

**Сивак Р. І.**

д.т.н., доцент

Гулько І. В.

к.т.н., доцент

Залізник Р. О.

аспірант

**Вінницький національний
аграрний університет****Sivak R.**Doctor of Technical Sciences,
Associate Professor**Hunko I.**

PhD of Eng., Associate Professor

Zalizniak R.

postgraduate student

**Vinnitsia National Agrarian
University****УДК 621.73.011.001.5****DOI: 10.37128/2306-8744-2021-2-10****ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙ ТОКУ ПРИ
ВИЗНАЧЕННІ КІНЕМАТИЧНИХ
ХАРАКТЕРИСТИК В СТАЦІОНАРНИХ
ПРОЦЕСАХ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ
МЕТАЛУ**

Методи теоретичного розв'язку задач в обробці металів тиском розвинуті недостатньо для практичного використання при розробці і впровадженні нових технологій та удосконаленні існуючих. Для задоволення жорстких вимог до точності визначення напружено-деформованого стану необхідно володіти достовірною інформацією про еволюцію розвитку процесу пластичної деформації в кожній точці металу з самого початку деформування. Це дозволить з високою точністю отримувати важливі характеристики технологічної спадковості виробів, яких вони набувають в результаті їх пластичної обробки. Першим і важливим етапом в розрахунках напружено-деформованого стану є отримання кінематичних характеристик пластичної течії металу у вигляді аналітичних залежностей, що дозволять сформулювати закономірності формозмінення в технологічних процесах обробки металів тиском.

В статті розглядається можливість застосування методу функцій току для визначення компонент тензора швидкостей деформацій в усталених стаціонарних процесах пластичного деформування. Припускається, що при осесиметричному пластичному деформуванні металу в каналі з криволінійними границями кінематика процесу аналогічна плоскій течії. При отриманні рівнянь для визначення компонент тензора швидкостей деформацій було використано диференціальне рівняння ліній току з урахуванням умови нестисливості. Для пояснення фізичного змісту функцій току було розглянуто в площині течії дві нескінченно близькі лінії току і отримано вираз для витрати через кінцеву в поперечних розмірах трубку току. З умови відсутності на границях радіальних складових швидкості отримано обмеження, які накладаються на похідні від функцій току на цих границях. Розроблена методика розрахунку кінематичних характеристик пластичного деформування для усталених осесиметричних стаціонарних процесів дозволить спростити математичну обробку отриманих результатів і підвищити достовірність визначення напружено-деформованого стану

Ключові слова: лінії току, умова нестисливості, тензор швидкостей деформацій, плоска течія, напружено-деформований стан, витрата

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язок прикладних задач в області обробки металів тиском тісно пов'язаний з розробкою повноцінної теорії, що дозволяє описати комплекс процесів, які відбуваються в осередку деформування.

Одним із таких важливих питань в обробці тиском є кінематика пластичної течії. Метою проведення таких теоретичних досліджень є отримання аналітичних залежностей, які не тільки описують течію металу в осередку деформації, але і разом з тим мають бути



корисними і придатними для визначення напружено-деформованого стану. Крім того, подібні дослідження кінематики течії дають можливість вийти на таку важливу характеристику течії металу як інтенсивність деформацій, що дозволяє сформувати закономірності процесів розвитку формоутворення при пластичному деформуванні металів.

