Ольшанський В. П.
д.ф.-м.н., професор

Сліпченко М. В.
к.т.н., доцент

Державний біотехнологічний університет

Солона О. В.
к.т.н., доцент

Купчук І. М.
к.т.н., доцент

Вінницький національний аграрний університет

Olshanskiy V.
Doctor of Technical Sciences, Professor

Slipchenko M.
PhD, Associate Professor

State Biotechnological University

Solona O.
PhD, Associate Professor

Kupchuk I.
PhD, Associate Professor

Vinnytsia National Agrarian University

УДК 534.1:539.3
DOI: 10.37128/2306-8744-2021-3-4

ПРО АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ

Складено нелінійне диференціальне рівняння сили прямого центрального удару пружних тіл обертання, що мають сингулярну точку на граничній контактній поверхні, де нескінченна її кривизна. Для визначення коефіцієнтів рівняння і порядку його степеневої нелінійності використано відомий розв'язок вісесиметричної контактної задачі теорії пружності, побудований І. Я. Штаєрманом. При постановці динамічної задачі використано класичні припущення теорії квазістатичного удару, які запропонував Г. Герц. Складене рівняння сили удару зведено до рівняння Бернуллі і побудовано його замкнений аналітичний розв'язок, який виражено через Ateb-синус. Одержано аналітичні залежності від часу сили удару і зближення центрів мас пружних тіл. Виведено компактні формули для розрахунку максимумів цих величин, а також тривалостей процесу стискання і удару тіл. Запропоновано компактні апроксимації Ateb-синуса елементарними функціями. Завдяки цим наближенням вдалося отримати досить просту аналітичну розгортку в часі швидкоплинного механічного процесу. Традиційно в інших роботах таку розгортку одержували числовим розв'язанням відповідних інтегральних рівнянь для сили удару. Наведено приклади розрахунків, в яких досліджено вплив різних чинників на основі характеристики удару тіл з невеликою початковою швидкістю. Обмеження на швидкість зіткнення зумовлено пружною постановкою задачі, де виключена можливість появи пластичних деформацій. Внаслідок такої постановки відпала потреба визначати коефіцієнт відновлення швидкості, бо він дорівнює одиниці. Проведено порівняння числових результатів, до яких призводять отримані аналітичні розв'язки і числове інтегрування рівняння сили удару на комп'ютері. Малі розбіжності результатів підтвердили вірогідність виведених розрахункових формул. Числові результати стосуються удару сталевого тіла по нерухомому гумовому півпростору, аналог чого спостерігається на практиці при падінні кусків мінеральної сировини на валки вібраційного класифікатора, футеровані гумою.

Ключові слова: *теорія Г. Герца, рівняння сили удару, особлива точка на поверхні, аналітичний розв'язок, Ateb-синус і його апроксимація.*

Вступ. Починаючи з Г. Герца [1], в теорії квазістатичного удару найбільш часто розглядали динамічну взаємодію твердих тіл, обмежених гладкими поверхнями в області їх контакту [2, 3]. Але на практиці може порушуватись ця умова при наявності на поверхнях сингулярних точок.

Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження. Вперше задачу статичного стискання пружних тіл обертання з особливою точкою на поверхні контакту, де нескінченна кривизна поверхні, розв'язав І. Я. Штаєрман [4]. Він довів, що і при нескінченній кривизні в особливій точці залишається обмеженим тиск в області контакту пружних тіл, хоча він у 2,5 рази більший за середній на площадці. Тут поставлена задача математичного моделювання ударної взаємодії таких тіл. Зазначимо, що її уже розглядали в [5], де розв'язували задачу в переміщеннях. Тут, на відміну від [5], задачу розв'язуємо в зусиллях, тобто будуємо аналітичний розв'язок рівняння сили удару. Для цього використовуємо теорію періодичних Ateb-функцій. Вони дають можливість аналітично описати зміну в часі сили удару та інших параметрів швидкоплинного механічного процесу. Традиційно, таку розгортку процесу удару в часі, починаючи з С. П. Тимошенко [6], одержують шляхом числового розв'язання інтегрального рівняння сили удару [7-9]. Тут будуємо аналітичний розв'язок. Використання Ateb-функцій при розв'язанні задач удару стало ефективним за наявності простих апроксимацій цих функцій [10, 11]. Раніше названі функції успішно використовували в теорії нелінійних механічних коливань [12-15]. Ударну взаємодію кусків мінеральної сировини з футерованими гумою валками вібраційного класифікатора розглядали в [16].

