



**Ольшанський В. П.**  
д.ф.-м.н., професор

**Сліпченко М. В.**  
к.т.н., доцент

*Харківський національний  
технічний університет  
сільського господарства  
імені Петра Василенка*

**Твердохліб І. В.**  
к.т.н., доцент

**Купчук І. М.**  
к.т.н., доцент

*Вінницький національний  
аграрний університет*

**Olshanskiy V.**  
Doctor of Technical Sciences,  
Professor

**Slipchenko M.**  
PhD, associate professor

*Petro Vasilenko Kharkiv  
National Technical  
University of Agriculture*

**Tverdokhlib I.**  
PhD, associate professor

**Kupchuk I.**  
PhD, associate professor

*Vinnitsia National Agrarian  
University*

**УДК 534.1:539.3**

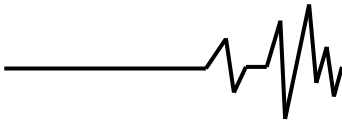
**DOI: 10.37128/2306-8744-2021-2-4**

## **КОЛИВАННЯ ІМПУЛЬСНО НАВАНТАЖЕНОГО ОСЦИЛЯТОРА З КВАДРАТИЧНИМ ОПОРОМ У СКЛАДІ ДИСИПАТИВНОЇ СИЛИ**

Описано нестационарні коливання дисипативного осцилятора, спричинені миттєвим імпульсом сили. Розглянуто варіант, коли дисипативна сила є сумою сил квадратичного в'язкого опору та сухого тертя, а також узагальнено теоретичні результати на випадок суми трьох сил. Третьою є сила позиційного тертя. Побудовано формули для обчислення розмахів коливань. При цьому задіяна функція Ламберта від'ємного та додатного аргументів. Вона відноситься до затабульованих спеціальних функцій. Її значення можна також обчислювати, використовуючи відомі її апроксимації в елементарних функціях. Показано, що внаслідок дії дисипативної сили процес післяімпульсних коливань складається з обмеженої кількості циклів і обмежений у часі. Це зумовлено наявністю серед складових опору сили сухого тертя. Наведено приклади розрахунків, які ілюструють можливості викладеної теорії. З метою перевірки вірогідності виведених розрахункових формул проводилось також чисельне комп'ютерне інтегрування диференціального рівняння руху. Показана збіжність чисельних результатів, отриманих двома різними методами. Таким чином, підтверджено, що за допомогою аналітичних розв'язків можна визначати екстремальні переміщення осцилятора без чисельного розв'язування його нелінійного диференціального рівняння руху. Використання функції Ламберта та першого інтегралу рівняння руху дало можливість вивести точні розрахункові формули для визначення розмахів коливань, спричинених імпульсним навантаженням осцилятора. Виведені формули придатні для обчислення значення миттєвого імпульсу, прикладеного до осцилятора, що відноситься до обернених задач механіки. Отже, вимірявши максимальне переміщення осцилятора є можливість ідентифікувати стартову швидкість або миттєвий імпульс, прикладений до осцилятора. Проведене чисельне комп'ютерне інтегрування вихідного диференціального рівняння підтвердило адекватність одержаних аналітичних розв'язків, які стосуються не тільки прямої, а й оберненої задач динаміки.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, дисипативна сила, квадратичний в'язкий опір, миттєвий імпульс, функція Ламберта, розмахи післяімпульсних коливань.

**Вступ.** Дослідження нелінійних так і чисельними методами. Для розв'язку коливань з урахуванням дисипативних сил аналітичним методом, в свою чергу, отримують різної природи розв'язують як аналітичними, точні та наближені залежності. Однією й досі



актуальних задач є отримання компактних розв'язків з достатньо великою точністю. Саме отриманню таких залежностей із застосуванням функції Ламберта присвяtimo дане дослідження.

**Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження.** Вільні коливання осцилятора при дії сили чисто квадратичного в'язкого опору розглядає в [1-5], де використовували різні методи розв'язку нелінійної задачі. Так в [1] її розв'язували асимптотичним методом Лінстедта-Ляпунова. В [2] розв'язок побудовано аналітичним методом авторів цієї монографії. Показано, що уже в першому наближенні розв'язок дає відому формулу A de Caligny [6], похибки якої встановлено в [2]. В роботах [3, 4] для проведення дослідження коливань нелінійної системи використано метод гармонічного балансу [7] та функцію Ламберта [8, 9]. В статті [4] для розрахунку розмахів коливань, як коренів трансцендентного рівняння, задіяно функцію Ламберта [7, 8]. Вільні коливання в умовах спільної дії сили квадратичного в'язкого опору в поєднанні з іншими силами тертя розглянуто в [10]. Для проведення дослідження використано наближений метод енергетичного балансу [11]. В статті [12] для розрахунку розмахів вільних коливань в умовах спільної дії сили квадратичного в'язкого опору та сили сухого тертя Кулона задіяна функція Ламберта. На відміну від згаданих публікацій, тут моделюємо коливання лінійно пружного дисипативного осцилятора, спричинені миттєвим силовим імпульсом. Враховуючи дію сили квадратичного в'язкого опору в поєднанні з іншими силами тертя, будемо точні розрахункові формули для обчислення розмахів коливань з використанням функції Ламберта. Формули зручні для практичної реалізації, бо обчислення значень цієї спеціальної функції не викликає труднощів. Її таблиці надруковано в [10, 13]. Крім того в [14] виведено компактні асимптотичні формули, які з похибкою меншою 1 % виражають функцію Ламберта через елементарні функції.