Розрахунок осередку деформації вимагає використання умови суцільності металу, а основною задачею кінематики течії в цьому випадку є визначення поля швидкостей часток [1]. Для визначення поля швидкостей пропонується метод, на підставі якого отримано систему рівнянь, що описує течію металу при обтіканні клиновидного тіла і побудовано сімейство ліній току, які підтверджують адекватність математичної моделі [2]. При отриманні шуканих рівнянь, що описують поля швидкостей течії металу, можливе використання традиційних методів координатних сіток, накладання потоків або конформних перетворень [3]. Застосування кожного із вказаних методів не позбавлено недоліків і вимагає введення припущень, іноді таких, що кардинально викривляють фізику процесу. Наприклад, метод координатних сіток передбачає визначення функцій току шляхом апроксимації ліній руху часток металу, отриманих на основі експериментальних даних. У зв'язку з цим він достатньо незручний і не може претендувати на універсальність. Метод накладання потоків теж не задовольняє вимогам оскільки не є простим і зручним по причині громіздкості. Крім того метод накладання як і метод конформних перетворень, базується на математичному апараті теорії функцій комплексної змінної, придатний для визначення поля швидкостей потенційних течій. Цього достатньо для розв'язку аеродинамічних задач, але його не коректно використовувати у випадку обтікання металом криволінійних границь [4]. У зв'язку з цим виникає необхідність розробки методу отримання полів швидкостей течії металу, який в повній мірі відображає фізику процесу і при цьому достатньо простий і прийнятний для інженерних розрахунків різних методів обробки металів тиском.

Формулювання мети досліджень.

Метою досліджень є створення методу визначення компонент тензора швидкостей деформацій на основі методу функцій току.

Викладення основного матеріалу дослідження. Для визначення поля швидкостей у стаціонарних процесах пластичної течії метала одним із найбільш ефективних є метод функцій току. Диференціальні рівняння ліній току мають вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (1)$$

де v_x, v_y, v_z – проекції швидкості точки вздовж лінії току (рис. 1),

dx, dy, dz – проекції елементу дуги ds на осі координат.

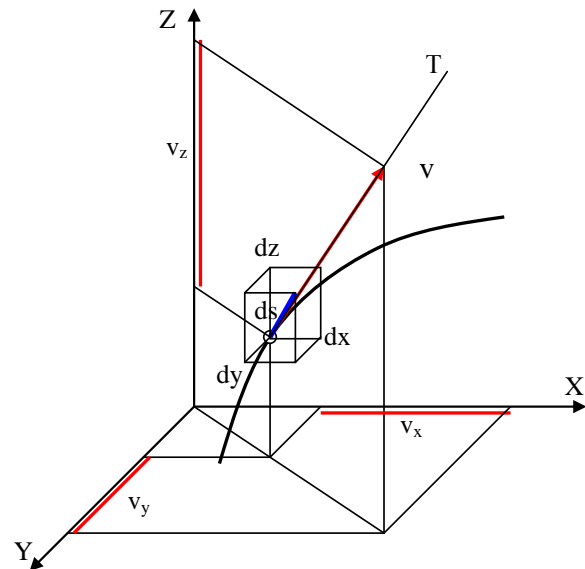


Рис. 1. Лінія току, що проходить в даний момент часу через певну точку

Для плоскої течії рівняння нерозривності при дотриманні умови нестисливості буде мати вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Розглянемо диференціальне рівняння ліній току для плоскої течії

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (3)$$

Або

$$-v_y dx + v_x dy = 0 \quad (4)$$

Завжди можна найти функцію $f(x,y)$, яка буде задовольняти рівнянню (4), повний диференціал якої

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (5)$$



Співставляючи співвідношення (4) і (5) маємо

$$v_x = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial f}{\partial x}. \quad (6)$$

Із (5)

$$df=0. \quad (7)$$

Після інтегрування даного співвідношення знаходимо

$$f=C=\text{const}. \quad (8)$$

Тобто у всіх точках даної лінії току, функція току зберігає стає значення і рівняння (8) є рівнянням лінії току в кінцевому вигляді. Кожній лінії току відповідає своя стала С (рис. 2).