Метою статті є аналітичне розв'язання нелінійного диференціального рівняння сили прямого центрального удару пружних тіл обертання при наявності на поверхні контакту сингулярної точки, де нескінченна кривизна поверхні.

Викладення основного матеріалу.

При постановці задачі використовуємо модель Г. Герца, яка не враховує хвильові процеси в тілах, підданих удару. Її розв'язок будуємо не в переміщеннях, а в зусиллях.

Розглядаємо прямий центральний удар тіла обертання, обмеженого в зоні контакту поверхнею низького порядку:

$$z = Ar^{3/2},$$

де $A > 0 - \text{const}$, r – радіальна координата, по поверхні нерухомого пружного півпростору $z = 0$, зі швидкістю υ_0.

Схема ударної взаємодії подана на рис. 1.

Зближення центрів мас тіл $x(t)$, як функцію часу t, визначаємо диференціальним рівнянням:

$$M\,\ddot{x} = -P(t), \tag{1}$$

у якому M – маса тіла, що вдаряє по півпростору; $P(t)$ – сила ударної взаємодії; крапка над x означає похідну по t.

Щоб усунути невизначеність рівняння (1), його доповнюємо залежністю І. Я. Штаєрмана [4]

$$x = KP^{3/5}, \tag{2}$$

Де $K = \frac{3}{2}AJ_1\left(\frac{Q_1+Q_2}{3AJ_2}\right)^{3/5}$;

$$Q_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1};\ Q_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2};$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi}\,d\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 1{,}198140;$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{\xi^2\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi \approx 0{,}718884;$$

E_1, E_2, ν_1, ν_2 – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіла і півпростору.

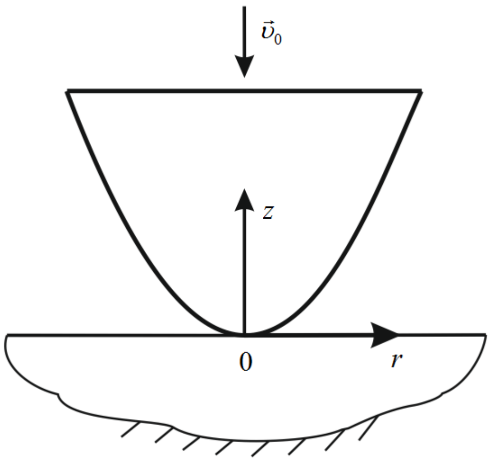

Рис. 1. Схема зіткнення тіл

Взявши похідні з виразу (2) по t, отримуємо:

$$\dot{x} = \frac{3}{5}KP^{-2/5}\dot{P};$$

$$\ddot{x} = \frac{3}{5}K\left[P^{-2/5}\ddot{P} - \frac{2}{5}P^{-7/5}\dot{P}^2\right].$$

Враховуючи їх, рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$\ddot{P} - \frac{2}{5}\frac{\dot{P}^2}{P} + \frac{5}{3}\frac{P^{7/5}}{KM} = 0. \tag{3}$$

Заміною $\ddot{P} = \dot{P}\frac{d\dot{P}}{dP}$ його зводимо до рівняння Бернуллі:

$$\frac{d\dot{P}}{dP} - \frac{2}{5}\frac{\dot{P}}{P} + \frac{5}{3}\frac{P^{7/5}}{KM\ \dot{P}} = 0, \tag{4}$$

яке описує зміну в часі сили удару.