**Метою** статті є одержання та апробація розрахунками формул для обчислення розмахів коливань дисипативного осцилятора, спричинених миттєвим імпульсом сили, за умови що до складу дисипативної сили входить сила квадратичного в'язкого опору.

#### Викладення основного матеріалу.

1. Припустимо, що дисипативна сила є сумою сил в'язкого опору  $F_b = \mu|\dot{x}|\dot{x}$  і сухого тертя  $F_T$ . За такого припущення рівняння коливань осцилятора має вигляд

$$m\ddot{x} + \mu|\dot{x}|\dot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + cx = 0. \quad (1)$$

Тут  $m$  – маса осцилятора;  $\mu$  – коефіцієнт квадратичного в'язкого опору;  $F_T$  – сила сухого тертя;  $c$  – коефіцієнт пружності;  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора, як функція часу  $t$ . Крапка означає похідну по  $t$ .

Початковими умовами до нього приймаємо:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (2)$$

що відповідає дії миттєвого імпульсу сили  $S = mv_0$ .

Уведенням допоміжної функції  $y = \dot{x}^2$  на проміжку часу, де  $\dot{x} \geq 0$ , рівняння (1) зводимо до лінійного першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{m}y + \frac{2cx}{m} + \frac{2F_T}{m} = 0. \quad (3)$$

З точністю до довільної сталої  $b$  воно має загальний розв'язок:

$$y(t) = b \cdot \exp\left(-\frac{2\mu}{m}x\right) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{mc}{2\mu} - F_T - cx\right)$$

Умови (2) виконуються, коли:

$$b = v_0^2 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{mc}{2\mu} - F_T\right). \quad (4)$$

Якщо  $a_1$  максимальне переміщення осцилятора, то  $y(a_1) = 0$ .

Це рівняння, з урахуванням (4), зводиться до виразу:

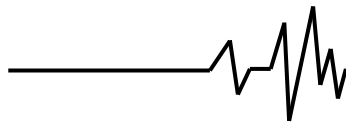
$$b \cdot \exp\left(-\frac{2\mu}{m}a_1\right) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{mc}{2\mu} - F_T - ca_1\right) = 0$$

Після подальших елементарних перетворень цього рівняння одержуємо:

$$f = \lambda \exp(f), \quad (5)$$

де:

$$f = 1 - \frac{2\mu F_T}{mc} - \frac{2\mu}{m}a_1;$$



$$\lambda = \exp\left(\frac{2\mu F_T}{mc} - 1\right) \left(1 - \frac{2\mu F_T}{mc} - \frac{2\mu^2 v_0^2}{mc}\right). \quad (6)$$

Далі будемо розрізняти три випадки.

а) При малих  $\mu v_0$ :

$$1 - \frac{2\mu F_T}{mc} - \frac{2\mu^2 v_0^2}{mc} > 0. \quad (7)$$

Тоді  $\lambda > 0$  і, згідно з (5),  $f > 0$ .

Прологарифмувавши (5) отримуємо:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left(1 - \frac{2\mu F_T}{mc} - f\right) = \frac{m}{2\mu} \left[1 - \frac{2\mu F_T}{mc} + W_1(-\lambda)\right]. \quad (8)$$

б) Другий випадок маємо при

$$1 - \frac{2\mu F_T}{mc} - \frac{2\mu^2 v_0^2}{mc} = 0.$$

Для нього  $\lambda = 0$  і, згідно з (5),  $f = 0$ .

При такому  $v_0^2$ :

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left(1 - \frac{2\mu F_T}{mc}\right). \quad (9)$$

в) В третьому випадку  $\mu v_0$  таке, що:

$$1 - \frac{2\mu F_T}{mc} - \frac{2\mu^2 v_0^2}{mc} < 0.$$

Тоді  $\lambda < 0$  і, згідно з (5),  $f < 0$ .

