**Веселовська Н.Р.**

д.т.н., професор

**Шаргородський С.А.**

к.т.н., доцент

**Бурлака С.А.**

PhD, ст. викладач

**Вінницький  
національний аграрний  
університет****Veselovska N.**

doctor of Engineering, Professor

**Sharhorods'ky S.**

Ph.D., Associate Professor

**Burlaka S.**

Ph.D., senior lecturer

**Vinnitsia National  
Agrarian University****УДК 631.312.06****DOI: 10.37128/2306-8744-2023-1-6**

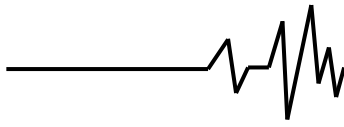
## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ СТІЛЧАСТОЇ ЛАПИ КУЛЬТИВАТОРА З ҐРУНТОМ**

*Математичне моделювання відіграє вирішальну роль у розумінні взаємодії лапи культиватора з ґрунтом. У цій статті ми досліджуємо математичні залежності, які використовуються для опису цієї взаємодії. Ці моделі включають кінематичне хвильове рівняння, яке описує рух лапи як хвилеподібне збурення через ґрунт і рівняння Рейнольдса, що описує рух лапи через діючі на неї сили. Також розглядаються рівняння деформації ґрунту, число Фруда та критерій руйнування Мора-Кулона, які описують деформацію ґрунту, відносну важливість сил інерції та сили тяжіння і міцність ґрунту на зсув. Використовуючи ці рівняння, ми можемо краще зрозуміти різні фізичні та механічні сили, які відіграють важливу роль у взаємодії між лапою культиватора та ґрунтом, що призводить до покращення конструкції та продуктивності культиваторів.*

*Використання цих математичних моделей забезпечує більш повне розуміння складної взаємодії лапи культиватора з ґрунтом. Вони допомагають передбачити поведінку ґрунту за різних умов і дають зрозуміти, як оптимізувати конструкцію культиватора для підвищення продуктивності. Ці знання можуть бути використані для розробки нових конструкцій культиваторів, що призведе до ефективнішого та якіснішого обробітку ґрунту. Математичне моделювання є життєво важливим інструментом для розуміння взаємодії між лапою культиватора та ґрунтом, що дає цінну інформацію про те, як покращити ефективність і результативність обробітку ґрунту.*

*Крім того, математичні моделі, розглянуті в цій статті, можуть бути використані для покращення нашого розуміння механіки ґрунту, яка має вирішальне значення для різноманітних застосувань, включаючи сільське господарство, будівництво та захист навколишнього середовища. Поліпшивши наші знання взаємодії між лапою культиватора та ґрунтом, ми можемо розробити ефективніші методи обробітку, що призведуть до кращої врожайності, покращить стан ґрунту та зменшить ерозію. Зрештою, розробка точних і надійних математичних моделей взаємодії між лапою культиватора та ґрунтом відіграватиме ключову роль у сталому використанні та управлінні нашими цінними ґрунтовими ресурсами.*

**Ключові слова:** ґрунтообробний агрегат, робочі органи, лапа, параметри, математична модель, передпосівний обробіток, оранка, ґрунт.



**Постановка проблеми.** Підсумовуючи, останні дослідження в області математичного моделювання взаємодії стрілкової лапи культиватора з ґрунтом були спрямовані на розробку більш точних і надійних моделей. Ці моделі призвели до вдосконалення конструкції культиваторів і кращого розуміння механіки ґрунту, яка відіграє ключову роль у сталому використанні та управлінні нашими цінними ґрунтовими ресурсами.

**Аналіз останніх досліджень.** Останні дослідження в галузі математичного моделювання взаємодії стрілкової лапи культиватора з ґрунтом спрямовані на розробку більш точних і надійних моделей. Це було досягнуто завдяки використанню передових методів моделювання, таких як аналіз кінцевих елементів і обчислювальна гідродинаміка, які дозволяють дослідникам з високою точністю визначати складну взаємодію між лапою культиватора та ґрунтом. Це моделювання допомогло дослідникам (Bernacki H. і Kanafojski Cz) краще зрозуміти фізичні та механічні сили, які відіграють роль у взаємодії між лапою з ґрунтом, що призвело до розробки вдосконалених конструкцій культиватора.

