**Купчук І.М.**

к.т.н., доцент

**Вінницький національний
аграрний університет****Kurchuk I.**Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor**Vinnitsia National Agrarian
University****УДК 631.363.4:66.095.26:532.135**
DOI: 10.37128/2306-8744-2025-3-3**КОМПЛЕКСНЕ ЗАСТОСУВАННЯ
МЕХАНІКО-РЕОЛОГІЧНИХ
МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСУ ПОВЕДІНКИ
КОРМОВИХ МАТЕРІАЛІВ У
ЗМІШУВАЛЬНИХ АПАРАТАХ**

У статті представлено інтегровану механіко-реологічну концепцію опису поведінки багатокomпонентних кормових матеріалів у змішувальних апаратах. Актуальність роботи зумовлена тим, що кормові суміші містять фрикційні, когезійні, волокнисті та пастоподібні компоненти, кожен з яких має специфічні механізми деформування, що впливають на енерговитрати та динаміку гомогенізації. Стандартні моделі, застосовані окремо до кожного типу матеріалу, не дозволяють адекватно описати просторову та часову неоднорідність напружено-деформованих станів у робочому просторі змішувачів.

У роботі систематизовано фізико-механічні властивості кормових матеріалів і виділено чотири характерні реологічні стани: фрикційний, когезійний, в'язкопластичний та волокнистий. Для кожного з них обґрунтовано застосування моделей Мора-Кулона, Дженіке, Гершеля-Балклі та Бінгема-Шведова. Показано, що під дією робочого органа в суміші формуються локальні зони з різними швидкостями зсуву, рівнями консолідації та структурною стійкістю, що визначає мозаїчний характер реологічної відповіді матеріалу.

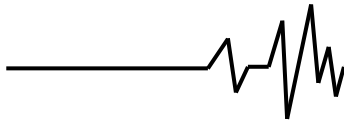
Особливу увагу приділено енергетичним аспектам змішування. Встановлено залежності між напруженням зсуву, швидкістю деформації, питомою потужністю дисипації та інтегральною енергією змішування до досягнення гомогенності. Найвищі втрати енергії виникають у когезійних і в'язкопластичних зонах, де відбувається руйнування структури та інтенсивна дисипація. На основі узагальнених ефективних реологічних параметрів сформовано підхід до кількісного оцінювання енергоефективності процесу.

Запропоновано формалізований алгоритм комплексного застосування механіко-реологічних моделей, який включає ідентифікацію параметрів, кінематичне моделювання, розрахунок локальної дисипації та енергетичної інтеграції. Алгоритм забезпечує прогноз поведінки кормових сумішей і вибір раціональних режимів змішування для змішувальних апаратів.

Ключові слова: реологічні режими, критерії текучості, енергетичні показники змішування, питома потужність дисипації, локальні напруження, кінематичні умови зсуву, алгоритмічне моделювання.

Вступ. Ефективність технологічних процесів змішування кормових матеріалів у сучасних кормоприготувальних системах визначає якість отримуваної кормової суміші, стабільність раціону тварин та

енергоефективність роботи змішувального обладнання. У структурі витрат на виробництво тваринницької продукції процес змішування займає значну частку енергетичних ресурсів, тоді як рівень гомогенності суміші суттєво



впливає на продуктивність тварин та ефективність використання поживних речовин. Тому розуміння механізмів взаємодії частинок кормових матеріалів у зоні дії шнекових та роторних робочих органів є ключовим для підвищення ефективності змішувальної техніки.

Складність опису поведінки кормових матеріалів обумовлена їх різноманітною природою: у практиці кормоприготування одночасно присутні сипкі, гранульовані, когезійно-фрикційні, волокнисті та пастоподібні компоненти, кожен з яких проявляє специфічну реологічну поведінку. Залежно від вологості, гранулометричного складу, ступеня структурованості та природи внутрішніх зв'язків кормові системи можуть переходити від фрикційного пересипання до когезійного злежування, від квазіпластичного деформування до в'язкопластичної течії. Це зумовлює потребу у використанні різних механіко-реологічних моделей для опису напружено-деформованого стану матеріалу під дією зсувних навантажень [1-4].

Традиційні підходи до моделювання процесів змішування ґрунтуються на застосуванні окремих моделей – Мора–Кулона для сипких матеріалів, Дженіке для когезійно-фрикційних систем, Гершеля–Балклі для волокнистих структурованих кормів і Бінгема–Шведова для пастоподібних високовологих середовищ [1-3, 5-7]. Проте кожна з цих моделей описує лише одну локальну ділянку реологічної поведінки. У реальних змішувальних апаратах кормові матеріали одночасно перебувають у різних структурно-механічних станах, а їхній стан змінюється в межах робочого об'єму змішувача.

Відсутність інтегрованої моделі, здатної відтворити повну динаміку переходів від пружної реакції через фрикційний та когезійний стан до в'язкопластичного плину ускладнює створення універсальних математичних моделей змішування та обмежує можливості оптимізації конструктивно-технологічних параметрів машин. Сучасні дослідження у галузі реології гранульованих, волокнистих і пастоподібних матеріалів [1, 3, 5-7] показують, що релевантність математичного опису суттєво підвищується при врахуванні історії навантаження, ступеня консолидації, порогу текучості та нелінійних характеристик зсуву.

У цьому контексті особливого значення набуває формування комплексного підходу до опису поведінки кормових матеріалів, який враховує їх реологічну типологію, механізми деформації та текучості, а також енергетичні процеси, що супроводжують змішування. Такий підхід має стати теоретичною основою для побудови більш точних математичних моделей змішувальних апаратів, оцінювання

енергетичних витрат та оптимізації конструкцій робочих органів.

Метою досліджень є формування інтегрованої механіко-реологічної концепції опису поведінки кормових матеріалів у змішувальних апаратах, що забезпечує підвищення точності математичного моделювання та обґрунтування енергоефективних режимів змішування, шляхом ідентифікації характерних реологічних режимів, обґрунтування застосовних моделей деформування та встановлення їх взаємозв'язку з енергетичними й технологічними параметрами процесу.

Для досягнення мети поставлено такі завдання:

- проаналізувати фізико-механічні характеристики кормових матеріалів та їх реологічну типологію з урахуванням вологості, структури, гранулометричного складу та міжчастинкових взаємодій;

- ідентифікувати характерні режими реологічної поведінки кормових систем у процесі змішування, включно з пружним, фрикційним, когезійним, квазіпластичним і в'язкопластичним станами;

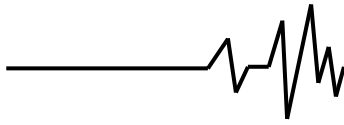
- обґрунтувати застосовність відповідних механіко-реологічних моделей для опису деформування та переміщення кормових матеріалів різного фізичного стану;

- встановити закономірності переходу кормових матеріалів між різними реологічними станами у робочих зонах змішувальних апаратів та ідентифікувати чинники процесу й конструкції, що визначають характер і умови цих переходів;

- визначити взаємозв'язок між реологічними параметрами кормових матеріалів та енергетичними показниками процесу змішування, зокрема між напруженням зсуву, швидкістю деформації та питомою потужністю;

- розробити алгоритм комплексного застосування механіко-реологічних моделей для прогнозування поведінки кормових матеріалів та обґрунтування енергоефективних режимів змішування у змішувальних апаратах різних типів.