Введемо значення:  $\varphi = -f$ ;  $\gamma = -\lambda$  і надамо рівнянню (5) вигляд:

$$\varphi = \gamma \cdot \exp(-\varphi).$$

Після його логарифмування, одержуємо:

$$\varphi + \ln \varphi = \ln \gamma.$$

Розв'язок цього рівняння виражається через функцію Ламберта додатного аргументу  $W(z)$ . Тому:

$$f - \ln f = -\ln \lambda.$$

Розв'язок цього рівняння виражається через першу гілку двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу  $W_1(-z)$ . Тоді [8, 9]:

$$f = -W_1(-\lambda)$$

і для обчислення  $a_1$  одержуємо формулу:

$$\varphi = W(\gamma)$$

і для обчислення першого розмаху коливаний одержуємо формулу:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left[1 - \frac{2\mu F_T}{mc} + W(\gamma)\right]. \quad (10)$$

Отже, в залежності від значення  $\mu v_0$ , обчислення  $a_1$ , зводиться до різних формул, а саме: (8), (9), (10).

В ході подальшого руху, коли  $\dot{x} \leq 0$ , замість (3) доводиться розв'язувати рівняння:

$$\frac{d y}{d x} - \frac{2\mu}{m} y + \frac{2c x}{m} - \frac{2F_T}{m} = 0,$$

при початковій умові:

$$y(a_1) = 0.$$

Такий розв'язок має вигляд:

$$y(x) = d \cdot \exp\left(\frac{2\mu}{m} x\right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{mc}{2\mu} + c x + F_T\right), \quad (11)$$

Причому

$$d = \frac{1}{\mu} \left(F_T - \frac{mc}{2\mu} - a_1 c\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\mu}{m} a_1\right). \quad (12)$$



Із (11), (12) випливає, що при  $x = 0$  осцилятор має швидкість:

$$v_1 = -\sqrt{y(0)} = -\left[ d + \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc}{2\mu} - F_T \right) \right]^{1/2}$$

Знайшовши  $v_1$ , можна далі обчисливши розмах  $a_2$ , використовуючи одну (потрібну) із

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{2\mu F_T}{mc} + W_1[-\exp(-\xi_n)] \right\} \right|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

в якому:

$$\xi_n = 1 - \frac{2\mu F_T}{mc} + \ln \frac{mc}{2\mu^2 |b_n|};$$

$$b_n = \frac{1}{\mu} \left( F_T - \frac{mc}{2\mu} - |a_n|c \right) \exp\left(-\frac{2\mu}{m} |a_n|\right). \quad (14)$$

Оскільки визначення розмахів коливань пов'язане з обчисленням функції Ламберта, коротко зупинимось на цьому питанні. Вище було відзначено, що таблиці названої функції надруковано в [10, 13]. При наявності таблиць значення вказаної спеціальної функції можна знаходити інтерполяцією табличних даних. Додатково до них наводимо також апроксимаційні формули [14].

На проміжку  $z \in \left[ 0; \frac{1}{e} \right]$

$$W(z) \approx z - z^2 + \frac{3}{2} z^3 - \frac{8z^4}{3 \left( 1 + \frac{125}{64} z \right)}.$$

При  $z \in [0, 0,25]$ :

$$W_1(-z) \approx -z - z^2 - \frac{3}{2} z^3 - \frac{8z^4}{3 \left( 1 - \frac{125}{64} z \right)}. \quad (15)$$

Якщо  $z \in \left[ 0,25; \frac{1}{e} \right]$ , то:

формул (8), (9), (10). Для цього в них треба замінити  $v_0$  на  $v_1$  і  $a_1$  на  $a_2$ .

У випадку малих  $\mu v_0$ , коли виконується нерівність (7), обчислення розмахів коливань  $a_n$  зводиться до рекурентного співвідношення:

$$W_1(-z) \approx 2 \left( \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} - 1 \right). \quad (16)$$

Тут  $p = 2e\xi - 3$ ;  $q = 2 - 8e\xi$ ;

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}} \right), \quad \xi = \frac{1}{e} - z.$$

В [8, 14] є також апроксимаційні формули функції Ламберта великих аргументів. Але вони тут не потрібні для визначення розмахів.

Інформація про функцію Ламберта надано також в [15, 16], де використовували її у розв'язках задач механічного удару твердих тіл.

**Розглянемо приклад.** Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 2$  кг;  $c = 5000$  Н/м;  $\mu = 20$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $F_T = 6$  Н;  $v_0 = 2$  м/с.

За формулою (6) одержуємо  $\lambda = 0,24719$ .

Подальший розрахунок, з використанням (8) і (15) дає:  $W_1(-0,24719) \approx -0,3502$ ;

$a_1 \approx 0,03129$  м. Підставивши це  $a_1$  в (14),

отримуємо:  $b_1 \approx -10,708702$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;

$\xi_1 \approx 1,130672$ ;  $\exp(-\xi_1) \approx 0,32282$ . За формулою (16) заходимо

$W_1(-0,32282) \approx -0,5714$ . Тоді, згідно з

(13)  $|a_2| \approx 0,02023$  м. Використовуючи (13) і

(14) одержуємо й інші значення  $|a_{n+1}|$ , записані в табл. 1.



Таблиця 1.