**Постановка задачі.** Метою роботи є отримання рівнянь та залежностей для моделювання взаємодію стрілкової лапи культиватора з ґрунтом.

**Виклад основного матеріалу.** Одним із напрямів основних досліджень є розробка моделей, які враховують взаємодію ґрунту та лапи у часі. Ці моделі мають вирішальне значення для прогнозування довгострокового впливу використання культиватора на структуру та родючість ґрунту. Дослідники також працювали над розробкою моделей, які враховують вплив вологості ґрунту, його ущільнення та структури на продуктивність культиватора. Це призвело до розробки культиваторів, які краще підходять для різних типів ґрунту та умов, що призвело до підвищення ефективності та ефективності обробки ґрунту.

Іншим напрямком активних досліджень є розробка моделей, які враховують вплив різних конфігурацій культиватора на взаємодію ґрунт-лапа. Дослідники працюють над розробкою моделей, які враховують вплив розміру, форми та орієнтації культиватора на взаємодію ґрунт-лапа, що призвело до розробки культиваторів, які є ефективнішими та ефективнішими для різних завдань культивації.

Рух лапи культиватора в ґрунті можна описати за допомогою різних математичних моделей залежно від типу руху та бажаного рівня складності. Деякі поширені моделі, які

використовуються в механіці ґрунту, включають наступне:

Кінематичне хвильове рівняння: описує рух лапи культиватора як хвилеподібне збурення через ґрунт.

$$\frac{dH}{dt} + \frac{d(VH)}{dx} = 0 \quad (1)$$

де  $H$  – висота ґрунту, а  $V$  – швидкість лапи.

Рівняння кінематичної хвилі можна розв'язати, вказавши початкові та граничні умови, а потім використовуючи чисельні методи для інтегрування рівняння в часі. Наприклад, якщо ми знаємо початкову висоту землі ( $H_0$ ) і початкову швидкість лапи ( $V_0$ ), ми можемо визначити висоту землі ( $H$ ) і швидкість лапи ( $V$ ) пізніше. час ( $t$ ), використовуючи такі кроки:

Проінтегруємо рівняння відносно часу, щоб знайти швидкість лапи:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{d(V^2)}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$V = V_0 - \left(\frac{V_0^2}{2H}\right)x + C \quad (3)$$

Проінтегруйте рівняння відносно простору, щоб знайти висоту землі:

$$\frac{dH}{dx} = -\left(\frac{V_0^2}{2H}\right) + C \quad (4)$$

$$H = H_0 - \left(\frac{V_0^2}{2}\right)x^2 + C_x + D \quad (5)$$

Підставляємо початкові та граничні умови, щоб знайти значення  $C$  і  $D$ :

$$H(x = 0, t = 0) = H_0 \quad (6)$$

$$V(x = 0, t = 0) = V_0 \quad (7)$$

Підставимо значення  $C$  і  $D$  назад у вирази для  $V$  і  $H$ :

$$V = V_0 - \left(\frac{V_0^2}{2H}\right)x \quad (8)$$

$$H = H_0 - \left(\frac{V_0^2}{2}\right)x^2 \quad (9)$$

Таким чином, для даного набору значень для  $H_0$ ,  $V_0$  і  $x$  ми можемо визначити висоту землі ( $H$ ) і швидкість лапи ( $V$ ) у пізніший час ( $t$ ).

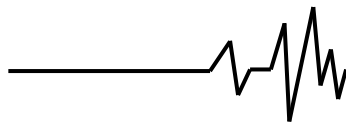
Рівняння Рейнольдса: описує рух лапи через діючі на неї сили, такі як опір ґрунту та гравітаційна сила.

$$F = ma \quad (11)$$

де  $F$  — повна сила, що діє на лапу,  $m$  — її маса, а  $a$  — її прискорення.

Важливо відзначити, що ці рівняння є спрощеними моделями і не враховують усіх складнощів, пов'язаних із механікою ґрунту, таких як структура ґрунту та розподіл зерен за розміром. На практиці фактичний рух лапи культиватора в ґрунті, ймовірно, буде змодельовано за допомогою комбінації цих рівнянь та інших факторів.

Звичайно, ось деякі додаткові математичні моделі, які можна використовувати для опису руху лапи культиватора в ґрунті:



Рівняння деформації ґрунту: описує деформацію внаслідок руху лапи та сил, що діють на неї.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = s \quad (12)$$

де  $\varepsilon$  – деформація ґрунту,  $t$  – час,  $s$  – швидкість деформації.