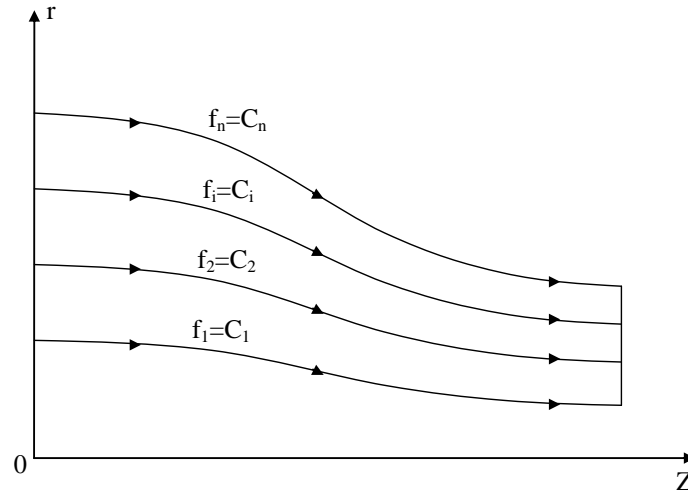


Рис. 2. Схема розподілу ліній току при пластичній течії металу

Розглянемо різницю функцій току на двох лініях току. Ширину течії візьмемо в напрямку перпендикулярному площині руху (рис. 3). Елементарну витрату через одиницю ширини течії між двома нескінченно близькими лініями току можна визначити наступним чином

$$dQ = v_x dy - v_y dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad (9)$$

або

$$dQ = df. \quad (10)$$

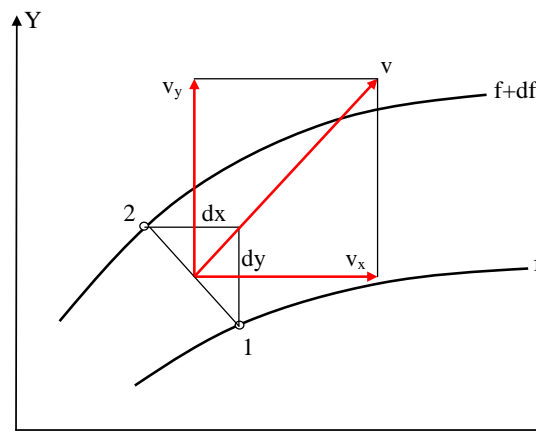


Рис. 3. Схема до визначення витрати між двома лініями току

Після інтегрування співвідношення (10) знаходимо

$$Q = \int_1^2 df = f_2 - f_1. \quad (11)$$



Таким чином фізичний зміст функцій току в тому, що їх різниця на одиниці ширини течії дорівнює витраті між двома відповідними лініями току.

Згідно рівнянь (6-8) довільну лінію току можна розглядати як нульову, вважаючи, що вздовж неї $\psi(x,y)=0$. При осесиметричній пластичній деформації металу в каналі з криволінійними границями кінематика процесу аналогічна плоскій течії. Нанесемо на меридіональну поверхню заготовки сімейство ліній току $j=1\dots m$ та допоміжних ліній $i=1\dots n$, перпендикулярних осі симетрії. В кожній точці даної лінії току функція току дорівнює її значенню в точці перетину цієї лінії току з

допоміжною лінією, якою будемо вважати границю Γ_1 (рис. 4) тобто

$$\left. \begin{aligned} f_{11} = f_{11} \quad f_{11} = f_{21} \quad f_{11} = f_{i1} \quad \dots \quad f_{11} = f_{n1} \\ f_{12} = f_{12} \quad f_{12} = f_{22} \quad f_{12} = f_{i2} \quad \dots \quad f_{12} = f_{n2} \\ \dots \\ f_{1m} = f_{1m} \quad f_{1m} = f_{2m} \quad f_{1m} = f_{im} \quad \dots \quad f_{1m} = f_{nm} \end{aligned} \right\} (12)$$