Розмахи коливань при  $v_0 = 2$  м/с

$n$	1	2	3	4
$10 a_n , \text{ м}$	3,129	2,023	1,398	0,969

Більш повна інформація про переміщення осцилятора подана на рис. 1, який одержано чисельним інтегруванням рівняння (1), Як бачимо, рух осцилятора обмежений у часі, а розмахи в табл. 1 так як на графіку, що на рис. 1.

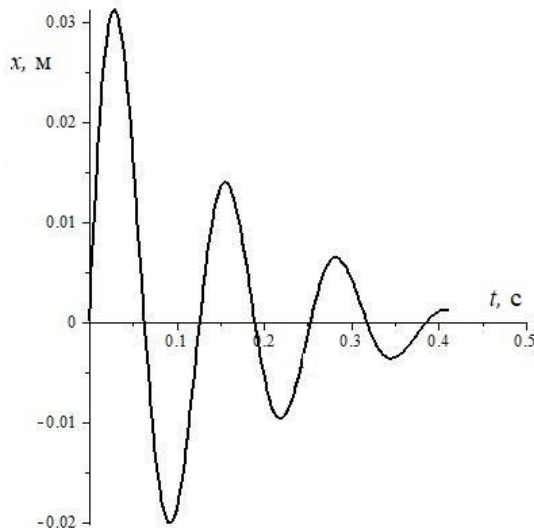


Рис. 1. Переміщення осцилятора при  $v_0 = 2$  м/с

2. Припустимо, що дисипативна сила є сумою трьох доданків, а саме сил квадратичного в'язкого опору та сил сухого і позиційного тертя. Позиційне тертя, як і в [17, 18], характеризуємо константою  $\Delta c$  і при зростанні  $|x(t)|$  маємо жорсткість пружини  $c_1 = c + \Delta c$ , а при зменшенні  $|x(t)|$  – жорсткість  $c_2 = c - \Delta c$ , де  $\Delta c < c$ . у випадку спільної дії трьох сил опору, узагальнивши попередні результати, отримуємо наступні формули обчислення першого розмаху:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left[ 1 - \frac{2\mu F_T}{mc_1} + W_1(-\lambda_1) \right],$$

при  $\lambda_1 > 0$ ;

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left( 1 - \frac{2\mu F_T}{c_1} \right), \text{ при } \lambda_1 = 0; \quad (17)$$

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left[ 1 - \frac{2\mu F_T}{mc_1} + W(-\lambda_1) \right], \text{ при } \lambda_1 < 0.$$

Тут

$$\lambda_1 = \exp\left(\frac{2\mu F_T}{mc_1} - 1\right) \left( 1 - \frac{2\mu F_T}{mc_1} - \frac{2\mu^2 v_0^2}{mc_1} \right). \quad (18)$$

Швидкість  $v_1$ , з якою після першої зупинки осцилятор повертається у вихідне положення  $x = 0$ , становить:

$$v_1 = - \left[ d_2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{mc_2}{2\mu} - F_T \right) \right]^{1/2}.$$

Тут

$$d_2 = \frac{1}{\mu} \left( F_T - \frac{mc_2}{2\mu} - a_1 c_2 \right) \cdot \exp\left(-\frac{2\mu}{m} a_1\right). \quad (19)$$

Замінивши в (17), (18)  $a_1$  на  $a_2$  і  $v_0$  на  $v_1$  можна обчислити другий розмах коливань, а потім і інші розмахи.

Якщо відоме  $a_1$ , то при  $\lambda_1 > 0$ , розрахунок розмахів  $|a_{n+1}|$ , зводиться до рекурентного співвідношення:

$$|a_{n+1}| = \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{2\mu F_T}{mc_1} + W_1[-\exp(-\xi_n)] \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$



в якому:

$$\xi_n = 1 - \frac{2\mu F_T}{mc_1} + \ln \frac{mc_1}{2\mu^2 |b_n|};$$

$$b_n = \frac{1}{\mu} \left( F_T - \frac{mc_2}{2\mu} - |a_n|c_2 \right) \exp\left(-\frac{2\mu}{m}|a_n|\right) + \frac{m}{2\mu^2}(c_2 - c_1). \quad (20)$$

Коли  $\Delta c = 0$ ,  $c_1 = c_2 = c$  і вирази (17), (18), (19), (20) переходять в записані вище формули, в яких не враховано позиційне тертя.

В якості прикладу проведемо розрахунок розмахів коливань при:  $m = 2$  кг;  $c = 5000$  Н/м;  $\Delta c = 400$  Н/м;  $\mu = 20$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $F_T = 6$  Н;  $v_0 = 1,5$  м/с. Для таких вхідних даних:  $c_1 = 5000$  Н/м;  $c_2 = 4600$  Н/м. За формулою (18) одержуємо:  $\lambda_1 = 0,3051$ . Тоді, згідно з (16),

$W_1(-0,3051) \approx -0,5053$  і за формулою (17),  $a_1 \approx 0,02362$  м. Провівши розрахунок за формулами (19), (20), отримуємо:  $b_1 \approx -12,37043$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $\xi_1 \approx 1,065159$ ;  $\exp(-\xi_1) \approx 0,34467$ ;  $W_1(-0,34467) \approx 0,6808$ ;  $a_2 \approx 0,01485$  м. Аналогічним чином знаходимо й інші  $|a_{n+1}|$ , записані в табл. 2.

