ch1.

40. Villiermaux E. Mixing versus stirring. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 51. P. 245–273. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010518-040306.

41. Costa A., Agazzi A., Perricone V., Savoini G., Lazzari M., Nava S., Tangorra F. M. Influence of different loading levels, cutting and mixing times on total mixed ration (TMR) homogeneity in a vertical mixing wagon during distribution: A case study. *Italian Journal of Animal Science*. 2019. Vol. 18, No. 1. P. 1093–1098. DOI: 10.1080/1828051X.2019.1618742.

42. Cao K., Li X. H., Gao H. D., Zhang L. X., You F. Design and analysis of a vertical screw stirring device for feeding dairy goats. *International Journal of Simulation Modelling*. 2023. Vol. 22, No. 3. P. 462–473. DOI: 10.2507/IJSIMM22-3-655.

43. Goldhirsch I. Stress, stress asymmetry and couple stress: from discrete particles to continuous fields. *Granular Matter*. 2010. Vol. 12. P. 239–252. DOI: 10.1007/s10035-010-0181-z

## References

1. Danckwerts, P. V. (1952). The definition and measurement of some characteristics of mixtures. *Applied Scientific Research, Section A*, 3, 279–296. <https://doi.org/10.1007/BF03184936>
2. Lacey, P. M. C. (1997). The mixing of solid



particles. *Chemical Engineering Research and Design*, 75(Suppl. S), S49–S55. [https://doi.org/10.1016/S0263-8762\(97\)80004-4](https://doi.org/10.1016/S0263-8762(97)80004-4)

3. Lacey, P. M. C. (1954). Developments in the theory of particle mixing. *Journal of Applied Chemistry*, 4(5), 257–268. <https://doi.org/10.1002/jctb.5010040504>

4. Rose, H. E. (1959). A suggested equation relating to the mixing of powders and its application to the study of the performance of certain types of machine. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 37, 47–64.

5. Kristensen, H. G. (1973). Statistical properties of random and non-random mixtures of dry solids. Part I. A general expression for the variance of the composition of samples. *Powder Technology*, 7, 249–257. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(73\)80031-2](https://doi.org/10.1016/0032-5910(73)80031-2)

6. Cooke, M. H., & Bridgwater, J. (1977). The relationship between variance and sample size for mixtures. *Chemical Engineering Science*, 32(11), 1353–1357. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(77\)85031-8](https://doi.org/10.1016/0009-2509(77)85031-8)

7. Fan, L. T., Gelves-Arocha, H. H., Walawender, W. P., & Lai, F. S. (1975). A mechanistic kinetic model of the rate of mixing segregating solid particles. *Powder Technology*, 12(2), 139–156. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(75\)80006-4](https://doi.org/10.1016/0032-5910(75)80006-4)

8. Strek, F., Rochowiecki, A., & Karcz, J. (1978). A mathematical model of mixing of particulate solids. *Powder Technology*, 20(2), 243–248. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(78\)80055-2](https://doi.org/10.1016/0032-5910(78)80055-2)

9. Hwang, C. L., & Hogg, R. (1980). Diffusive mixing in flowing powders. *Powder Technology*, 26(1), 93–101. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(80\)85011-X](https://doi.org/10.1016/0032-5910(80)85011-X)

10. Habermann, R. (2021). Herleitung und Validierung eines einfachen Modells zur Beschreibung des Misch- und Entmischungsprozesses beim Feststoffmischen. *Chemie Ingenieur Technik*, 93(10), 1649–1656. <https://doi.org/10.1002/cite.202100071>

11. Danckwerts, P. V. (1953). Continuous flow systems. Distribution of residence times. *Chemical Engineering Science*, 2(1), 1–13. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(53\)80001-1](https://doi.org/10.1016/0009-2509(53)80001-1)

12. Williams, J. C., & Rahman, M. A. (1972). Prediction of the performance of continuous mixers for particulate solids using residence time distributions. Part I. Theoretical. *Powder Technology*, 5(2), 87–92. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(72\)80005-6](https://doi.org/10.1016/0032-5910(72)80005-6)

13. Weinekötter, R., & Reh, L. (1995). Continuous mixing of fine particles. *Particle & Particle Systems Characterization*, 12(1), 46–53. <https://doi.org/10.1002/ppsc.19950120108>

14. Kehlenbeck, V. (2006). *Continuous dynamic mixing of cohesive powders* [Doctoral dissertation,

Technische Universität München]. Technische Universität München.