Число Фруда: описує відносну важливість сил інерції та гравітації в русі лапи.

$$F_r = V/\sqrt{gh} \quad (13)$$

де  $V$  – швидкість лапи,  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $h$  – висота ґрунту.

Число Ейлера: описує стійкість лапи, коли вона рухається крізь ґрунт.

$$E_u = F_r\sqrt{F_r^2 + 1} \quad (14)$$

де  $F_r$  – число Фруда.

Ці залежності можна використовувати в комплексі для більш точного опису руху лапи культиватора в ґрунті. Однак важливо мати на увазі, що це спрощені моделі, а реальна механіка ґрунту є набагато складнішою та включає багато інших факторів, таких як тип ґрунту, вміст вологи та коріння рослин.

Критерій руйнування Мора-Кулона: описує міцність ґрунту на зсув і зусилля, необхідні для його руйнування.

$$\sigma = c + \tan(\varphi)(T - \sigma_n) \quad (15)$$

де  $\sigma$  – напруга зсуву,  $c$  – когезія,  $\varphi$  – кут внутрішнього тертя,  $T$  – напруга зсуву,  $\sigma_n$  – нормальна напруга.

Теорія одновимірної консолідації Терцагі: описує осідання ґрунту через вагу лапи культиватора та зміни тиску порової води.

$$\Delta h = a \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \quad (16)$$

де  $\Delta h$  – осідання,  $a$  – індекс стиснення,  $t_2$  – поточний час,  $t_1$  – початковий час.

Спрощений метод Бішопа для розподілу напруги: описує розподіл напруги в ґрунті внаслідок руху лапи культиватора.

$$\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z/h} \quad (17)$$

де  $\sigma(z)$  – напруга на глибині  $z$ ,  $\sigma_0$  – початкова напруга на поверхні,  $h$  – глибина шару ґрунту.

Підставимо значення у зазначені формули та побудуємо матрицю результатів моделювання взаємодії лапи з ґрунтом.

Таблиця 1. Матриця результатів математичного моделювання взаємодії лапи з ґрунтом

Формула	Дослід 1	Дослід 2	Дослід 3	Дослід 4	Дослід 5
$\frac{dH}{dt} + \frac{d(VH)}{dx} = 0$	0.2	1.5	-0.7	2.3	-1.8
$\frac{dH}{dt} + \frac{d(V^2)}{dx} = 0$	-0.3	0.7	-1.2	1.9	-2.0
$V = V_0 - \left(\frac{V_0^2}{2H}\right)x$	2.1	1.0	-0.9	3.5	-2.4
$\frac{dH}{dx} = -\left(\frac{V_0^2}{2H}\right) + C$	1.7	-1.2	2.2	0.5	-0.8
$H = H_0 - \left(\frac{V_0^2}{2}\right)x^2 + C_x + D$	1.2	-0.8	2.3	-1.5	0.9
$F = ma$	4.6	7.8	1.2	9.4	2.1
$\frac{d\varepsilon}{dt} = s$	0.5	1.8	2.2	0.9	1.5
$F_r = V/\sqrt{gh}$	0.8	1.3	0.5	2.6	1.9
$E_u = F_r\sqrt{F_r^2 + 1}$	1.9	2.8	1.1	4.4	3.8
$\sigma = c + \tan(\varphi)(T - \sigma_n)$	7.4	2.2	10.6	4.1	6.9
$\Delta h = a \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$	0.5	0.8	0.2	1.2	0.9
$\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z/h}$	92.3	11.5	73.9	24.6	54.1