Таблиця 2.

Розмахи коливань при  $v_0 = 1,5$  м/с

$n$	1	2	3	4
$100 a_n $ , м	2,362	1,485	0,951	0,572

Для порівняння, в табл. 3 наведено більш точні значення  $|a_n|$  і час їх досягнення

$t_n$ , одержані чисельним інтегруванням рівняння коливань.

Таблиця 3.

Результати чисельного інтегрування рівняння коливань

$n$	1	2	3	4
$100 a_n $ , м	2,358	1,482	0,948	0,569
$10t_n$ , с	0,2796	0,9174	1,5533	2,1898

Деякі розбіжності значень  $|a_n|$  в табл. 2 і табл. 3 спричинені використанням апроксимацій (15) і (16).

Графічно процес руху осцилятора відображено на рис. 2 де маємо лише п'ять розмахів коливань.

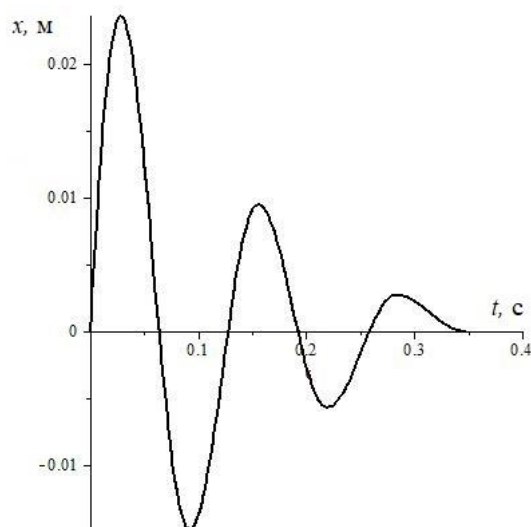


Рис. 2. Переміщення осцилятора при  $v_0 = 1,5$  м/с



Таким чином, і при наявності позиційного тертя розрахунок розмахів коливань можна провести за допомогою введених вище формул, не розв'язуючи чисельним методом нелінійне диференціальне рівняння руху.

**Використання одержаних формул до розв'язування оберненої задачі.** Розв'язування обернених задач динаміки по визначенню нестационарних навантажень на елементи конструкцій набуло поширення в механіці [15-24]. Але розроблені там способи розрахунку стосуються лінійних задач. У випадку нелінійних коливальних систем доводиться використовувати інші методи. Покажемо, що введені вище формули придатні для обчислення значення миттєвого імпульсу, прикладеного до осцилятора, що

відноситься до обернених задач механіки. Із виразів (17) випливає, що:

$$\frac{2\mu}{m} \left( a_1 + \frac{F_T}{c_1} \right) - 1 = \begin{cases} W_1(-\lambda_1) \\ W(-\lambda_1) \end{cases}$$

при  $W_1(-\lambda_1) < 0, (\lambda_1 > 0)$   
 $W(-\lambda_1) > 0, (\lambda_1 < 0).$  (21)

Тоді, після обчислення значення функції Ламберта, інтерполяцією табличних даних в [10, 13] можна знайти її аргумент  $\lambda_1$ , а потім знайти і початкову швидкість  $v_0$ , бо згідно з (18):

$$v_0 = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \left[ mc_1 - 2\mu F_T - mc_1 \lambda_1 \cdot \exp \left( 1 - \frac{2\mu F_T}{mc_1} \right) \right]^{1/2} \quad (22)$$

Отже, вимірявши максимальне переміщення осцилятора  $a_1$  є можливість ідентифікувати стартову швидкість або миттєвий імпульс, прикладений до осцилятора.

Користуючись формулами (21), (22), обчислимо  $v_0$  при  $m = 2$  кг;  $c_1 = 5400$  Н/м;  $\mu = 20$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $F_T = 6$  Н.

Для  $a_1 = 0,03$  м  $v_0 \approx 1,976$  м/с.

Для  $a_1 = 0,06$  м;  $W_1(-\lambda_1) = 0,2222$ ;  
 $\lambda_1 \approx -0,278$ ;  $v_0 \approx 4,814$  м/с.

Тут, проводячи ідентифікацію, задіяли таблиці функції Ламберта, надруковані в [10].

**Висновки.** Використання функції Ламберта та першого інтегралу рівняння руху дало можливість вивести точні розрахункові формули для визначення розмахів коливань, спричинених імпульсним навантаженням осцилятора. Показано, що внаслідок дії сили опору, у складі якої є сухе тертя, процес післяімпульсних коливань має скінченну кількість циклів і обмежений у часі. Проведене чисельне комп'ютерне інтегрування вихідного диференціального рівняння підтвердило адекватність одержаних аналітичних розв'язків, які стосуються не тільки прямої, а й оберненої задач динаміки.