Його шукаємо у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$\dot{P}\left(P\right)=F\left(P\right)\cdot G\left(P\right). \qquad (5)$$

Тоді: $\frac{d\dot{P}}{dP}=\frac{dF}{dP}G+F\frac{dG}{dP}$ і замість (4) одержуємо систему з двох рівнянь першого порядку:

$$\frac{dF}{dP}=\frac{2}{5}\frac{F}{P};\quad \frac{dG}{dP}=-\frac{3}{5}\frac{P^{7/5}}{KMG\,F^{2}}.$$

Інтегралами цих рівнянь, з точністю до сталої c, є:

$$F\left(P\right)=P^{2/5};$$

$$G\left(P\right)=\sqrt{c-\frac{25}{12}\frac{P^{8/5}}{KM}}.$$

Тому розв'язок (5) набуває вигляд:

$$\dot{P}=P^{2/5}\cdot\sqrt{c-\frac{25}{12}\frac{P^{8/5}}{KM}}. \qquad (6)$$

Якщо тривалість процесу стискання у часі становить $t=t_c$, то в кінці цього процесу $\dot{P}=0$, а $P=P_c$, де P_c – максимальне значення сили удару. Тоді $c=\frac{25}{12}\frac{P_c^{8/5}}{KM}$ і розв'язок (6) отримує форму:

$$\dot{P}=\frac{dP}{dt}\cdot\sqrt{\frac{25}{12KM}}\sqrt{P^{4/5}\left(P_c^{8/5}-P^{8/5}\right)}.$$

Його інтегрування дає:

$$\int_0^P\frac{d\,p}{\sqrt{P^{4/5}\left(P_c^{8/5}-P^{8/5}\right)}}=\sqrt{\frac{25}{12KM}}t$$

Або

$$\int_0^{P/P_c}\frac{d\,u}{\sqrt{u^{4/5}\left(1-u^{8/5}\right)}}=\sqrt{\frac{25P_c^{2/5}}{12KM}}t, \qquad (7)$$

де $u=\frac{P}{P_c}$.

Подальшою заміною $\xi=u^{3/5}$ вираз (7) зводимо до більш компактної форми:

$$\int_0^{\left(P/P_c\right)^{3/5}}\frac{d\,\xi}{\sqrt{1-\xi^{8/3}}}=\gamma\,t, \qquad (8)$$

в якій

$$\gamma=\sqrt{\frac{3P_c^{2/5}}{4KM}}. \qquad (9)$$

Приймаючи до уваги інтегральне подання Ateb-синуса [14, 17], із (8) отримуємо розв'язок рівняння (3):

$$P\left(t\right)=P_c\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3},1,\frac{4}{3}\gamma\,t\right)\right]^{5/3}. \qquad (10)$$

Оскільки $P\left(t_c\right)=P_c$, то тривалість процесу стискання тіл визначається рівнянням:

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3},1,\frac{4}{3}\gamma\,t_c\right)=1,$$

що має розв'язок:

$$\gamma\,t_c=I=\int_0^1\frac{d\,\xi}{\sqrt{1-\xi^{8/3}}}.$$

Цей інтеграл виражається через гама-функцію [18]. Тому:

$$\gamma\,t_c=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\frac{\Gamma\left(3/8\right)}{\Gamma\left(7/8\right)}.$$

Враховуючи, що $\Gamma\left(3/8\right)\approx 2{,}370437$, $\Gamma\left(7/8\right)\approx 1{,}089653$, остаточно одержуємо:

$$t_c \approx \frac{1,445927}{\gamma}.$$

Щоб знайти сталу P_c, скористаємось теоремою про зміну кількості руху, на підставі якої:

$$M\upsilon_0 = \int_0^{t_c} P(t)\,dt = P_c \int_0^{t_c} \left[\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\gamma t \right) \right]^{5/3} dt.$$

Перейдемо до нової змінної інтегрування $\gamma t = \eta$. Тоді:

$$M\upsilon_0 = \frac{P_c}{\gamma} \int_0^{I} \left[Sa\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta \right) \right]^{5/3} d\eta = \frac{P_c}{\gamma} \cdot \frac{3}{4}.$$

Звідки випливає, що:

$$P_c = \frac{4}{3}\gamma M \upsilon_0,$$

або з урахуванням (9):

$$P_c = \sqrt{\frac{4M}{3K}\upsilon_0^2 P_c^{1/5}}.$$

У підсумку:

$$P_c = \left(\frac{4}{3} \frac{M\upsilon_0^2}{K} \right)^{5/8}; \quad \gamma = \left(\frac{3}{4M} \right)^{3/8} \frac{\upsilon_0^{1/4}}{K^{5/8}}. \quad (11)$$

Ці формули, разом з (10), описують зміну сили удару в часі та визначають її максимум.