або

$$f_{1j} = f_{ij}. \quad (13)$$

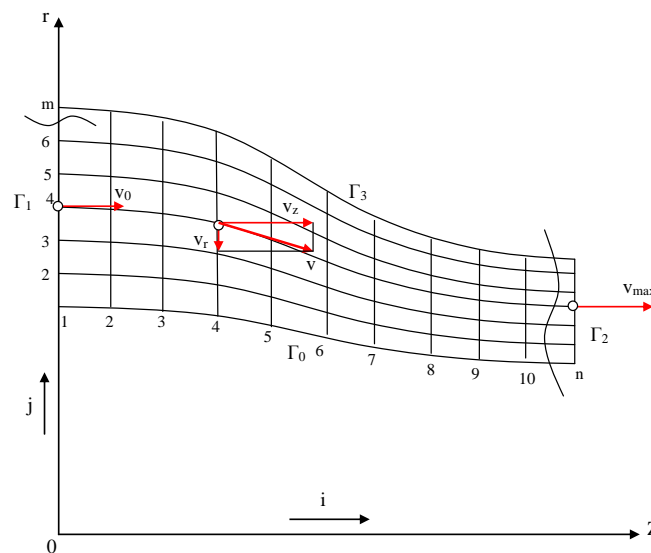


Рис. 4. Схема осесиметричної течії при прямому видавлюванні трубчастої товстостінної заготовки, де $i=1\dots n$ – кількість допоміжних ліній, $j=1\dots m$ – кількість ліній току, Γ_0 і Γ_3 – відповідно нижня і верхня границі трубки току, v_0 – швидкості часток матеріалу на вході в канал матриці, v_{max} – швидкості часток матеріалу на виході з каналу матриці

Уздовж границі Γ_1 функція току дорівнює витраті

$$f_{1j} = v_0 A_{1j}, \quad (14)$$

Або

$$f_{1j} = v_0 \pi (R_{1j}^2 - R_{11}^2), \quad (15)$$

де v_0 – швидкість недеформованого металу на вході в канал матриці,

$A_{1j} = \pi (R_{1j}^2 - R_{11}^2)$ – площа поперечного перетину трубки току на вході в канал матриці,

R_{11} , R_{1j} – зовнішній і внутрішній радіуси трубки току на перетині 1-ої допоміжної лінії і j -ої лінії току на вході в канал.

Розділимо обидві частини рівняння (15)

на $R_{1m}^2 - R_{11}^2$, тобто на загальну площу поперечного перетину трубки току на вході в матрицю, і отримаємо

$$\frac{f_{1j}}{R_{1m}^2 - R_{11}^2} = v_0 \pi \frac{R_{1j}^2 - R_{11}^2}{R_{1m}^2 - R_{11}^2}, \quad (16)$$

Або

$$f_{1j} = v_0 \pi (R_{1m}^2 - R_{11}^2) \frac{R_{1j}^2 - R_{11}^2}{R_{1m}^2 - R_{11}^2}, \quad (17)$$

де $v_0 \pi (R_{1m}^2 - R_{11}^2)$ – загальна витрата через поперечний перетин трубки току на вході в матрицю.



Прийmemo, що

$$v_0 \pi (R_{1m}^2 - R_{11}^2) = 1, \quad (18)$$

тоді на границях Γ_3 і Γ_0

$$f_{1j}(\Gamma_0) = 0, \quad (19)$$

$$f_{1j}(\Gamma_3) = 1. \quad (20)$$

Швидкості течії матеріальних часток згідно [5, 6]

$$v_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (21)$$

$$v_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (22)$$

З умови відсутності на границях Γ_1 і Γ_2 радіальних складових швидкості $v_r(\Gamma_1) = 0$, $v_r(\Gamma_2) = 0$ витікають обмеження, які накладаються на похідні від функцій току на цих границях

$$\frac{\partial f_{1m}}{\partial z} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial f_{nm}}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

Якщо Γ_0 співпадає з віссю симетрії, то радіальна складова швидкості теж буде дорівнювати нулю $v_r(\Gamma_0) = 0$, тому

$$\frac{\partial f_{n1}}{\partial z} = 0, \quad (25)$$

крім того, в цьому випадку виконується умова симетрії функції току й осової швидкості течії

$$\frac{\partial f_{n1}}{\partial r} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^3 f_{nm}}{\partial r^3} = 0. \quad (27)$$