#### Список використаних джерел

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. 2. Москва : Дрофа, 2006. 720 с.

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва : Наука, 1974. 504 с.

3. Cveticanin L. Oscillator with strong quadratic damping force. *Publications of the Mathematical Institute*. 2009. Vol. 85. Issue 99. P. 119-130. Cveticanin, L. (2009). Oscillator with strong quadratic damping force. *Publications of the Mathematical Institute*. 85, 99, 119-130. doi:10.2298/PIM0999119C

4. Cveticanin L. Strong nonlinear oscillators. *Analytical Solution*, 2 nd edition. Springer : Cham, 2018. 317 p. doi:10.1007/978-3-319-58826-1.

5. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника. *Вісник НТУ «ХПІ» Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2014. № 18 (1061). С. 116-119.

6. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под редакцией И. И. Блехмана. Москва : Машиностроение, 1979. 351 с.

7. Василенко М. В., Алексейчук О. В. Теория колебаний и устойчивости руху. Київ : Вища школа, 2004. 525 с.

8. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G et al. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math*. 1996. Vol. 5. Issue 1. P.329-359. doi: 10.1007/BF02124750

9. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2007. Vol. 72. P.785-800. doi: 10.1093/imamat/hxm039



10. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. Харків : Міськдрук, 2020. 268 с.

11. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. Москва : Наука, 1980. 270 с.

12. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Замрій М. А. Вільні коливання осцилятора за наявності квадратичного в'язкого опору та сухого тертя. Вібрації в техніці та технологіях. 2020. № 2(97). С. 33-40.

13. Ольшанський В. П. Ольшанський С. В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. Харьков : Савчук А. О., 2013. 204 с.

14. Ольшанський В. П. Про апроксимацію функції Ламберта. Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2020. № 1 (1355). С. 64-68.

15. Дягель Р. В., Лапшин В. В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли. Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 164-173.

16. Боровин Г. К., Лапшин В. В., Обобщенная модель удара Герца-Ханта-Кроссли. Весник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия : Естественные науки. 2018. № 6. С. 18-30. doi: 10.18698/1812-3368-2018-6-18-30

17. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. Москва : Высшая школа, 1980. 408 с.

18. Сурьянинов Н. Г., Дашенко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин. Одесса : ОГПУ, 2000. 306 с.

19. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Харьков: ХНАДУ, 2004. 392 с.

20. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Часть 2. Харьков: ХНАДУ, 2010. 212 с.

21. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. Харьков : «Лідер», 2018. 214 с.

22. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibration of a plate by means of addition loads. Int. Jour. of Solid and Struct. 2004. Vol. 41. P. 4919-4926. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.04.022

23. Ramm A. G. Inverse problems : Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Springer, 2005. 462 p. doi: 10.1007/b100958

24. Gang Yan, Li Zhou. Impact load identification of composite structure using genetic algorithms. Journal of Sound and Vibration. 2009. Vol. 319. № 3-5. P. 869-884. doi: 10.1016/j.jsv.2008.06.051

#### Список джерел у транслітерації

1. Loytsyanskiy, L. G., & Lurye, A. I. (2006). *Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course of Theoretical Mechanics]*. (Т. 2). Moskva : Drofa. [In Russian].

2. Bogolyubov, N .N., & Mitropol'skiy Yu. A. (1974). *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]*. Moskva : Nauka. [In Russian].

3. Cveticanin, L. (2009). Oscillator with strong quadratic damping force. *Publications of the Mathematical Institute*. 85, 99, 119-130. doi:10.2298/PIM0999119C

4. Cveticanin L. (2018). Strong nonlinear oscillators. *Analytical Solution*, 2 nd edition. Springer : Cham. doi:10.1007/978-3-319-58826-1.

5. Olshanskiy, V. P., & Olshanskiy, S. V. (2014). Funktsiya Lambert v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk NTU «KhPI» Seriya: Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]*. 18 (1061), 116-119. [In Russian].

6. Blekhman, I. I. (Ed.) (1979). *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh. T. 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem [Vibrations in technology. Reference book in six volumes. T. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems]*. Moskva : Mashinostroyeniye. [In Russian].

7. Vasylenko, M. V., & Alekseychuk, O. V. (2004). *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion]*. Kyiv : Vyscha shkola. [In Ukrainian].

8. Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G, et al. (1996). On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.* 5, 1, 329-359. doi: 10.1007/BF02124750

9. Fariel, Shafee. (2007). Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 72, 785-800. doi:10.1093/imamat/hxm039

9. Olshanskiy, V. P., Slipchenko, M. V., Spolnik, O. I., & Burlaka, V. V. (2020). *Nelinijni kolyvannya dysypatyvnyh oscylyatoriv [Nonlinear oscillations of dissipative oscillators]*. Kharkiv : Miskdruk. [In Ukrainian].