Методи досліджень. У дослідженні застосовано системний підхід до аналізу механіко-реологічної поведінки кормових матеріалів, який охоплює класифікаційні, аналітичні, реологічні та енергетичні методи. На першому етапі виконано класифікаційний аналіз фізико-механічних властивостей кормових матеріалів різного фізичного стану, що ґрунтується на узагальненні наявних експериментальних даних, літературних джерел та результатів досліджень науковців [1-7]. У межах аналізу розглянуто основні параметри, що визначають реологічну поведінку кормових матеріалів, зокрема вологість,



гранулометричний склад, об'ємну масу, кут природного нахилу, міцність міжчастинкових зв'язків і показники в'язкопружних та в'язкопластичних властивостей, які визначають характер та інтенсивність деформування у процесі змішування.

Наступний етап включав ідентифікацію характерних режимів механічної поведінки кормових систем під дією зсувних навантажень та обґрунтування вибору відповідних реологічних підходів для їх опису. З цією метою застосовано методи теоретичної реології та механіки деформованого тіла, які дозволяють відтворити пружні, фрикційні, когезійні, квазіпластичні та в'язкопластичні механізми взаємодії частинок у середовищах різної консистенції [1, 3, 5]. Порівняльний аналіз теоретичних залежностей використовувався для визначення діапазонів коректності того чи іншого реологічного підходу залежно від природи матеріалу, ступеня його консолідації та умов навантаження. Такий підхід дозволив сформулювати концептуальний опис того, як різні типи поведінки проявляються у локальних зонах змішувача та як вони змінюються під дією робочого органа.

Енергетичний аналіз процесу змішування виконано на основі математичного опису дисипативних процесів у матеріалах з порогом текучості та нелінійною реологічною поведінкою. Розглянуті залежності між напруженням, швидкістю зсуву та питомою потужністю дисипації дозволили визначити, як параметри реологічних моделей — межа текучості, коефіцієнт консистенції та показник поведінки потоку — впливають на інтенсивність енергетичних втрат під час перемішування. Аналіз показав, що збільшення частки когезійних або в'язкопластичних компонентів у суміші приводить до підвищення питомої потужності дисипації, що пов'язано з переходом матеріалу у режим інтенсивної зсувної течії та руйнуванням структурних зв'язків. Такий підхід забезпечив можливість узагальнити енергетичні характеристики процесу змішування без введення експериментальних даних та встановити загальні тенденції зміни енерговитрат залежно від реологічних властивостей кормових систем.

На завершальному етапі дослідження синтезовано результати класифікаційного, реологічного та енергетичного аналізу у вигляді алгоритму комплексного застосування механіко-реологічних підходів. Алгоритм побудовано з використанням методів системного узагальнення та концептуального моделювання, що забезпечує можливість практичного застосування отриманих залежностей для прогнозування поведінки кормових матеріалів у змішувальних апаратах та оптимізації

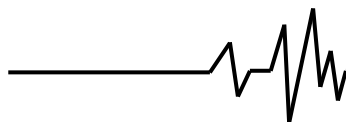
конструктивно-технологічних параметрів змішувачів.

Результати досліджень. Реологічна поведінка кормових матеріалів у процесі змішування визначається їх фізико-механічними властивостями, структурною організацією та умовами прикладеного навантаження. Багатоконпонентність кормових систем зумовлює наявність різних типів частинок — зернистих, волокнистих, пластинчастих та капілярно-зв'язаних, які формують складний дисперсний або структурований каркас матеріалу.

У межах аналізу розглянуто основні параметри, що визначають реологічну поведінку таких матеріалів, включаючи вологість, гранулометричний склад, об'ємну масу, кут природного нахилу, міцність міжчастинкових зв'язків та показники в'язкопружних і в'язкопластичних властивостей, які визначають характер та інтенсивність деформування у процесі змішування [1-4].

Вологість є одним із ключових чинників, які впливають на характер міжчастинкових взаємодій: із зростанням вмісту вільної і зв'язаної води збільшується когезія, зростає поріг текучості, а також змінюється структура шару матеріалу під дією зсувних напружень [1, 3]. Гранулометричний склад визначає характер контакту частинок: дрібнодисперсні матеріали схильні до ущільнення та злежування, тоді як грубодисперсні — до фрикційного пересипання. Кут природного нахилу і параметри внутрішнього тертя характеризують здатність матеріалу до переміщення під дією сили тяжіння та зсувних навантажень і є важливими при визначенні умов переходу від фрикційного до когезійного стану [1, 2]. Для волокнистих матеріалів (силос, сінаж, трав'яні корми) істотною є довжина волокон, ступінь структурованості та механічна жорсткість, що зумовлює їх схильність до утворення пружно-зміцненого каркаса під навантаженням [3].

На основі узагальнення властивостей кормових матеріалів їх можна систематизувати за чотирма основними реологічними типами: фрикційно-гранульовані, когезійно-злежувані, структуровані волокнисті та в'язкопластичні пастоподібні системи (табл. 1). Фрикційно-гранульовані матеріали (зернові компоненти, подрібнені сухі корми) проявляють переважно сипучість, характеризуються внутрішнім тертям і здатністю до локальних зсувів, що визначається кутом природного нахилу та міцністю міжчастинкових зв'язків [1, 2]. Когезійно-злежувані матеріали (вологі комбікорми, сухі компоненти після гігроскопічного зволоження) формують консолідовані структурні зони, у яких напружений стан значною мірою визначається порогом текучості та умовами консолідації, що



узгоджується з поведінкою матеріалів, які проявляють характерні ефекти злежування [2, 4].

Таблиця 1

Узагальнена типологія кормових матеріалів за типом реологічної поведінки

№	Тип реологічної поведінки	Стан матеріалу	Типова реологічна модель	Реологічна поведінка при змішуванні
		Приклади	Інженерні критерії	
1	Фрикційно-гранульований	Сухі сипкі, зернисті	Модель Мора-Кулона	Вільне пересипання, можливе розшарування при різних фракціях, чутливість до вологості
		зернові, комбікормові гранули [4, 8]	Кут природного нахилу (φ); коефіцієнт внутрішнього тертя	
2	Когезійно-фрикційний (компактований)	Слабко вологі, злежувані порошки	Когезійна модель зсуву (Дженіке)	Часткове налипання, грудкування, ризик «тунелювання» у бункерах
		DDGS, дрібно мелені зернові суміші [5, 6, 8]	$ffc < 4$ (Jenike Flow Function); коефіцієнт когезії (c)	
3	Структурований / волокнистий (квазіпластичний)	Волокнисті, пружно-пластичні	Модель Гершель-Балклі	Опір до порогу текучості, повільна деформація; волокна злипаються, структура частково відновлюється після розвантаження
		сінаж, солома, люцерна [1, 3]	τ_0 – граничне напруження; n – показник потоку	
4	В'язкопластичний / пастоподібний	Високовологі, пластичні маси	Модель Бінгама-Шведова	Повільна деформація, налипання на робочі органи; високий опір зсуву
		патока, буряковий жом, вологі відходи [2, 7]	μ – в'язкість, τ_0 – граничне напруження; (визначаються реометрично)	