15. Pernenkil, L., & Cooney, C. L. (2006). A review on the continuous blending of powders. *Chemical Engineering Science*, 61, 720–742. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.06.016>

16. Portillo, P. M., Ierapetritou, M. G., & Muzzio, F. J. (2008). Characterization of continuous convective powder mixing processes. *Powder Technology*, 182(3), 368–378. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2007.06.024>

17. Gao, Y., Vanarase, A., Muzzio, F., & Ierapetritou, M. (2011). Characterizing continuous powder mixing using residence time distribution. *Chemical Engineering Science*, 66(3), 417–425. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.10.045>

18. Vanarase, A. U., & Muzzio, F. J. (2011). Effect of operating conditions and design parameters in a continuous powder mixer. *Powder Technology*, 208(1), 26–36. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2010.11.038>

19. Doucet, J., Bertrand, F., & Chaouki, J. (2008). A measure of mixing from Lagrangian tracking and its application to granular and fluid flow systems. *Chemical Engineering Research and Design*, 86(12), 1313–1321. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2008.09.003>

20. Legoix, L., Milhé, M., Gatumel, C., & Berthiaux, H. (2017). Free flowing and cohesive powders agitation in a cylindrical convective blender: Kinetics experiments and Markov chain modelling. *EPJ Web of Conferences*, 140, Article 03050. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201714003050>

21. Doucet, J., Hudon, N., Bertrand, F., & Chaouki, J. (2008). Modeling of the mixing of monodisperse particles using a stationary DEM-based Markov process. *Computers & Chemical Engineering*, 32(6), 1334–1341. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2007.06.017>

22. Rippie, E. G., & Chou, C. H. (1978). Kinetics of mass transport in sheared particulate beds: Markov chains. *Powder Technology*, 21(2), 205–216. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(78\)80090-4](https://doi.org/10.1016/0032-5910(78)80090-4)

23. Dury, C. M., & Ristow, G. H. (1999). Competition of mixing and segregation in rotating cylinders. *Physics of Fluids*, 11(6), 1387–1394. <https://doi.org/10.1063/1.870003>

24. Choi, J., Kudrolli, A., Rosales, R. R., & Bazant, M. Z. (2004). Diffusion and mixing in gravity-driven dense granular flows. *Physical Review Letters*, 92, Article 174301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.174301>

25. Hajra, S. K., & Khakhar, D. V. (2005). Radial mixing of granular materials in a rotating cylinder: Experimental determination of particle self-diffusivity. *Physics of Fluids*, 17, Article 013101. <https://doi.org/10.1063/1.1825331>



26. Gray, J. M. N. T., & Thornton, A. R. (2005). A theory for particle size segregation in shallow granular free-surface flows. *Proceedings of the Royal Society A*, 461(2057), 1447–1473. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1420>

27. Chassagne, R., Maurin, R., Chauchat, J., Gray, J. M. N. T., & Frey, P. (2020). Discrete and continuum modelling of grain size segregation during bedload transport. *Journal of Fluid Mechanics*, 895, Article A30, 365–398. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.274>

28. Liu, Y., Gonzalez, M., & Wassgren, C. (2018). Modeling granular material blending in a rotating drum using a finite element method and advection–diffusion equation multiscale model. *AIChE Journal*, 64(9), 3277–3292. <https://doi.org/10.1002/aic.16179>

29. Zheng, Q., Bai, L., Yang, L., & Yu, A. (2019). 110th Anniversary: Continuum modeling of granular mixing in a rotating drum. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 58(41), 19251–19262. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b03642>

30. Yang, L., Zheng, Q., & Yu, A. (2022). A continuum model for the segregation of bidisperse particles in a blade mixer. *AIChE Journal*, 68(8), Article e17734. <https://doi.org/10.1002/aic.17734>

31. Cundall, P. A., & Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1), 47–65. <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>

32. Kaneko, Y., Shiojima, T., & Horio, M. (2000). Numerical analysis of particle mixing characteristics in a single helical ribbon agitator using DEM simulation. *Powder Technology*, 108(1), 55–64. [https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(99\)00251-X](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(99)00251-X)

33. Stewart, R. L., Bridgwater, J., Zhou, Y. C., & Yu, A. B. (2001). Simulated and measured flow of granules in a bladed mixer: A detailed comparison. *Chemical Engineering Science*, 56(19), 5457–5471. [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(01\)00190-7](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(01)00190-7)

34. Bertrand, F., Leclaire, L.-A., & Levecque, G. (2005). DEM-based models for the mixing of granular materials. *Chemical Engineering Science*, 60(8–9), 2517–2531. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.11.048>

35. Hassanpour, A., Tan, H., Bayly, A., Gopalkrishnan, P., Ng, B., & Ghadiri, M. (2011). Analysis of particle motion in a paddle mixer using discrete element method (DEM). *Powder Technology*, 206(1–2), 189–194. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2010.07.025>

36. Yaraghi, A., Ebrahimi, M., Ein-Mozaffari, F., & Lohi, A. (2018). Mixing assessment of non-cohesive particles in a paddle mixer through experiments and discrete element method (DEM). *Advanced Powder Technology*, 29(11), 2693–2706. <https://doi.org/10.1016/j.apt.2018.07.019>

37. Toson, P., Doshi, P., Matic, M., et al. (2021). Continuous mixing technology: Validation of a DEM

model. *International Journal of Pharmaceutics*, 608, Article 121065.