11. Panovko, Ya. G. (1980). *Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to*





the theory of mechanical vibrations]. Moskva : Nauka. [In Russian].

12. Olshanskiy, V. P., Slipchenko, M. V., Spolnik, O. I., & Zamriy, M. A. Vil'ni kolyvannya ostsyl'yatora za nayavnosti kvadratychnoho v'yazkoho oporu ta sukhooho tertya [Free oscillations of the oscillator in the presence of quadratic viscous resistance and dry friction]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Vibrations in engineering and technology]*. 2(97), 33-40. [In Ukrainian].

13. Olshanskiy, V. P., & Olshanskiy, S. V. (2013) *Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki materialnoy tochki [Lambert function in material point ballistics problems]*. Kharkov : Savchuk A. O. Publ. [In Russian].

14. Olshanskiy, V. P. (2020). Pro aproksymatsiyu funktsiyi Lamberta [On the approximation of Lambert's function]. *Visnyk NTU «KHPi». Seriya: Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]*. 1 (1355), 64-68. [In Ukrainian].

15. Dyagel', R. V., & Lapshin, V. V. (2011). O nelineynoy v'yazkouprugoy modeli kollinearnogo udara Khanta-Krossli [On the nonlinear viscoelastic model of the Hunt-Crossley collinear impact]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Bulletin of the RAS. Rigid body mechanics]*. 5, 164-173. [In Russian].

16. Borovin, G. K., & Lapshin, V. V. (2018). Obobshchennaya model udara Gertsakhanta-Krossli [Generalized Hertz-Hunt-Crossley Impact Model]. *Vesnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Yestestvennyye nauki [Bulletin of MSTU. N.E. Bauman. Series: Natural Sciences]*. 6, 18-30. doi: 10.18698/1812-3368-2018-6-18-30 [In Russian].

17. Biderman, V. L. (1980). *Teoriya mekhanicheskikh kolebanij [Theory of mechanical oscillations]*. Moskva : Vysshaya shkola. [In Russian].

18. Suryaninov, N. G., Dashhenko, A. F., & Belous, P. A. (2000). *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin [Theoretical foundations of machine dynamics]*. Odessa : OGPU. [In Russian].

19. Yanyutin, Ye. G., Yanchevskiy, I. V., Voropay, A. V., & Sharapata, A. S. (2004). *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsiy [Problems of impulse deformation of structural elements]*. Kharkov: KhNADU. [In Russian].

20. Yanyutin, Ye. G., Voropay, A. V., Povalyayev, S. I., & Yanchevskiy, I. V. (2010). *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Chast 2 [Identification of loads during impulse deformation of bodies. Part 2]*. Kharkov: KhNADU. [In Russian].

21. Voropay, A. V. (2018). *Integral'nyye uravneniya Volterra v nekorrektnykh zadachakh*

*nestatsionarnogo deformirovaniya plastin [Volterra integral equations in ill-posed problems of unsteady deformation of plates]*. Kharkov: Lider. [In Russian].

22. Yanyutin, E. G., & Voropay, A. V. (2004). Controlling nonstationary vibration of a plate by means of addition loads. *Int. Jour. of Solid and Struct.* 41, 4919-4926. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.04.022

23. Ramm, A. G. (2005). *Inverse problems : Mathematical and analytical techniques with applications to engineering*. Springer. doi: 10.1007/b100958

24. Gang, Yan, & Li, Zhou. (2009). Impact load identification of composite structure using genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration.* 319, 3-5, 869-884. doi: 10.1016/j.jsv.2008.06.051

#### КОЛЕБАНИЯ ИМПУЛЬСНО НАГРУЖЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ В СОСТАВЕ ДИССИПАТИВНОЙ СИЛЫ

Описано нестационарные колебания диссипативного осциллятора, вызванные мгновенным импульсом силы. Рассмотрено случай, когда диссипативная сила состоит из квадратичного вязкого сопротивления и сухого трения, а также обобщено теоретические результаты на случай суммы трех сил. Третьей есть сила позиционного трения. Построены формулы для вычисления размахов колебаний. При этом использована функция Ламберта отрицательного и положительного аргументов. Она относится к затабулированным специальным функциям. Ее значение можно также вычислять, используя известные ее аппроксимации в элементарных функциях. Показано, что вследствие действия диссипативной силы процесс послеимпульсных колебаний состоит из конечного числа циклов и ограничен во времени. Это обусловлено наличием среди составляющих сопротивления силы сухого трения. Приведены примеры расчетов, которые иллюстрируют возможности изложенной теории. С целью проверки достоверности выведенных расчетных формул проводилось также численное компьютерное интегрирование дифференциального уравнения движения. Показана сходимость численных результатов, полученных двумя разными методами. Таким образом, подтверждено, что с помощью аналитических решений можно находить экстремальные перемещения осциллятора без численного решения его нелинейного дифференциального уравнения движения.