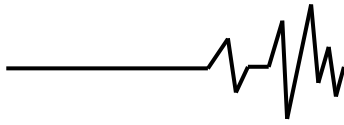
Волокнисті кормові матеріали, такі як кукурудзяний силос, сінаж та трав'яні суміші, характеризуються пружно-зміцненою поведінкою, нелінійним характером підвищення напруження зсуву зі збільшенням швидкості деформації та структурною стабільністю, що визначається довжиною й орієнтацією волокон [3]. Такі системи здебільшого демонструють квазіпластичну або псевдопластичну поведінку залежно від ступеня подрібнення та вмісту вологи. Пастоподібні матеріали (вологі кормові концентрати, жомові та білково-вуглеводні пасти) проявляють в'язкопластичні властивості, зокрема наявність порогу текучості, пластичної зони та лінійного або слабконелінійного зростання напруження при збільшенні швидкості зсуву [5-7].

Систематизація кормових матеріалів за реологічними ознаками дозволяє встановити відповідність між їх фізичними властивостями та характером механічної відповіді під дією навантаження. Це створює передумови для правильного вибору реологічного підходу в подальших дослідженнях, де комплексна механіко-реологічна модель змішування

повинна враховувати не лише властивості окремих компонентів, а й їхню взаємодію у динамічних умовах процесу змішування.

Реологічна поведінка кормових матеріалів у змішувальному процесі проявляється як сукупність різнохарактерних деформаційних і зсувних явищ, що виникають під дією зсувних навантажень і напружень, сформованих робочим органом, а також унаслідок локального ущільнення, внутрішньої взаємодії частинок та їх структурної неоднорідності. У робочому просторі змішувача утворюються зони нерівномірного напружено-деформованого стану, у межах яких матеріал реагує відповідно до властивості йому морфологічної та структурно-реологічної організації. Найбільш характерними формами такої реакції є чотири базові режими поведінки: фрикційний, когезійний, в'язкопластичний та волокнисто-структурний. Вони визначають локальну та глобальну динаміку потоку, впливають на траєкторії циркуляції частинок, інтенсивність їх взаємного перемішування та рівень дисипації енергії [1-6].

Фрикційний режим формується в умовах,



коли домінує внутрішнє тертя, а міжчастинкові зв'язки є слабкими або відсутніми. Рух матеріалу відбувається переважно за рахунок пересипання, ковзання та утворення локальних зсувних площин. У таких умовах маса поводить себе подібно до сухих сипких тіл, демонструючи сегрегацію компонентів залежно від розміру, форми або щільності частинок [1, 2]. У змішувачі фрикційний режим зазвичай реалізується у периферійних і верхніх зонах, де навантаження від робочого органа є мінімальним. Саме цей режим визначає початкове розподілення частинок та інтенсивність їхнього поверхневого оновлення у процесі циркуляції.

Когезійний режим характерний для матеріалів із вираженими міжчастинковими силами зчеплення, що виникають унаслідок підвищеної вологості, дрібнодисперсності або капілярного зв'язування. У таких системах формуються консолідовані ділянки, у яких напруження накопичується до певної критичної величини, після чого відбувається раптове руйнування та локальний зсув. Це створює пульсаційний характер руху: матеріал частково «тримає форму», а потім переходить до швидкого зміщення [3, 4]. У змішувачі когезійні зони найчастіше формуються в центральній частині робочого простору та в областях підвищеного напружено-деформованого впливу, де спостерігається максимальна консолідація матеріалу. Така поведінка значно ускладнює рівномірне перемішування, оскільки великі консолідовані сегменти можуть довго зберігатися без руйнування.

В'язкопластичний режим проявляється у матеріалах, у яких рух можливий лише після перевищення порогу текучості. До моменту досягнення критичного навантаження матеріал поводить себе як деформівне тіло, накопичуючи напруження, а після перевищення порогу переходить до пластичної течії. У цьому стані деформація супроводжується значною дисипацією енергії, що призводить до підвищених енергетичних витрат процесу змішування. Подібні властивості притаманні системам із вираженим порогом текучості та нелінійною напружено-зсувною залежністю, що характерно для багатьох харчових та біотехнологічних середовищ [5, 7, 8]. В'язкопластичні ділянки концентруються у нижній частині змішувача та поблизу зон, де робочий орган створює максимальні зсувні швидкості й інтенсивне ущільнення. Для таких мас характерна слабка здатність до самостійного руйнування структурних елементів, що визначає необхідність зовнішнього інтенсивного механічного впливу.

Волокнисто-структурний режим є особливим різновидом поведінки, що виникає у

кормах, які містять значну кількість структурованих волокон. Внутрішня будова таких матеріалів формує волокнистий каркас, який протидіє зсуву завдяки вигину, перекручуванню та взаємному зачепленню волокон [6]. У процесі змішування волокниста структура здатна частково руйнуватися або переорієнтовуватися в напрямку прикладеного навантаження, що викликає нелінійне зростання напружень зі збільшенням швидкості зсуву. Після руйнування окремих елементів структура тимчасово втрачає стабільність і може переходити до пластичної або фрикційної поведінки, що визначає характерні зміни у циркуляції потоку [3].

Усі зазначені режими не існують ізольовано: у реальному змішувальному процесі вони формують складну мозаїчну структуру, у якій окремі ділянки матеріалу переходять від одного типу поведінки до іншого залежно від локальних умов. Така динаміка створює проміжні, або квазіпластичні, стани, що виникають під впливом взаємодії різномірних компонентів і змін напружено-деформованого стану. Перехідність цих режимів визначає характер циркуляції, швидкість оновлення частинок у потоці, ефективність руйнування консолідованих зон і загальну інтенсивність змішування. Глибоке розуміння просторово-часової структури поведінки кормових матеріалів у змішувачах є необхідною передумовою для подальшого обґрунтування застосування механіко-реологічних моделей, здатних адекватно описати ці процеси в кількісній формі.

Механічну поведінку фрикційно-гранульованих кормових матеріалів доцільно описувати на основі критерію міцності Мора-Кулона (рис. 1, а), який встановлює залежність між граничним напруженням зсуву та нормальним навантаженням. Модель дозволяє визначити момент переходу від пружного накопичення деформації до утворення зсувних площин [1, 9]:

$$\tau_y = c + \sigma \tan \varphi, \quad (1)$$

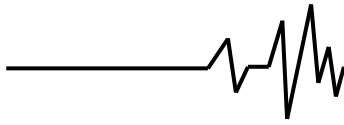
де c – когезія, Па; σ – нормальне напруження, Па; φ – кут внутрішнього тертя, град.

До досягнення граничного стану матеріал реагує як пружне середовище, що підкоряється лінійній залежності між напруженням і деформацією [1]:

$$\tau = G\gamma, \quad (2)$$

де G – модуль зсуву, Па; γ – відносна деформація зсуву.