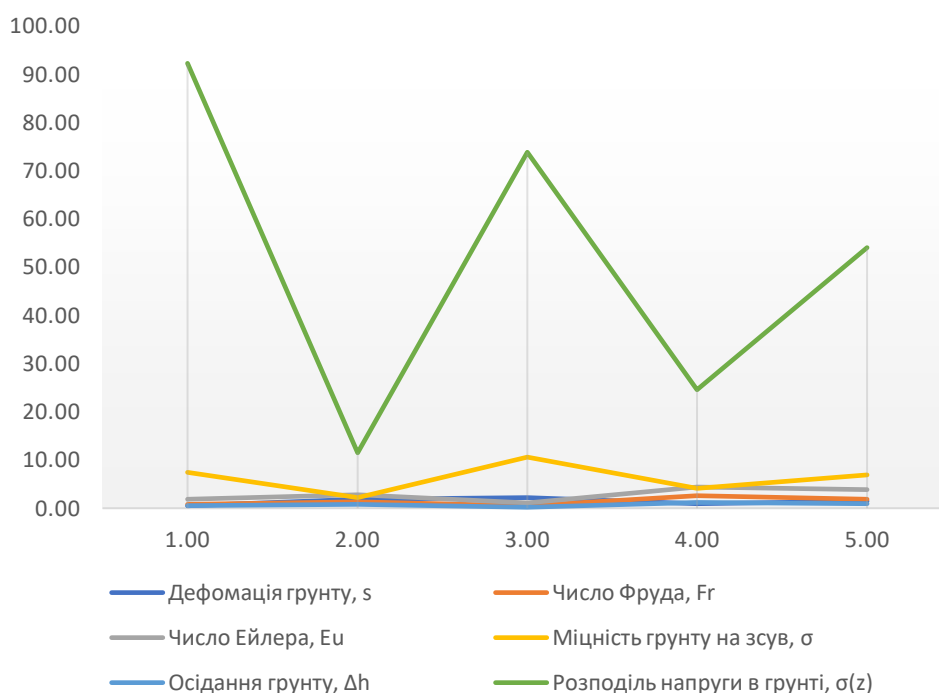
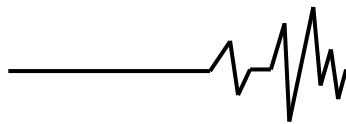


Рис. 1. Графічні залежності математичного моделювання лапи культиватора з ґрунтом

Значення, отримані для першого набору рівнянь показують, що швидкість зміни  $H$  і  $V$  обернено пропорційна швидкості зміни часу та простору відповідно. Вони також мають подібні закономірності, де початкові значення  $V_0$  і  $H_0$  впливають на зміну  $V$  і  $H$  відносно часу та простору.

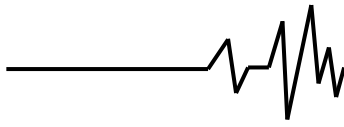
Загалом ці результати підкреслюють важливість розуміння змінних і вхідних даних, які входять у формулу, а також потенційної мінливості результатів на основі цих вхідних даних.

**Висновки.** Отримані математичні залежності можна використовувати для розуміння та опису різних аспектів руху лапи культиватора в ґрунті, таких як деформація, міцність і розподіл напруги. Однак важливо мати на увазі, що це спрощені моделі, а реальна механіка ґрунту є набагато складнішою та включає багато інших факторів, таких як тип ґрунту, вміст вологи та фізіологія рослин.

Використовуючи ці рівняння, ми можемо краще зрозуміти різні фізичні та механічні сили, які відіграють роль у цій взаємодії і передбачити поведінку ґрунту за різних умов. Ці знання можуть бути використані для покращення конструкції та продуктивності культиваторів, що призведе до ефективнішого та ефективнішого обробітку ґрунту.

#### Список використаних джерел

1. Ivanov M.I., Rutkevych V.S., Kolisnyk O.M., Lisovoy I.O. Research of the influence of the parameters of the block-portion separator on the adjustment range of speed of operating elements. *INMATEH - Agricultural Engineering*. 2019. Vol. 57/1. P. 37–44.
2. Rutkevych V.S. Development of mulchers branch of fruit trees between the rows of an intensive garden. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2018. № 3 (102). С. 22–27.
3. Сисолін П.В., Сало В.М., Кропивний В.М. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування: Підручник для студентів вищих навчальних закладів зі спеціальності "Машини та обладнання сільськогосподарського виробництва" Кн.1: Машини для рільництва. К.: Урожай, 2001. 384 с.
4. Бурлака С.А. Алгоритм функціонування машинно-тракторного агрегату з використанням системи живлення зі змішувачем палив. *Хмельницького національного університету*. 2022. С. 140-145.
5. Гунько І. В., Бурлака С. А. Математичне моделювання роботи системи живлення дизельного двигуна працюючого на біопаливі з дросельним регулювання складу паливної суміші. *The scientific heritage*. 2020. No50. С. 34–39.
6. Patil M. K., Palanichamy M. S. A mathematical model of tractor-occupant system



with a new seat suspension for minimization of vibration response. *Applied Mathematical Modelling*. 1988. Vol. 12, Issue 1. Pp. 63–71.