Компоненти тензора швидкостей деформацій обчислюються за формулами

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{v_r}{r}, \quad (28)$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{v_z}{z}, \quad (29)$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (30)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad (31)$$

або згідно (21, 22)

$$\dot{\epsilon}_\varphi = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (32)$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r}, \quad (33)$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} = -\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_z, \quad (34)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right), \quad (35)$$

Інтенсивність швидкостей деформацій

$$\dot{\epsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r)^2 + (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\varphi)^2 + \frac{2}{3} \dot{\gamma}_{rz}^2}. \quad (36)$$

Висновки. Розроблено метод, використання якого дає можливість отримати основні рівняння компонент тензора швидкостей деформацій при пластичній течії металу в каналі з криволінійними границями. Запропонований метод дозволяє спростити математичну обробку результатів досліджень і підвищити достовірність визначення напружено-деформованого стану в усталених стаціонарних процесах пластичного формозмінення.

Список використаних джерел

1. Рекечинський В. І. Застосування методу функцій току в стаціонарних процесах пластичного деформування. *Вібрації в техніці і технологіях*. Вінниця. 2020. №2 (97). С. 157-163.
2. Курин М. А. Исследование методом гипербол обтекания клина при свободном резании. *Металлофизика. Новейшие технологии. Физика прочности и пластичности*. Харьков. 2018. №7, т. 40. С. 859-876.
3. Огородников В. А., Деревенько И. А., Алиева Л. И. Ресурс пластичности металлов при холодном объёмном формоизменении: монография. Винница: ВНТУ, 2016. - 176 с.
4. Beygelzimer Y., Reshetov A., Synkov S., Prokofeva O., Kulagin R. [Kinematics of metal flow during twist extrusion investigated with a new experimental method](#). *Journal of materials processing technology*. 2009. Vol. 209, issue 7. P. 3650-3656.



5. Ogorodnikov V. A., Derevenko I. A., Sivak R. I. On the Influence of Curvature of the Trajectories of Deformation of a Volume of the Material by Pressing on Its Plasticity Under the Conditions of Complex Loading. *Materials Science*. Vol. 54, 2018. P. 326-332.

6. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

Список джерел у транслітерації

1. Rekechynskiy V. I. Zastosuvannya metody funktsiy toku v statsionarnykh protsessah plastychnogo deformuvannya. *Vibratsii v tehnitsi i tehnologiyah*. Vinnytsia. 2020. №2 (97). S. 157-163.

2. Kurin M. A. Issledovanie metodom giperbol obtekania klina pri svobodnom rezanii. *Metalofizika. Noveishie tehnologii. Fizika prochnosti i plastichnosti*. Harkov. 2018. №7, т. 40. S. 859-876.

3. Ogorodnikov V. A., Derevenko I. A., Alieva L. I. Resurs plastichnosti metallov pri holodnom obemnom formoizmenenii: monografiya. Vinnytsia: VNTU, 2016. - 176 s.

4. Beygelzimer Y., Reshetov A., Synkov S., Prokofeva O., Kulagin R. [Kinematics of metal flow during twist extrusion investigated with a new experimental method](#). *Journal of materials processing technology*. 2009. Vol. 209, issue 7. P. 3650-3656.

5. Ogorodnikov V. A., Derevenko I. A., Sivak R. I. On the Influence of Curvature of the Trajectories of Deformation of a Volume of the Material by Pressing on Its Plasticity Under the Conditions of Complex Loading. *Materials Science*. Vol. 54, 2018. P. 326-332.

6. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНИЙ ТОКА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛА

Методы теоретического решения задач в обработке металлов давлением развиты недостаточно для практического использования при разработке и внедрении новых технологий и совершенствовании существующих. Для удовлетворения жестких требований к точности определения напряженно-деформированного состояния необходимо обладать достоверной информацией о эволюции развития процесса пластической деформации в каждой точке металла с самого начала деформирования. Это

позволит с высокой точностью получать важные характеристики технологической наследственности изделий, которые они приобретают в результате их пластической обработки. Первым и важным этапом в расчетах напряженно-деформированного состояния является получение кинематических характеристик пластического течения металла в виде аналитических зависимостей, которые позволят сформулировать закономерности формоизменения в технологических процессах обработки металлов давлением.