<https://doi.org/10.1016/j.ijpharm.2021.121065>

38. Ghaderi, A. (2006). *A mathematical theory for mixing of particulate materials* [Doctoral dissertation, University of Surrey].

39. Rielly, C. D. (2015). Mixing theory. In P. J. Cullen, R. J. Románach, N. Abatzoglou, & C. D. Rielly (Eds.), *Pharmaceutical blending and mixing* (pp. 3–24). Wiley.

<https://doi.org/10.1002/9781118682692.ch1>

40. Villiermaux, E. (2019). Mixing versus stirring. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 51, 245–273.

<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010518-040306>

41. Costa, A., Agazzi, A., Perricone, V., Savoini, G., Lazzari, M., Nava, S., & Tangorra, F. M. (2019). Influence of different loading levels, cutting and mixing times on total mixed ration (TMR) homogeneity in a vertical mixing wagon during distribution: A case study. *Italian Journal of Animal Science*, 18(1), 1093–1098.

<https://doi.org/10.1080/1828051X.2019.1618742>

42. Cao, K., Li, X. H., Gao, H. D., Zhang, L. X., & You, F. (2023). Design and analysis of a vertical screw stirring device for feeding dairy goats. *International Journal of Simulation Modelling*, 22(3), 462–473. <https://doi.org/10.2507/IJSIMM22-3-655>

43. Goldhirsch, I. (2010). Stress, stress asymmetry and couple stress: From discrete particles to continuous fields. *Granular Matter*, 12, 239–252. <https://doi.org/10.1007/s10035-010-0181-z>

## SYSTEMATIZATION OF MATHEMATICAL MODELS OF FEED MATERIAL MIXING

*Mathematical description of feed material mixing requires a clear distinction between models, since the heterogeneity of the components and the complexity of their movement determine the specific nature of transport, segregation, and interparticle interactions. This limits the direct transfer of models and their parameters between different material systems.*

*The study aims to systematize mathematical models of mixing, determine their functional interrelationships, establish the conditions for transition between different levels of description, and define their applicability limits with regard to material properties and the structural and technological parameters of mixers. The methodological basis comprised systemic, structural-functional, and comparative approaches. Statistical, kinetic, RTD, zonal, Markov, continuum, and particle-based models were analysed.*

*The models were compared according to the mathematical object, spatial and temporal scale, state variables, evolution law, observation procedure, parameters, and output indicators. An operator architecture was proposed to distinguish*



the physical state of the mixture, its model representation, evolution, formation of observable quantities, and quantitative evaluation. It was shown that the coefficient of variation, mixing indices, and RTD moments are primarily results of observation and data reduction rather than universal state variables.

The transition from DEM to a continuum description was found to be achieved through spatial averaging, whereas the transition to a zonal model is based on the integration of balances over defined volumes. Markov and RTD representations are formed through the description of interzonal exchange and observation of the output signal. The

information preserved and lost during model reduction was identified. It was substantiated that the choice of mathematical representation should be determined by the purpose of the calculation, the required level of detail, material properties, mixer design, and available experimental data. The formulated provisions provide a basis for developing zonal-balance models of feed material mixing.

**Keywords:** feed material mixing, mathematical model, statistical model, kinetic model, continuum modelling, zonal model, RTD, DEM, mixture homogeneity.

### **Відомості про автора**

**Купчук Ігор Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки та технологічних процесів в АПК, інженерно-технологічний факультет, Вінницький національний аграрний університет (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: [kupchuk.igor@i.ua](mailto:kupchuk.igor@i.ua); <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).

**Kupchuk Ihor** – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Associate Professor of the Department of Engineering Mechanics and Technological Processes in the Agricultural Industry, Faculty of Engineering and Technology, Vinnytsia National Agrarian University (3, Sonychna St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: [kupchuk.igor@i.ua](mailto:kupchuk.igor@i.ua); <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).

Стаття надійшла 15.08.2026

Стаття прийнята 27.08.2026

Опубліковано 12.10.2026