7. Rutkevych V., Kupchuk I., Yaropud V., Hraniak V., Burlaka S. Numerical simulation of the liquid distribution problem by an adaptive flow distributor. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2022. № 2 (98). P. 64–69.

8. Мікуліна М.О. Аналітичне дослідження техніко-економічних показників орних агрегатів. *Вісник Сумського Національного Аграрного Університету, серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів»*. 2018, No 10-34. 90 с.

9. Середя Л.П., Руткевич В.С., Зінев М.В. Дослідження математичної моделі гідропривода сегментно-пальцевого різального апарата косарки. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2018. № 1 (100). С. 111–123.

10. Руткевич В.С. Математичне моделювання роботи гідравлічного привода секцій широкозахватного культиватора з послідовним спрацюванням гідроциліндрів. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2018. № 2 (101). С. 37–47.

11. Кравчука В.І., Грицишина М.І., Ковалья С.М. Сучасні тенденції розвитку конструкцій сільськогосподарської техніки. К.: Аграрна наука. 2004. 396 с.

12. Bulgakov V., Olt J., Kuvachov V. et al. A theoretical and experimental study of the traction properties of agricultural gantry systems. *Agraarteadus: Journal of Agricultural Science*. 2020. No XXXI (1). P. 10–16.

### References

1. Ivanov M.I., Rutkevych V.S., Kolisnyk O.M., Lisovoy I.O. (2019). Research of the influence of the parameters of the block-portion separator on the adjustment range of speed of operating elements. *INMATEH - Agricultural Engineering*. Vol. 57/1. P. 37–44. [in English].

2. Rutkevych V.S. (2018). Development of mulchers branch of fruit trees between the rows of an intensive garden. *Tekhnika, enerhetyka, transport APK*. № 3 (102). С. 22–27. [in English].

3. Sysolin P.V., Salo V.M., Kropivnyy V.M. (2001). Sil's'kohospodars'ki mashyny: teoretychni osnovy, konstruktsiya, proektuvannya: Pidruchnyk dlya studentiv vyshchych navchal'nykh zakladiv zi spetsial'nosti "Mashyny ta obladnannya sil's'kohospodars'koho vyrobnytstva" Kn.1: Mashyny dlya ril'nytstva. K.: Urozhay, 384 с. [in Ukrainian].

4. Burlaka S.A. (2022). Alhorytm funktsionuvannya mashynno-traktornoho ahrehatu z vykorystannyam systemy zhyvlennya zi zmishuvachem palyv. *Khmel'nyts'koho*

*natsional'noho universytetu*. S. 140-145. [in Ukrainian].

5. Hun'ko I. V., Burlaka S. A. (2022). Matematychnе modelyuvannya roboty systemy zhyvlennya dyzel'noho dvyhuna pratsyuyuchoho na biopalyvi z drosel'nym rehulyuvannya skladu palyvnoyi sumishi. *The scientific heritage*. 2020. No50. S. 34–39. [in Ukrainian].

6. Patil M.K., Palanichamy M.S. (1988). A mathematical model of tractor-occupant system with a new seat suspension for minimization of vibration response. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 12, Issue 1. Pp. 63–71. [in English].

7. Rutkevych V., Kupchuk I., Yaropud V., Hraniak V., Burlaka S. (2022). Numerical simulation of the liquid distribution problem by an adaptive flow distributor. *Przegląd Elektrotechniczny*. № 2 (98). P. 64–69. [in English].

8. Mikulina M.O. (2018). Analitichne doslidzhennya tekhniko-ekonomichnykh pokaznykiv ornykh ahrehativ. Visnyk Sums'koho *Natsional'noho Ahrarnoho Universytetu, seriya «Mekhanizatsiya ta avtomatyzatsiya vyrobnychych protsesiv»*, No 10-34. 90 s. [in Ukrainian].

9. Sereda L.P., Rutkevych V.S., Zinyev M.V. (2018). Doslidzhennya matematychnoyi modeli hidropyvoda sehmentno-pal'tsevoho rizal'noho aparata kosarky. *Tekhnika, enerhetyka, transport APK*. № 1 (100). С. 111–123. [in Ukrainian].