В статье рассматривается возможность применения метода функций тока для определения компонент тензора скоростей деформаций в установившихся стационарных процессах пластического деформирования. Предполагается, что при осесимметричном пластическом деформировании металла в канале с криволинейными границами кинематика процесса аналогична плоскому течению. При получении уравнений для определения компонент тензора скоростей деформаций были использованы дифференциальное уравнение линий тока с учетом условия несжимаемости. Для объяснения физического смысла функций тока были рассмотрены в плоскости течения две бесконечно близкие линии тока и получено выражение для расхода через конечную в поперечных размерах трубку тока. При отсутствии на границах радиальных составляющих скорости получены ограничения, которые накладываются на производные от функций тока на этих границах. Разработанная методика расчета кинематических характеристик пластического деформирования для установившихся осесимметричных стационарных процессов позволит упростить математическую обработку полученных результатов и повысить достоверность определения напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: линии тока, условие несжимаемости, тензор скоростей деформаций, плоское течение, напряженно-деформированное состояние, расход.

APPLICATION OF CURRENT LINES IN DETERMINING KINEMATIC CHARACTERISTICS IN STATIONARY PROCESSES OF PLASTIC FLOW OF METAL

Methods of theoretical solution of problems in the processing of metals by pressure are insufficiently developed for practical use in the development and implementation of new technologies and improvement of existing ones. To meet the stringent requirements for the accuracy of determining the stress-strain state, it is necessary to have reliable information about the evolution of the development of the plastic deformation process at each point of the metal from



the very beginning of the deformation. This will allow to obtain with high accuracy the important characteristics of the technological heredity of the products that they acquire as a result of their plastic processing. The first and important step in the calculations of the stress-strain state is to obtain the kinematic characteristics of the plastic flow of metal in the form of analytical dependences, which will formulate the patterns of deformation in the technological processes of metal forming.

The article considers the possibility of applying the method of current functions to determine the components of the strain rate tensor in established stationary processes of plastic deformation. It is assumed that in the case of axisymmetric plastic deformation of a metal in a channel with curvilinear boundaries, the kinematics of the process is similar to a plane flow. In obtaining the equations, the differential

equation of current lines taking into account the incompressibility condition was used to determine the components of the strain rate tensor. To explain the physical meaning of the current functions, two infinitely close current lines were considered in the flow plane, and an expression was obtained for the flow through a finite transverse current tube. In the absence of radial velocity components at the boundaries, constraints are obtained that are imposed on derivatives of current functions at these boundaries. The developed method of calculating the kinematic characteristics of plastic deformation for established axisymmetric stationary processes will simplify the mathematical processing of the obtained results and increase the reliability of the determination of the stress-strain state.

Keywords: *current lines, incompressibility condition, strain rate tensor, plane flow, stress-strain state, flow rate.*

Відомості про авторів

Сивак Роман Іванович – доктор технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Гулько Ірина Василівна – кандидат технічних наук, доцент, кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: irynagunko@vsau.vin.ua).

Залізник Роман Олександрович – аспірант кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Сивак Роман Іванович - доктор технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г.. Винница, Украина, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Гулько Ирина Васильевна - кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г.. Винница, 21008, Украина, e-mail: irynagunko@vsau.vin.ua).

Зализник Роман Александрович - аспирант кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г.. Винница, Украина, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Sivak Roman - Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection of Vinnytsia National Agrarian University (3 Sonyachna St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Hunko Iryna - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection of Vinnytsia National Agrarian University (3 Sonyachna St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: irynagunko@vsau.vin.ua).

Zalizniak Roman - graduate student of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection of Vinnytsia National Agrarian University (3 Sonyachna St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)