Далі не складно визначити й інші параметри удару. Для розрахунку зближення центрів мас тіл при їх стисканні із (2) і (10) отримуємо:

$$x(t) = x_c \cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\gamma t \right), \quad (12)$$

де, згідно з (11):

$$x_c = KP_c^{3/5} = \left(\frac{4M}{3} \right)^{3/8} \upsilon_0^{3/4} K^{5/8} = \frac{\upsilon_0}{\gamma}.$$

При $t > t_c$ відбувається розтискання пружних тіл. Цей процес на проміжку $t \in (t_c; 2t_c)$ теж описується залежностями (10), (12). Але для зручності обчислень доцільно в них замінити $\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\gamma t \right)$ на

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}(2I - \gamma t) \right).$$

При цьому $I \approx 1,445927$. Тоді і для розрахунку розтискання тіл можна використовувати апроксимацію Ateb-синуса в першій четверті його періоду.

Розрахунок тривалості процесу удару $t = t_y$ зводиться до використання формули:

$$t_y = 2I \cdot \frac{x_c}{\upsilon_0}.$$

Згідно з викладеною теорією, при розрахунках процесу удару доводиться обчислювати значення Ateb-синуса. В наближених розрахунках для цього можна задіяти його апроксимації елементарними функціями. Одна з них запропонована в [5] і має вигляд:

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta \right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \le \eta \le 0,2 \\ 0,1996 + 1,0277(\eta - 0,2) - 0,2064(\eta - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 < \eta < 0,8 \\ 1 - 1,2\sin^2\left[\sqrt{5}/3 \cdot (I - \eta) \right] & 0,8 \le \eta \le I. \end{cases} \quad (13)$$

Крім неї, можливі й інші варіанти наближення, наприклад:

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta \right) \approx \sin\left(\frac{\pi\eta}{2I} + a\eta(I - \eta) \right), \quad (14)$$

де

$$a = \frac{4}{I^2}\left[\arcsin\left(\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\frac{I}{2} \right) \right) - \frac{\pi}{4} \right] \approx -0,06526.$$

Більш точні значення, у порівнянні з (14), дає формула:

$$\operatorname{Sa}\left(\frac{5}{3},1,\frac{4}{3}\eta\right)\approx\sin\left(\frac{\pi\eta}{2I}+b\sin\frac{\pi\eta}{I}+c\sin\frac{2\pi\eta}{I}\right), \quad (15)$$

у якій:

$$b=\arcsin\left(\operatorname{Sa}\left(\frac{5}{3},1,\frac{4}{3}\frac{I}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{4}\approx-0,03411;$$

$$c=\arcsin\left(\operatorname{Sa}\left(\frac{5}{3},1,\frac{4}{3}\frac{I}{4}\right)\right)-\frac{\pi}{8}-b\sin\frac{\pi}{4}\approx-0,00221.$$

Інформація про точність записаних наближень надана в табл. 1.

Таблиця 1.

Точні та наближені значення Ateb-синуса

$10z$	$10\operatorname{Sa}\left(\frac{5}{3},1,\frac{4}{3}(zI)\right)$			
	формула (13)	формула (14)	формула (15)	точні
1	1,420	1,443	1,447	1,448
2	2,896	2,882	2,879	2,878
3	4,286	4,283	4,273	4,275
4	5,589	5,610	5,602	5,603
5	6,806	6,826	6,826	6,826
6	7,905	7,893	7,903	7,901
7	8,789	8,776	8,791	8,788
8	9,451	9,441	9,454	9,451
9	9,861	9,857	9,862	9,861
10	10,000	10,000	10,000	10,000

Суми квадратів відхилень при використанні апроксимацій (13), (14), (15) становлять відповідно: $18,12\cdot10^{-6}$; $4,78\cdot10^{-6}$; $0,3\cdot10^{-6}$. В середньому найбільш точні значення Ateb-синуса дає формула (15).