У цій області відбувається накопичення пружної енергії без формування зсувних площин. Після перевищення критичного напруження $|\tau| > \tau_y$ система переходить у граничний стан: порушуються контакти між окремими елементами структури, виникають



локальні площини зсуву та починається рух матеріалу. Пружна енергія частково перетворюється на кінетичну, а частково дисипує внаслідок мікроскопічного тертя [10].

Модель Мора-Кулона у цьому випадку виступає базовою інженерною апроксимацією для оцінювання умов руйнування зернистої структури та опису фрикційного механізму зсуву. Подальший вплив вологості та когезії уточнюється за допомогою узагальнених моделей [9].

Для когезійно-фрикційних кормових матеріалів (DDGS, вологі комбікорми та дрібнодисперсні зернові суміші) характерна релаксацийна динаміка зсуву, зумовлена поєднанням міжчастинкових когезійних і фрикційних взаємодій [1, 4]. На відміну від сипких гранульованих систем, у яких втрата стійкості контактів відбувається миттєво, ці матеріали проявляють залежність граничної міцності від ступеня ущільнення, вологості та тривалості дії навантаження [4, 10].

Реологічно така поведінка описується моделлю Дженіке (рис. 1, б), що розвиває критерій Мора-Кулона шляхом врахування впливу попередньої консолідації матеріалу на ефективні параметри когезії c і кута внутрішнього тертя φ_c [11]. Граничне напруження зсуву визначається рівнянням:

$$\tau_y(\sigma) = c(\sigma_c, t) + \sigma \tan \varphi_c(\sigma_c, t), \quad (3)$$

де τ_y – межа текучості, Па; $c(\sigma_c, t)$ – ефективна когезія, що залежить від рівня консолідації σ_c і часу дії навантаження t , Па; φ_c – ефективний кут внутрішнього тертя, град; σ – нормальне напруження, Па.

Ключовим параметром є функція текучості Дженіке:

$$f_{fc} = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}, \quad (4)$$

яка характеризує співвідношення між головним напруженням при руйнуванні σ_1 та напруженням після консолідації σ_c [11] і визначає класифікацію матеріалів за їхньою текучістю: $f_{fc} > 10$ – вільнотекучі, $4 < f_{fc} < 10$ – помірно текучі, $2 < f_{fc} < 4$ – когезійні, $f_{fc} < 2$ – сильно злежувані матеріали [1, 11].

Поведінку когезійно-фрикційних кормів у процесах змішування можна представити за допомогою механічного аналога у вигляді послідовного з'єднання пружного елемента (тіло Гука) із паралельно з'єднаними тілами Сен-Венана з порогом текучості та тіла Ньютона, що відображає дисипацію енергії [4, 5]:

$$\tau = \begin{cases} G\gamma, & \text{якщо } |\tau| < \tau_y(\sigma), \\ \tau_y(\sigma) + \eta\dot{\gamma}, & \text{якщо } |\tau| \geq \tau_y(\sigma), \end{cases} \quad (5)$$

де η – динамічна в'язкість, Па·с; $\dot{\gamma}$ – швидкість зсуву, с^{-1} .

Така модель дає змогу відобразити етапи накопичення напружень, локального зриву когезійних зв'язків і релаксацийної течії, що

характерно для вологих або дрібнодисперсних кормових сумішей [1, 4, 5]. Таким чином, модель Дженіке є подальшим розвитком критерію Мора-Кулона, оскільки враховує історію навантаження та ступінь консолідації, що дозволяє кількісно описати пульсуючий характер зсуву та енергетичну неоднорідність процесу змішування когезійних кормових систем [4, 10, 11].

Реологічна поведінка кормових матеріалів, таких як сінаж, подрібнена солома чи люцерна, описується моделлю Гершеля–Балклі (рис. 1, в), яка адекватно відображає їхню пружно-в'язкопластичну природу. Для таких структурованих волокнистих систем характерна комбінація пружних, пластичних і в'язких властивостей, що зумовлюють наявність порогу текучості τ_0 . У діапазоні напружень $|\tau| < \tau_0$ матеріал реагує як пружне тіло, накопичуючи енергію деформації без істотного переміщення частинок, тоді як при $|\tau| \geq \tau_0$ відбувається руйнування міжволоконних зв'язків і перехід у режим зсувної течії. Така поведінка є характерною для систем із порогом текучості та визначає особливості енергетичних витрат і стабільності структури під час змішування волокнистих кормових сумішей [5].

На початковій стадії процесу, коли зовнішнє навантаження менше за τ_0 , матеріал поводить себе як пружне тіло, аналогічне тілу Гука, у якому напруження τ зростає пропорційно деформації γ (2). У цьому режимі відбувається накопичення потенційної енергії пружної деформації, що супроводжується незначним зміщенням частинок без втрати зв'язків між ними. Такий стан характерний, зокрема, для кормових сумішей на основі сінажу або подрібненої люцерни на початку перемішування, коли структура залишається цілісною.

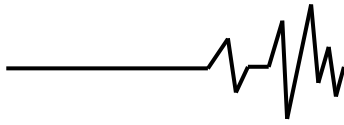
Після досягнення межі текучості $\tau = \tau_0$ починається руйнування міжчастинкових зв'язків: частинки починають ковзати одна відносно одної, і система переходить у пластичний режим. У цей момент реалізується нелінійна в'язкопластична поведінка, яка описується рівнянням:

$$\tau = \tau_0 + k \dot{\gamma}^n, \quad (6)$$

де k – коефіцієнт консистенції, Па·с ^{n} ; n – показник поведінки потоку.

При $n < 1$ реалізується псевдопластична поведінка, коли ефективна в'язкість зменшується зі збільшенням швидкості зсуву. Це характерно для волокнистих кормових матеріалів (сінаж, люцерна), які проявляють «розрідження» під час змішування [5; 6]. При $n > 1$ спостерігається дилатантна поведінка, коли в'язкість зростає із швидкістю зсуву, що типово для високонцентрованих пастоподібних систем [7].

На стадії в'язкоплинного режиму ($\tau > \tau_0$)



частинки рухаються хаотично, утворюючи зсувні шари з різною швидкістю. Ефективна в'язкість визначається залежністю:

$$\eta_{\text{еф}} = \frac{\tau - \tau_0}{\dot{\gamma}} = k \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (7)$$

У цьому режимі проявляється характерна реологічна адаптивність волокнистих кормових мас – здатність змінювати опір зсуву залежно від інтенсивності механічної дії. Це означає, що під час змішування структура та густина потоку змінюються, сприяючи вирівнюванню компонентів і зниженню енерговитрат [5, 7].

Після припинення зовнішнього навантаження в матеріалі відбувається часткове відновлення форми за рахунок еластичних зв'язків (елемент пружини) та дисипація накопиченої енергії через внутрішнє тертя, що реалізує в'язкісний демпфер. Унаслідок цього кормові матеріали, які підпорядковуються моделі Гершеля–Балклі, проявляють пружно-в'язкопластичну поведінку: після розвантаження зберігається залишкова деформація, але структура системи залишається стабільною. Такий тип поведінки визначає динамічну стійкість суміші під час роботи змішувача та потребує врахування параметрів τ_0 , k і n при моделюванні для забезпечення оптимального балансу між енергоефективністю процесу та якістю гомогенізації [7].