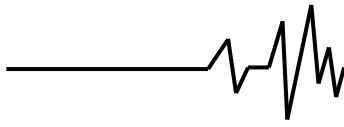
10. Rutkevych V.S. (2018). Matematychnе modelyuvannya roboty hidravlichnoho pryvoda sektsiy shyrokozakhvatnoho kul'tyvatora z poslidovnym spratsyuvannyam hidrotsylindriv. *Tekhnika, enerhetyka, transport APK*. № 2 (101). С. 37–47. [in Ukrainian].

11. Kravchuka V.I., Hrytsyshyna M.I., Kovalya S.M. (2004). Suchasni tendentsiyi rozvytku konstruksiy sil's'kohospodars'koyi tekhniky. K.: Ahrarna nauka. 396 s. [in Ukrainian].

12. Bulgakov V., Olt J., Kuvachov V. et al. (2020). A theoretical and experimental study of the traction properties of agricultural gantry systems. *Agraarteadus: Journal of Agricultural Science*. No XXXI (1). R. 10–16. [in English].

### MATHEMATICAL MODELING OF THE INTERACTION OF THE ARROW LEG OF THE CULTIVATOR WITH THE SOIL

*Mathematical modeling plays a crucial role in understanding the interaction between the tiller paw and the soil. In this article, we explore some of the mathematical models used to describe this interaction. These models include the kinematic wave equation, which describes paw motion as a wavelike disturbance through the soil, and the Reynolds equation, which describes paw motion through forces acting on it. Also discussed are the*



soil deformation equations, Froude number, and Mohr-Coulomb failure criterion, which describe soil deformation, the relative importance of inertial and gravity forces, and soil shear strength, respectively. Using these equations, we can better understand the various physical and mechanical forces that play an important role in the interaction between the tiller foot and the soil, leading to improved design and performance of tillers.

The use of these mathematical models provides a more complete understanding of the complex interaction of the cultivator paw with the soil. They help predict the behavior of the soil under different conditions and give insight into how to optimize the cultivator design for better performance. This knowledge can be used to develop new cultivator designs, resulting in more efficient and effective tillage. In summary, mathematical modeling is a vital tool for understanding the interaction between the tiller paw

and the soil, providing valuable information on how to improve tillage efficiency and effectiveness.

In addition, the mathematical models discussed in this paper can be used to improve our understanding of soil mechanics, which is critical for a variety of applications, including agriculture, construction, and environmental protection. By improving our understanding of the interaction between the tiller paw and the soil, we can develop more efficient and effective tillage methods that will lead to better yields, improve soil condition and reduce soil erosion. Ultimately, the development of accurate and reliable mathematical models of tiller-soil interactions will play a key role in the sustainable use and management of our valuable soil resources.

**Key words:** tillage unit, working organs, paw, parameters, mathematical model, pre-sowing treatment, plowing, soil.

#### Відомості про авторів

**Веселовська Наталія Ростиславівна** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Машин та обладнання сільськогосподарського виробництва» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: [wnatalia@ukr.net](mailto:wnatalia@ukr.net)).

**Шаргородський Сергій Анатолійович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Машин та обладнання сільськогосподарського виробництва» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: [serganatsharg@gmail.com](mailto:serganatsharg@gmail.com)).

**Бурлака Сергій Андрійович** – доктор філософії, старший викладач кафедри «Технологічних процесів та обладнання переробних і харчових виробництв» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: [ipserhiy@gmail.com](mailto:ipserhiy@gmail.com)).

**Veselovska Nataliia Rostyslavivna** – Doctor of Engineering, Professor, Head of the Department of Machines and Equipment of Agricultural Production of Vinnitsa National Agrarian University (3 Soniachna St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: [wnatalia@ukr.net](mailto:wnatalia@ukr.net)).

**Shargorodskiy Serhiy Anatoliyovych** - candidate of technical sciences, associate professor of the Department of "Machines and Equipment for Agricultural Production" of the Vinnytsia National Agrarian University (Sonyachna St., 3, Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: [serganatsharg@gmail.com](mailto:serganatsharg@gmail.com)).

**Burlaka Serhii Andriyovych** - Doctor of Philosophy, senior lecturer of the Department of "Technological Processes and Equipment of Processing and Food Production" of the Vinnytsia National Agrarian University (Sonyachna St., 3, Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: [ipserhiy@gmail.com](mailto:ipserhiy@gmail.com)).