Застосовуючи викладену теорію, розглянемо удар сталевого тіла у якого параметр граничної поверхі $A=5$ м$^{-1/2}$, а характеристики матеріалу $E_1=2\cdot10^{11}$ Па, $\nu_1=0,25$. Матеріалом півпростору вибираємо гуму, у якої $E_2=7,5\cdot10^{6}$ Па, $\nu_2=0,5$. Для цих вихідних даних $K=1,3612\cdot10^{-4}$ м·Н$^{-3/5}$. Результати обчислень параметрів удару при $\upsilon_0=4$ м/с і різних M записано в табл. 2.

Таблиця 2.

Екстремальні значення параметрів удару при різних M

M, кг	P_c, Н	10^3x_c, м	10^3t_c, с
0,4	995,9785	8,5678	3,097
0,5	1145,0349	9,3155	3,367
0,6	1283,2374	9,9747	3,606
0,7	1413,0215	10,5680	3,820

При збільшенні M збільшуються і екстремальні значення характеристик удару. Їх залежність від початкової швидкості удару відображена в табл. 3, де $M=0,7$ кг.

Таблиця 3.

Екстремальні значення параметрів удару при різних υ_0.

υ_0, м/с	P_c, Н	10^3x_c, м	10^3t_c, с
2	594,1023	6,2839	4,543
3	986,2235	8,5173	4,105
4	1413,0215	10,5680	3,820

При збільшенні υ_0 зростають P_c і x_c, але зменшується t_c.

Залежності $P(t)$ і $x(t)$ в безрозмірних координатах графічно подано на рис. 2.

Щоб перевірити вірогідність виведених формул, додатково проведено числове інтегрування диференціального рівняння (3) на комп'ютері при початкових умовах: $P(t_c)=P_c$, $\dot{P}(t_c)=0$. Їх використання можливе завдяки симетрії графіка $P(t)$ відносно вертикалі $t=t_c$. Отримані результати записано в табл. 4.

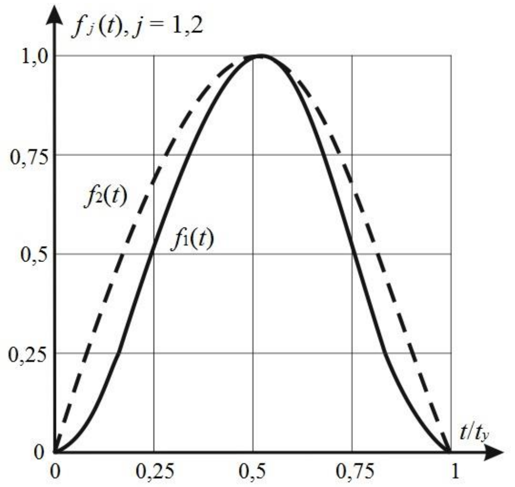

Рис. 2. Графіки $P(t)$ і $x(t)$: ———

$$f_1(t)=P(t)/P_c;$$

$$f_2(t)=x(t)/x_c$$

Таблиця 4.

Значення $P(t)/P_c$, обчислені двома способами

$\frac{\upsilon_0 t}{I\,x_c}$	Значення 10 $P(t)/P_c$		$\frac{\upsilon_0 t}{I\,x_c}$	Значення 10 $P(t)/P_c$	
	Форм. (10), (15)	Чисел. інт.		Форм. (10), (15)	Чисел. інт.
0,1	0,399	0,399	0,6	6,755	6,753
0,2	1,255	1,255	0,7	8,067	8,063
0,3	2,424	2,426	0,8	9,107	9,102
0,4	3,807	3,808	0,9	9,771	9,769
0,5	5,292	5,292	1,0	10,000	10,000

Малі розбіжності результатів в цій таблиці підтверджують вірогідність побудованих аналітичних розв'язків.

Висновки.

1. Нелінійне диференціальне рівняння сили удару пружних тіл з сингулярною точкою на поверхні їх контакту має аналітичний розв'язок, який виражається степенями Ateb-синуса.

2. Завдяки наявності компактних апроксимацій цієї спеціальної функції не виникає ускладнень при числовій реалізації розв'язку.

3. Порівняльний аналіз результатів, одержаних різними способами, підтвердив вірогідність побудованих аналітичних розв'язків задачі удару.

4. Пружна постановка задачі в цій роботі передбачає удар твердих тіл з невеликою початковою швидкістю.