Пастоподібні кормові матеріали (буряковий жом, барда, патока, вологі побічні продукти) характеризуються високою вологістю та наявністю внутрішніх когезійних і капілярних зв'язків, що зумовлюють існування межі текучості τ_0 . У межах напружень $|\tau| < \tau_0$ такі системи поведуться як квазітверді середовища, тоді як при $|\tau| \geq \tau_0$ переходять у в'язкопластичний стан із нелінійною реологічною залежністю [5, 7-9]. Реологічна поведінка пастоподібних кормів адекватно описується моделлю Бінгема–Шведова (рис. 1, г), яка поєднує пружну реакцію до порогу τ_0 та подальшу нелінійну течію з показником n . Узагальнене рівняння має вигляд:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}) + k |\dot{\gamma}|^n \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}), \quad (|\tau| \geq \tau_0), \quad (8)$$

де $\operatorname{sgn}(\dot{\gamma})$ – функція знаку, що визначає напрямок зсуву.

На початковій ділянці деформацій, при $|\tau| < \tau_0$, поведінку матеріалу можна описати законом Гука, оскільки зміна відносної деформації не супроводжується розвитком плинності. Потенційна енергія пружної деформації визначається залежністю:

$$W_e = \frac{1}{2} G \gamma^2, \quad (9)$$

яка характеризує запас пружної стійкості до моменту переходу у пластичний стан.

Досягнення межі текучості $|\tau| = \tau_0$ відповідає початку руйнування когезійної структури та появи зсувних площин. Після цього система переходить у в'язкопластичний режим, у якому домінує нелінійний зв'язок між напруженням і швидкістю зсуву. Ефективна в'язкість визначається рівнянням (7).

Сумарна деформація та швидкість деформування подаються як сума пружної та пластичної складових:

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_{vp}, \quad (10)$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_{vp}, \quad (11)$$

$$\dot{\gamma}_e = \frac{\dot{\tau}}{G}, \quad (12)$$

$$\dot{\gamma}_{vp} = \begin{cases} 0, & |\tau| < \tau_0 \\ \left[\frac{|\tau| - \tau_0}{k} \right]^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn}(\tau), & |\tau| \geq \tau_0 \end{cases} \quad (13)$$

За сталого навантаження ($\dot{\tau} \approx 0$) швидкість деформації визначається пластичною складовою $\dot{\gamma}_{vp}$, що повністю відповідає кінематичній поведінці пастоподібних мас у змішувачі.

Енергетичний аспект в'язкопластичної течії описується питомою потужністю дисипації [8]:

$$P_d = \tau \dot{\gamma} = \tau_0 \dot{\gamma} + k \dot{\gamma}^{n+1}. \quad (14)$$

Перший доданок характеризує витрати на подолання межі текучості, другий – енергію, розсіяну внаслідок в'язкої течії. Мінімізація відношення $P_d / \dot{\gamma}$ забезпечує енергоефективний режим змішування, коли більша частина енергії використовується для гомогенізації, а не на внутрішнє тертя [9].

Після припинення навантаження в матеріалі відбувається пружно-в'язкопластична релаксація. Частина деформації γ_e відновлюється за рахунок пружної компоненти, тоді як залишкова деформація $\gamma_r = \gamma - \gamma_e$ зберігається внаслідок структурної пам'яті середовища. Зменшення напруження у часі описується рівнянням типу Максвелла [7, 9]:

$$\frac{d\tau}{dt} + \frac{G}{\eta_{\text{еф}}} \tau = 0, \quad (15)$$

розв'язок якого:

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-t/t_r}, \quad (16)$$

де $t_r = \eta_{\text{еф}} / G$ – час релаксації. Для пастоподібних кормових мас (буряковий жом, м'яса, вологі побічні продукти) t_r зазвичай становить 2-10 с, що забезпечує стабільність структури між циклічними діями робочого органа.

Таким чином, пастоподібні кормові системи характеризуються типовою в'язкопластичною поведінкою з порогом текучості та змінною ефективною в'язкістю. Рівняння (8)-(16) дають змогу кількісно описати енерговитрати, кінематику течії та структурну стабільність суміші в процесі змішування.

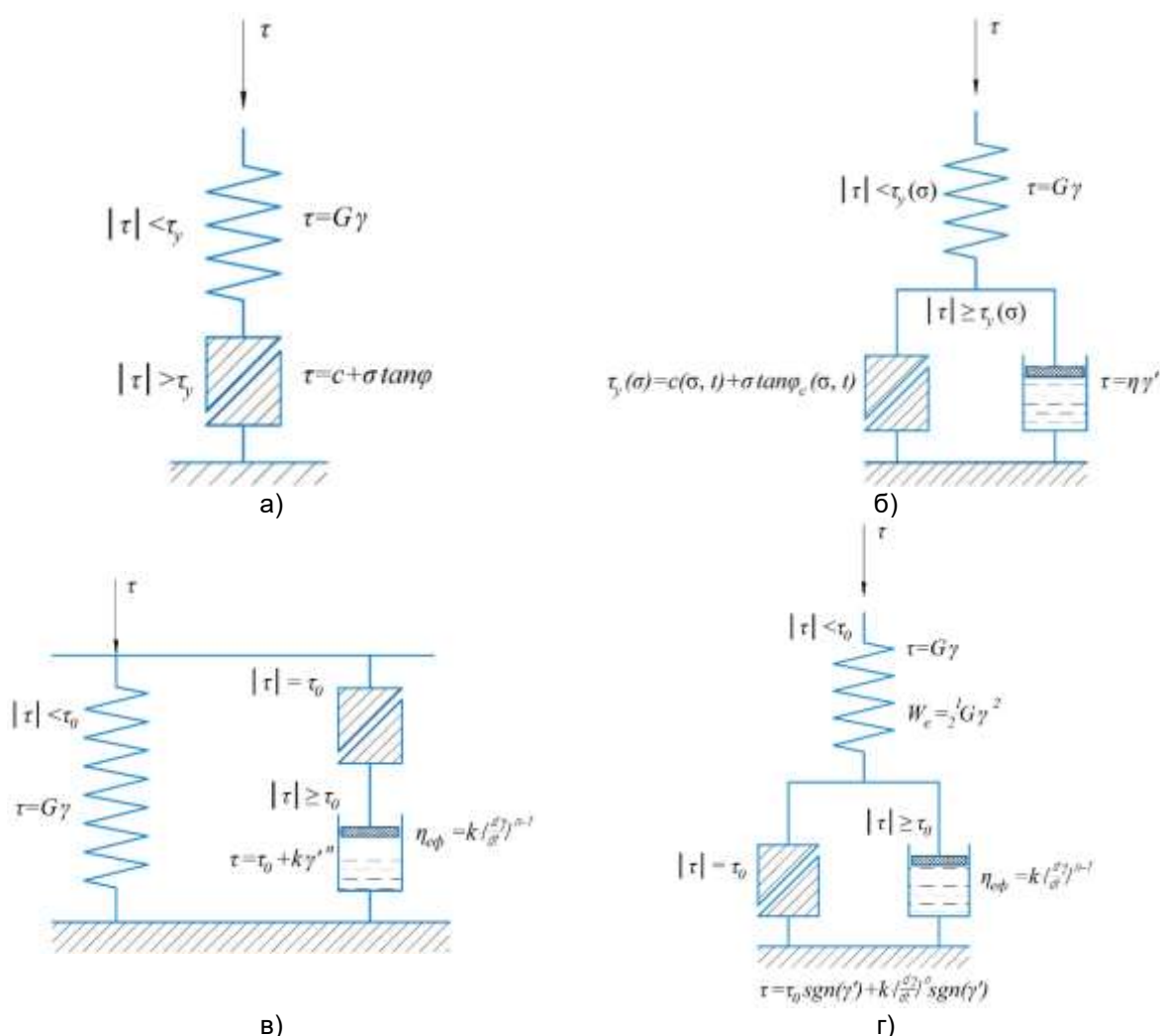
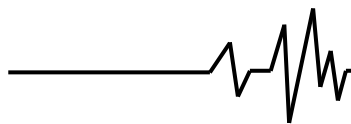