Использование функции Ламберта и первого интеграла уравнения движения позволило вывести точные расчетные формулы для определения размахов колебаний, вызванных импульсной нагрузкой осциллятора. Выведенные формулы пригодны для вычисления значения мгновенного импульса, приложенного к осциллятору, что относится к обратным задачам механики. Таким образом, измерив максимальное перемещение осциллятора имеется возможность идентифицировать начальную скорость или мгновенный импульс, приложенный к осциллятору. Проведенное численное компьютерное интегрирование выходного дифференциального уравнения подтвердило адекватность полученных аналитических решений, которые касаются не только прямой, но и обратной задач динамики.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, диссипативная сила с квадратичным сопротивлением, мгновенный импульс, функция Ламберта, размахи послеимпульсных колебаний.

#### OSCILLATIONS OF A PULSE LOADED OSCILLATOR WITH A SQUARE RESISTANCE IN THE COMPOSITION OF THE DISSIPATIVE FORCE

The unsteady oscillations of a dissipative oscillator caused by an instantaneous impulse of the force are described. The case is considered when the dissipative force consists of quadratic viscous resistance and dry friction, and the theoretical results are generalized to the case of the sum of three forces. The third is the force of positional friction. Formulas for calculating the ranges of oscillations have been constructed. In this case, the Lambert function of negative and

positive arguments is used. It is a tabulated special function. Its value can also be calculated using its known approximations in elementary functions. It is shown that, due to the action of the dissipative force, the process of post-pulse oscillations consists of a finite number of cycles and is limited in time. This is due to the presence of dry friction among the resistance components. Examples of calculations that illustrate the possibilities of the stated theory are given. In order to check the reliability of the derived calculation formulas, numerical computer integration of the differential equation of motion was also carried out. The convergence of the numerical results obtained by two different methods is shown. Thus, it has been confirmed that with the help of analytical solutions it is possible to find the extreme displacements of the oscillator without numerically solving its nonlinear differential equation of motion. Using Lambert function and the first integral of the equation of motion made it possible to derive precise calculation formulas for determining the range of oscillations caused by the pulsed load of the oscillator. The derived formulas are suitable for calculating the value of the instantaneous impulse applied to the oscillator, which refers to the inverse problems of mechanics. Thus, by measuring the maximum displacement of the oscillator, it is possible to identify the initial velocity or instantaneous impulse applied to the oscillator. The performed numerical computer integration of the output differential equation confirmed the adequacy of the obtained analytical solutions, which concern not only direct, but also inverse problems of dynamics.

Keywords: nonlinear oscillator, dissipative force with quadratic resistance, instantaneous impulse, Lambert function, post-impulse oscillation swing.

#### Відомості про авторів

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; [OlshanskiyVP@gmail.com](mailto:OlshanskiyVP@gmail.com) тел.: (066) 0100955

**Ольшанский Василий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; [OlshanskiyVP@gmail.com](mailto:OlshanskiyVP@gmail.com), тел.: (066) 0100955

**Olshanskiy Vasyl Pavlovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; [OlshanskiyVP@gmail.com](mailto:OlshanskiyVP@gmail.com), тел.: (066) 0100955

**Сліпченко Максим Володимирович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства



ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; [Slipchenko\\_M@ukr.net](mailto:Slipchenko_M@ukr.net), тел.: (066) 7120989

**Слипченко Максим Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; [Slipchenko\\_M@ukr.net](mailto:Slipchenko_M@ukr.net), тел.: (066) 7120989

**Slipchenko Maksym Volodymyrovych** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Associate Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; [Slipchenko\\_M@ukr.net](mailto:Slipchenko_M@ukr.net), тел.: (066) 7120989

**Твердохліб Ігор Вікторович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету: м. Вінниця, вул. Сонячна 3, ВНАУ, 21008, e-mail: [igor\\_tverdokhlib@yahoo.com](mailto:igor_tverdokhlib@yahoo.com).

**Твердохлеб Игорь Викторович** – кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета: г. Винница, ул. Солнечная 3, ВНАУ, 21008, e-mail: [igor\\_tverdokhlib@yahoo.com](mailto:igor_tverdokhlib@yahoo.com).

**Tverdokhlib Igor** – candidate of technical sciences, associate professor of the department of general technical disciplines and occupational safety, Vinnytsia National Agrarian University: Vinnytsia, st. Sonyachna 3, VNAU, 21008, e-mail: [igor\\_tverdokhlib@yahoo.com](mailto:igor_tverdokhlib@yahoo.com).

**Купчук Ігор Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, +380978173992, [kupchuk.igor@i.ua](mailto:kupchuk.igor@i.ua), <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).

**Купчук Игорь Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, +380978173992, [kupchuk.igor@i.ua](mailto:kupchuk.igor@i.ua), <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).

**Kupchuk Ihor** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D in Engineering), Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection, Vinnytsia National Agrarian University (3, Sonychna St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, +380978173992, [kupchuk.igor@i.ua](mailto:kupchuk.igor@i.ua), <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).