Список використаних джерел

1. Herts H. Über die Berrührung Fester Elastischer Körper. *Jornal Reine und Andewandte Mathematik (Grelle's Journal)*. 1882. Is. 92. P. 156-171. doi.org/10.1515/crll.1882.92.156.

2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва : Стройиздат, 1965. 447 с.

3. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев : Наукова думка, 1976. 319 с.

4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва.-Ленинград : Гостехиздат, 1949. 272 с.

5. Ol'shanskii V., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *Easter-Europen Journal of enterpries technologies*. 2019. № 1/7(97). P. 25-32. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.155854.

6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Москва.-Ленинград : Физматгиз, 1969. 439 с.

7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Москва : Машиностроение, 1970. 734 с.

8. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация

многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков : Міськдрук, 2011. 376 с.

9. Ольшанський В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанський С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. Харьков : Міськдрук, 2012. 320 с.

10. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Ateb-синус у розв'язку задачі Герца про удар. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2018. № 3 (1279). С. 98-103.

11. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2017. № 3 (86). С. 34-40.

12. Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ. *Доповіді Національної академії наук України*. 1997. № 7. С. 55–58.

13. Сокіл Б. І., Ліщинська Х. І. Асимптотичний метод і періодичні Ateb-функції у дослідженнях коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія : Динаміка, міцність і проектування машин і приладів*. 2006. № 556. С. 57-64.

14. Пукач П Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. С. 138-14. 288 с.

15. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffnes vibration isolation systems. *Naukovyi Visnyk Natsionalnogo Hirnychogo Universytetu*. 2015. Is. 3. P. 62-67.

16. Надутый В. П., Ягнюков В. Ф., Ягнюкова И. В. Взаимодействие кусков материала с футерированным валком вибрационного классификатора. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2014. № 1 (73). С. 94-99.

17. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій. *Доповіді Національної академії наук України.* 2007. № 12. С. 37-42.

18. Градштейн И. С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1962. 1100 с.

Список джерел у транслітерації

1. Herts H. (1882). Über die Berrührung Fester Elastischer Körper. *Jornal Reine und Andewandte Mathematik*. *B 92*, 156-171. doi: https:/doi.org/10.1515/crll.1882.92.156. [In German].

2. Goldsmit V. (1965) Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemyih tel *[Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies]*. M.: Stroyizdat. [In Russian].

3. Kilchevsky N.A. (1976) Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdyih tel. Udar *[Dynamic contact compression of solids. Blow].* Kiev: Naukova dumka. [In Russian].

4. Shtaerman I.Ya. (1949) Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti *[Contact problem of the theory of elasticity].* M.-L. : Gostekhizdat. [In Russian].

5. Ol'shanskii V., Spol'nik O., Slipchenko M., & Znaidiuk V. (2019) Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *Easter-Europen Journal of enterpries technologies, 1/7(97), 25-32.*

6. Timoshenko S. P. (1969) Fluctuations in engineering *[Kolebaniya v ingenernom dele].* M.-L.: Fizmat. [In Russian].

7. Filippov A.P. (1970) Kolebaniya deformiruemyih sistem *[Oscillations of deformable systems].* Moscow: Mechanical Engineering. [In Russian].

8. Smetankina N.V. (2011) Unsteady deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells *[Nestashianahnoe deformirovanye, termouprugostia i optimizashya mnogoslonux plastin i shilindrisheskya oboloshek].* Kharkiv : Miskdruk. [In Russian].

9. Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N. & Olshanskiy S.V. (2012) Kolebaniya sterzhney i plastin pri mehanicheskom udare *[Oscillations of rods and plates with mechanical impact]*. Kharkiv : Miskdruk. [In Russian].

10. Olshanskiy V.P., & Olshanskiy S.V. (2018) Ateb-sinus u rozviazku zadachi Hertsa pro udar [Ateb-sinus in the solution of the Hertz problem]. *Visnyk NTU"KhPI". Matematychne modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh* [*Bulletin of NTU "KhPI". Mathematical modeling in engineering and technology*]. № 3, 98-103 [In Ukrainian].