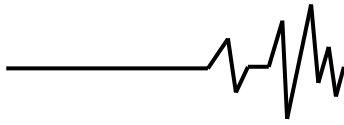
Рис. 1. Механічні аналоги реологічних моделей кормових матеріалів у процесі змішування: а) модель Мора-Кулона для фрикційно-гранульованих кормових матеріалів; б) модель Дженіке для когезійно-фрикційних кормових матеріалів; в) модель Гершеля-Балклі для структурованих кормових матеріалів; г) модель Бінгема-Шведова для в'язкопластичних кормових матеріалів

Реологічні стани кормових матеріалів у робочому просторі змішувальних апаратів формуються внаслідок просторово-часового розподілу напружено-деформованого стану, який задається поєднанням матеріальних властивостей та кінематики робочого органа. Для кожної точки робочого об'єму можна виділити локальні значення напруження зсуву τ , нормального напруження σ , швидкості зсуву $\dot{\gamma}$ та ступеня попередньої консолідації σ_c , які визначають, чи перебуває матеріал у фрикційному, когезійному, в'язкопластичному або волокнисто-структурному стані [1, 5, 9]. Перехід між цими станами відбувається при зміні співвідношення «діючі напруження – порогові параметри матеріалу», що описуються критеріями міцності Мора-Кулона, Дженіке та моделями типу Гершеля-Балклі і Бінгема-Шведова [5, 7-9, 11].

У периферійних та верхніх зонах

змішувача, де нормальні напруження незначні, а швидкість зсуву відносно висока, переважає фрикційна поведінка: локальні значення $|\tau|$ не досягають суттєвих порогових рівнів когезії та текучості, і матеріал перебуває нижче межі $\tau_y(\sigma)$ або τ_0 відповідних моделей (1), (3), (6), (8). По мірі наближення до зон підвищеного навантаження (область дії робочого органа, нижні шари заповнення) нормальні напруження σ та консолідація σ_c зростають, що згідно з моделлю Дженіке [11] приводить до збільшення ефективних параметрів $c(\sigma_c, t)$ і $\varphi_c(\sigma_c, t)$ та зсуву межі текучості $\tau_y(\sigma)$ до вищих значень. У цих областях матеріал переходить до когезійного або злежуваного стану, у якому локальне руйнування структури відбувається стрибкоподібно, у вигляді пульсуючих актів зсуву [4, 10, 11].

Для в'язкопластичних і пастоподібних компонентів (жом, барда, патока) реологічні



переходи визначаються співвідношенням між дійсним напруженням τ та порогом текучості τ_0 , а також формою реологічної кривої $\tau(\dot{\gamma})$, що описується моделями Гершеля–Балклі та Бінгема–Шведова [5, 7-9]. У зонах з малими $\dot{\gamma}$ і високою консолидацією матеріал перебуває в квазіпружному стані ($|\tau| < \tau_0$), накопичуючи енергію деформації без істотної течії (рівняння (2), (9)). Зі зростанням швидкості зсуву та перевищенням порогу $|\tau| \geq \tau_0$ відбувається перехід до в'язкопластичного режиму, у якому ефективна в'язкість η_{ef} стає функцією $\dot{\gamma}$ (рівняння (7), (8)).

Волокнисті компоненти (сінаж, подрібнена солома, люцерна) проявляють додаткову стадійність переходів, пов'язану з руйнуванням і переорієнтацією волокнистого каркаса [3; 6]. За малих $\dot{\gamma}$ волокнистий каркас забезпечує підвищену структурну стійкість, і матеріал реагує переважно пружно, відповідно до аналогів типу Гука. Із зростанням зсувних швидкостей у роботі змішувача частина волокон розривається або втрачає взаємне зачеплення, що приводить до переходу від волокнисто-структурного стану до в'язкопластичного, описуваного моделлю Гершеля–Балклі [5, 6, 7]. По мірі подальшого руйнування структури та зменшення довжини волокон можливий перехід до поведінки, близької до пастоподібної або когезійно-фрикційної, що відображає еволюцію реологічного стану в ході змішування.

Ключовими факторами, які зумовлюють переходи між зазначеними реологічними станами, є: фізико-механічні та структурні властивості матеріалу (вологість, гранулометричний склад, вміст волокон, показники τ_0 , f_{fc} , G , k , n) [1, 3-5, 7-9, 11], параметри навантаження (рівень заповнення, розподіл σ та τ , швидкість обертання робочих органів, режим подачі компонентів) та конструктивні особливості змішувача (тип і геометрія робочого органа, форма бункера, наявність напрямних і ріжучих елементів) [1, 9, 10, 11]. Взаємодія цих факторів формує мозаїчну структуру робочого об'єму, у якій окремі ділянки матеріалу постійно переходять між фрикційним, когезійним, в'язкопластичним і волокнистим станами. Встановлені на основі механіко-реологічних моделей (1)-(16) закономірності дають змогу пов'язати розподіл локальних напружень і швидкостей зсуву з характером цих переходів та обґрунтувати параметри змішування, що забезпечують керовану зміну реологічного стану в напрямку інтенсифікації процесу та підвищення енергоефективності [5, 7-9].

Реологічні параметри багатокомпонентної кормової суміші безпосередньо визначають рівень енергетичних витрат, необхідних для досягнення заданої

гомогенності в процесі змішування. Оскільки суміш складається з зернистих, когезійних, волокнистих та пастоподібних компонентів, що перебувають у різних реологічних станах, доцільно розглядати не окремі властивості компонентів, а ефективні реологічні параметри суміші в цілому: ефективну межу текучості τ_0^{ef} , ефективний модуль зсуву G_{ef} , коефіцієнт консистенції k_{ef} , показник течії n_{ef} і ефективну в'язкість $\eta_{\text{ef}}(\dot{\gamma})$ [5, 7-9]. Саме ці параметри визначають, яке напруження зсуву τ необхідно створити в суміші для забезпечення заданої швидкості деформації $\dot{\gamma}$, а отже якої споживаної потужності потребує змішувач.