11. Olshanskiy V.P., & Olshanskiy S.V. (2017) Pro rux oscylyatora zi stepenevoyu harakterystykoyu pruzhnosti [On the motion of an oscillator with a power characteristic of elasticity]. *Vibracii v tehnici ta tehnologijah [Vibrations in engineering and technology]*, 3 (86), 34-40 [In Ukrainian].

12. Sokil B. I. (1997) Pro zastosuvannia Ateb-funktsii dlia pobudovy rozviazkiv deiakykh rivnian, yaki opysuiut neliniini kolyvannia odnovymirnykh seredovyshch [On the application of the Ateb-function to construct solutions of some equations that describe nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]*. Kyiv, 7, 55–58 [In Ukrainian].

13. Sokil B.I., & Lishinskiy H.I. (2006) Asymptotychnyy metod i periodychni Ateb-funktsiyi u doslidzhennyakh kolyvnykh protsesiv rukhomykh neliniyno pruzhnykh odnovymirnykh system *[*Asymptotic method and periodic Ateb-functions in studies of oscillatory processes of moving nonlinearly elastic one-dimensional systems*]. Visnyk*

Natsional'noho universytetu «L'vivs'ka politekhnika». Seriya : Dynamika, mitsnist' i proektuvannya mashyn i pryladiv [Bulletin of the National University «Lviv Polytechnic», Series: Dynamics, durability and design of machines and devices], 556, 57-64 [In Ukrainian].

14. Pukach P.Ya. (2014) Yakisni metody doslidzhennia neliniinykh kolyvalnykh system [Qualitative methods for investigating nonlinear oscillatory systems]. Lviv: Lvivska politekhnika. [In Ukrainian].

15. Pukach P.Ya., & Kuzio I.V. (2015) Resonance phenomena in quasi-zero stiffnes vibration isolation systems *[Naukovyi Visnyk Natsionalnogo Hirnychogo Universytetu], 3, 62-67.*

16. Nadutyy V.P., Yahnyukov V.F., & Yahnyukova Y.V. (2014). Vzaymodeystvye kuskov materyala s futeryrovannym valkom vybratsyonnoho klassyfykatora. [Interaction of pieces of material with a lined roll of the vibrating classifier] *Vibracії v tehnici ta tehnologijah [Vibrations in engineering and technology],* 1 (73), 94-99. [In Ukrainian].

17. Gricik V.V., & Nazarkevich M.A. (2007) Matematychni modeli alhorytmiv i realizatsiia Ateb-funktsii [*Mathematical models of algorithms and realizations Ateb-functions] Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine], 12, 37-42* [In Ukrainian].

18. Gradshtejn, I. S., & Ryzhik, I.M. (1962) Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij [Tables of integrals, sums, series and products]. Moskva, Nauka. [In Russian].

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ СИЛЫ УДАРА ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ

Составлено нелинейное дифференциальное уравнение силы прямого центрального удара упругих тел вращения, имеющих сингулярную точку на предельной контактной поверхности, где бесконечная ее кривизна. Для определения коэффициентов уравнения и порядка его степенной нелинейности использовано известный решение осесимметричной контактной задачи теории упругости, построенный И. Я. Штаерман. При постановке динамической задачи использовано классические предположение теории квазистатического удара, которые предложил Г. Герц. Составленое уравнение силы удара сведено к уравнению Бернулли и расположен он замкнутый аналитический решение, которое выражено через Ateb-синус. Получены аналитические зависимости от времени силы удара и сближение центров масс упругих тел. Выведены компактные формулы для расчета максимумов этих величин, а также длительностей процесса сжатия и удара тел. Предложено компактные аппроксимации Ateb-синуса элементарными функциями. Благодаря этим приближением удалось получить достаточно простую аналитическую развертку во времени скоротечного механического процесса. Традиционно в других работах такую развертку получали числовым решением соответствующих интегральных уравнений для силы удара. Приведены примеры расчетов, в которых исследовано влияние различных факторов на основе характеристики удара тел с небольшой начальной скоростью. Ограничения на скорость столкновения обусловлено упругой постановкой задачи, где исключена возможность появления пластических деформаций. В результате такой постановки отпала необходимость определять коэффициент восстановления скорости, потому что он равен единице. Проведено сравнение числовых результатов, к которым приводят полученные аналитические решения и числовое интегрирование уравнения силы удара на компьютере. Малые расхождения результатов подтвердили достоверность выведенных расчетных формул. Числовые результаты касаются удара стального тела по неподвижному резиновому полупространству, аналог чего наблюдается на практике при падении кусков минерального сырья на валки вибрационного классификатора, которые футерованы резиной.

Ключевые слова*: теория Г. Герца, уравнения силы удара, особая точка на поверхности, аналитическое решение, Ateb-синус и его аппроксимация.*

ABOUT THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE EQUATION OF IMPACT FORCE OF TWO ELASTIC BODIES

A nonlinear differential equation of the force of direct central impact of elastic bodies of revolution, which have a singular point on the boundary contact surface, where its curvature is infinite, is compiled. To determine the coefficients of the equation and the order of its power nonlinearity, the well-known solution of the axisymmetric contact problem of the theory of elasticity, constructed by I. Ya. Shtaermann, is used. In the formulation of the dynamic problem, the classical assumptions of the theory of quasi-static impact proposed by H. Hertz were also used. The constituted equation of impact force is reduced to the Bernoulli equation and its closed analytical solution is constructed, which is expressed in terms of the Ateb-sine. Analytical time dependences of the impact force and the convergence of the centers of mass of elastic bodies are obtained. Compact formulas have been derived for calculating the maxima of these quantities, as well as the durations of the process of compression and impact of bodies. Compact approximations of Ateb-sine by elementary functions are proposed. Thanks to these approximations, it was possible to obtain a fairly simple analytical sweep in time of a fast-flowing mechanical process. Traditionally, in other works such a scan was obtained by numerical solution of the corresponding integral equations that determine the force of an impact. Examples of calculations are given in which the influence of various factors on the main characteristics of a body impact with a small initial velocity is investigated. The limitation on the collision rate is due to the elastic formulation of the problem, where the possibility of plastic deformations is excluded. As a result of this formulation, the need to determine the rate of recovery rate has disappeared, for it is equal to one. Comparison of numerical results is carried out, to which the obtained analytical solutions and the numerical integration of the impact force equation on a computer lead. Small divergences of the results confirmed the accuracy of the derived calculation formulas. Numerical results relate to the impact of a steel body on a fixed rubber half-space, the analogue of which is observed in practice when falling pieces of mineral raw materials on the rolls of a vibration classifier lined with rubber.

Key words: H. Hertz theory, equations of force of impact, special point on the surface, analytical solution, Ateb-sine and its approximation.

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри надійності і міцності машин та споруд Державного біотехнологічного університету, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; OlshanskiyVP@gmail.com тел.: (066) 0100955
Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математичних наук, профессор, профессор кафедры надежности и прочности машин и сооружений Государственного биотехнологический университета, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; OlshanskiyVP@gmail.com, тел.: (066) 0100955
Olshanskiy Vasyl – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor of the Department of Reliability and Strength of Machines and Construction, State Biotechnological University, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; OlshanskiyVP@gmail.com, тел.: (066) 0100955

Сліпченко Максим Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри надійності і міцності машин та споруд Державного біотехнологічного університету, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989
Слипченко Максим Владимирович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой надежности и прочности машин и сооружений Государственного биотехнологического университета, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989
Slipchenko Maksym – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Head of the Department of Reliability and Strength of Machines and Construction of State Biotechnological University, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Солона Олена Василівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: solona_o_v@ukr.net).
Солона Елена Васильевна – кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: solona_o_v@ukr.net).
Solona Olena – Candidate of Technical Sciences (*Ph. D in Engeneering*), Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection, Vinnytsia National Agrarian University (3, Solnyschaya St., Vinnytsia, Ukraine,21008, e-mail: solona_o_v@ukr.net).

Купчук Ігор Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, +380978173992, kupchuk.igor@i.ua, http://orcid.org/0000-0002-2973-6914).
Купчук Игорь Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г.. Винница, 21008, Украина, +380978173992, kupchuk.igor@i.ua, http://orcid.org/0000-0002-2973-6914).
Kupchuk Ihor – Candidate of Technical Sciences (Ph. D in Engeneering), Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection, Vinnytsia National Agrarian University (3, Sonychna St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, +380978173992, kupchuk.igor@i.ua, http://orcid.org/0000-0002-2973-6914).