Для стаціонарних умов змішування (коли пружна складова відіграє другорядну роль) реакцію кормової суміші на зсув доцільно описувати узагальненим рівнянням типу Гершеля–Балклі:

$$\tau = \tau_0^{\text{ef}} + k_{\text{ef}} \dot{\gamma}^{n_{\text{ef}}}, \quad (17)$$

де τ – дійсне напруження зсуву, Па; τ_0^{ef} – ефективна межа текучості суміші, Па; k_{ef} – ефективний коефіцієнт консистенції, Па $\cdot \text{с}^{n_{\text{ef}}}$; n_{ef} – ефективний показник поведінки потоку; $\dot{\gamma}$ – локальна швидкість зсуву, с^{-1} [5, 7-9].

З цього співвідношення випливає ефективна в'язкість суміші:

$$\eta_{\text{ef}} = \frac{\tau - \tau_0^{\text{ef}}}{\dot{\gamma}} = k_{\text{ef}} \dot{\gamma}^{n_{\text{ef}}-1}, \quad (18)$$

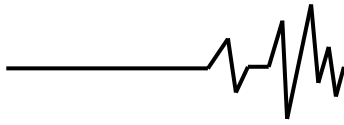
де η_{ef} має розмірність Па $\cdot \text{с}$, що узгоджується із розмірністю k_{ef} (Па $\cdot \text{с}^{n_{\text{ef}}}$) та $\dot{\gamma}^{n_{\text{ef}}-1}$ ($\text{с}^{1-n_{\text{ef}}}$). Ці параметри відображають опір суміші зсуву: що більшими є τ_0^{ef} , k_{ef} та n_{ef} , то більші напруження й потужність потрібні для забезпечення заданої інтенсивності руху частинок.

Миттєві енергетичні витрати всередині матеріалу описуються питомою потужністю дисипації (14). З позицій термодинаміки вся механічна енергія, яку споживає змішувач, зрештою переходить у тепло, тобто повністю дисипується внаслідок внутрішнього тертя і руйнування структури [8, 9]. Однак з технологічної точки зору доцільно розділяти енергію на умовно корисну, яка сприяє досягненню гомогенності (руйнування консолидованих зон, інтенсифікація циркуляції, оновлення поверхні контакту частинок), та надлишкову дисипацію, яка не призводить до покращення змішування, а лише збільшує нагрівання суміші та навантаження на привід.

Якщо підставити (17) у (14), отримаємо:

$$P_d = \tau_0^{\text{ef}} \dot{\gamma} + k_{\text{ef}} \dot{\gamma}^{n_{\text{ef}}+1}. \quad (19)$$

Перший доданок $\tau_0^{\text{ef}} \dot{\gamma}$ відображає складову постійних енергетичних витрат, пов'язаних з подоланням структурної міцності суміші (руйнуванням злежуваних, когезійних і волокнистих каркасів). Другий доданок



$k_{\text{еф}} \dot{\gamma}^{n_{\text{еф}}+1}$ описує швидкозростаючу частину енергетичних витрат, обумовлену в'язкопластичною течією: при зростанні $\dot{\gamma}$ ця складова може або зменшуватись у відносному вираженні (для псевдопластичних сумішей із $n_{\text{еф}} < 1$), або зростати різкіше (для систем з $n_{\text{еф}} > 1$) [5, 7-9]. Таким чином, характер кривої $P_d(\dot{\gamma})$ безпосередньо визначається реологічними параметрами суміші.

З точки зору досягнення гомогенності важливим є не лише миттєве значення питомої потужності, а й інтегральна енергія, витрачена до моменту, коли суміш досягає заданого ступеня однорідності. Як критерій гомогенності часто використовують коефіцієнт варіації концентрації компонента CV (безрозмірний або у відсотках), де цільовим вважають рівень, наприклад, $CV \leq 5-10\%$ для кормових сумішей. Тоді питома енергія змішування до заданого рівня гомогенності може бути визначена як

$$E_{\text{гом}} = \frac{1}{\rho V} \int_0^{t_{\text{гом}}} N(t) dt, \quad (20)$$

де $E_{\text{гом}}$ – питома витрати енергії для змішування до досягнення заданої гомогенності, Дж/кг; ρ – середня густина суміші, кг/м³; V – об'єм суміші в робочому просторі змішувача, м³; $N(t)$ – миттєва споживана потужність змішувача, Вт; $t_{\text{гом}}$ – час, за який досягається цільове значення CV , с.

Миттєва споживана потужність змішувача $N(t)$, яка визначається як об'ємний інтеграл питомої потужності дисипації. У континуальному описі кожний елементарний об'єм кормової суміші dV під час перемішування зазнає локальних напружень зсуву $\tau(x, t)$ та відповідних швидкостей деформації $\dot{\gamma}(x, t)$. Питома потужність дисипації в такому елементі дорівнює $P_d(x, t) = \tau(x, t)\dot{\gamma}(x, t)$ і має розмірність Вт/м³, що відображає швидкість перетворення механічної енергії у тепло внаслідок внутрішнього тертя та руйнування структури суміші. Таким чином, загальна миттєва потужність, передана матеріалу, визначається через інтегрування цієї величини за всім робочим об'ємом бункера, заповненим сумішшю:

$$N(t) = \int_V \tau(x, t)\dot{\gamma}(x, t) dV, \quad (21)$$

із врахуванням (19) рівняння (21) набуде вигляду

$$N(t) = \int_V [\tau_0^{\text{еф}}(x, t)\dot{\gamma}(x, t) + k_{\text{еф}}(x, t)\dot{\gamma}(x, t)^{n_{\text{еф}}+1}] dV, \quad (22)$$

що дозволяє інтерпретувати миттєву потужність як суму енергії, витраченої на подолання структурної міцності компонентів, та енергії, що розсіюється внаслідок в'язкої течії. Таким чином, інтеграл потужності відображає розподілену взаємодію усіх реологічних станів суміші – фрикційних, когезійних, волокнистих і пастоподібних у межах робочого простору

змішувача. Об'ємна інтеграція акумулює внесок кожного елемента, дозволяючи кількісно пов'язати локальні механізми дисипації з глобальними енергетичними характеристиками апарата.

Завдяки такому підходу вираз для питомої енергії змішування (20) набуває чіткої фізичної інтерпретації відображаючи сумарну роботу, яку система витрачає на подолання межі текучості, руйнування структурних зв'язків різних компонентів суміші, підтримання зсувних швидкостей у зонах в'язкопластичної течії та компенсацію внутрішніх втрат, пов'язаних із в'язкістю. Таким чином, ця залежність є фундаментальним зв'язком між реологічними параметрами суміші та енергетичними показниками роботи змішувача, що дозволяє кількісно оцінити ефективність досягнення гомогенності з урахуванням реальної, неоднорідної структури матеріалу.

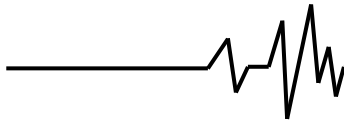
Алгоритм комплексного застосування механіко-реологічних моделей для прогнозування поведінки кормових матеріалів та обґрунтування енергоефективних режимів змішування доцільно формалізувати у вигляді вхідних даних, проміжних обчислювальних модулів і вихідних результатів. Нехай X_{rheo} позначає множину експериментально визначених реологічних параметрів компонентів і суміші (межі текучості, кути внутрішнього тертя, параметри функції текучості, коефіцієнти консистенції, показники поведінки потоку тощо), X_{geo} – параметри геометрії та кінематики змішувача (форма бункера, тип і конфігурація робочого органа, частота обертання тощо), X_{mix} – характеристики рецептури та завантаження (масові частки компонентів, рівень заповнення, послідовність подавання тощо). Вектор керування режимами позначимо як u (частота обертання, час змішування, послідовність та спосіб завантаження), а вихідними функціями є питома енергія змішування $E_{\text{гом}}(u)$, коефіцієнт варіації гомогенності $CV(u)$ та оптимальний режим u_{opt} .

З алгоритмічної точки зору послідовність дій може бути представлена у вигляді композиції відображень:

$$u \xrightarrow{\text{Sim}} \{P_d(x, t; u), CV(t; u)\} \xrightarrow{\text{Eval}} \{E_{\text{гом}}(u), CV_{\text{кінц}}(u)\}, \quad (23)$$

де Sim – оператор моделювання напружено-деформованого стану й локальної дисипації в робочому об'ємі змішувача, а Eval – оператор енергетичної та якісної оцінки процесу.

Перший етап алгоритму – блок ідентифікації ефективних реологічних властивостей. На основі множини експериментальних вимірювань $D_{\text{exp}} \subset X_{\text{rheo}}$ формується відображення:



$$\Phi_{id}: D_{exp} \rightarrow R_{eff} =$$

$$= \{\tau_0^{ef}, c_{ef}, \varphi_{ef}, k_{ef}, n_{ef}, G_{ef}, \eta_{ef}(\dot{\gamma})\}, \quad (24)$$

яке повертає набір ефективних параметрів багатокомпонентної суміші. На цьому етапі для кожного класу матеріалу (фрикційний, когезійний, волокнистий, пастоподібний) виконується апроксимація експериментальних кривих « τ – $\dot{\gamma}$ » відповідною моделлю (Мора-Кулона, Дженіке, Гершеля-Балклі, Бінгема-Шведова), а для суміші загалом побудова узагальненої моделі з параметрами R_{eff} .

Другий етап – формування реологічного ядра моделі. Будується відображення:

$$\mathcal{F}_{rheo}: (\dot{\gamma}, R_{eff}) \rightarrow \tau, \quad (25)$$

яке за заданою локальною швидкістю зсуву $\dot{\gamma}$ та ефективними параметрами повертає напруження зсуву τ для даного типу матеріалу. На рівні реалізації алгоритму це означає, що для кожної елементарної ділянки об'єму Ω_i вибирається відповідна модель (Мора-Кулона, Дженіке, Гершеля-Балклі або Бінгема-Шведова), а $\mathcal{F}_{rheo}$ виступає як уніфікований інтерфейс, що приховує різницю між моделями на рівні алгоритму.

Третій етап – кінематичний модуль. Об'єм змішувача дискретизується на множину осередків $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, а інтервал часу $[0, t_{rom}]$ – на часову сітку $\{t_j\}_{j=0}^M$. На основі геометрії апарата X_{geo} та керуючих параметрів u визначається оператор кінематики

$$\mathcal{K}_{kin}: (X_{geo}, u, \Omega_i, t_j) \rightarrow \dot{\gamma}_{ij}, \quad (26)$$

який для кожної комірки Ω_i та моменту часу t_j повертає локальну швидкість зсуву $\dot{\gamma}_{ij}$. Це може реалізовуватись як спрощена аналітична модель поля швидкостей або як результат чисельного розрахунку.

Четвертий етап – обчислення локальної дисипації та інтегрування за об'ємом. Для кожної пари (i, j) обчислюється:

$$\tau_{ij} = \mathcal{F}_{rheo}(\dot{\gamma}_{ij}, R_{eff}), P_{d,ij} = \tau_{ij} \dot{\gamma}_{ij}, \quad (27)$$

після чого миттєва потужність змішування набуває дискретного вигляду

$$N(t_j; u) \approx \sum_{i=1}^N P_{d,ij} \Delta V_i, \quad (28)$$

де ΔV_i – об'єм i -тої комірки. Паралельно в кожний момент часу за прийнятою методикою оцінюється коефіцієнт варіації концентрації компонентів $CV(t_j; u)$.

П'ятий етап – інтегральна енергетична оцінка. За дискретизованим виразом для $N(t_j; u)$ питома енергія змішування до моменту досягнення гомогенності визначається як:

$$E_{rom}(u) \approx \frac{1}{\rho V} \sum_{j=0}^{M^*} N(t_j; u) \Delta t_j, \quad (29)$$

де M^* відповідає часу t_{rom} , при якому виконується умова $CV(t_{M^*}; u) \leq CV^*$ (коефіцієнт варіації), ρ – середня густина суміші, V – об'єм матеріалу в робочому просторі бункера. Таким чином формується відображення:

$$\mathcal{E}: (u, R_{eff}, X_{geo}, X_{mix}) \rightarrow (E_{rom}(u), CV_{kin}(u)). \quad (30)$$

Завершальний етап алгоритму – задача оптимізації режимів. У просторі керувальних параметрів u вводиться цільова функція:

$$J(u) = E_{rom}(u), \quad (31)$$

а вимоги до якості змішування задаються у вигляді обмеження $CV_{kin}(u) \leq CV^*$. Задача вибору енергоефективного режиму формулюється як задача умовної мінімізації

$$u_{opt} = \arg \min_u \{J(u): CV_{kin}(u) \leq CV^*\}, \quad (32)$$

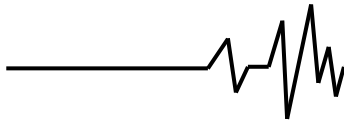
яка розв'язується чисельно шляхом перебору, градієнтно-вільних методів пошуку або адаптивних стратегій налаштування режимів. У такому формулюванні алгоритм комплексного застосування механіко-реологічних моделей виступає як цілісний обчислювальний протокол, що приймає на вході експериментально визначені реологічні характеристики та конструктивно-режимні параметри змішувача, а на виході повертає прогноз поведінки кормової суміші й енергетично оптимальний режим змішування для апаратів різних типів.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

У дослідженні сформовано інтегровану механіко-реологічну концепцію, що дозволяє кількісно описати поведінку багатокомпонентних кормових сумішей у змішувальних апаратах та обґрунтувати енергоефективні режими їх перемішування. Встановлено, що характер поведінки кормових матеріалів визначається поєднанням чотирьох базових реологічних станів – фрикційного, когезійного, в'язкопластичного та волокнистого, перехід між якими залежить від локальних напружень, ущільнення та швидкостей зсуву. Ідентифікація цих станів дала змогу системно обґрунтувати застосування відповідних механіко-реологічних моделей для опису деформування різних типів кормових компонентів.

Обґрунтовано доцільність використання моделей Мора-Кулона, Дженіке, Гершеля-Балклі та Бінгема-Шведова як взаємодоповнюючих інструментів, що забезпечують адекватний опис напружено-деформованої поведінки зернистих, когезійних, волокнистих і пастоподібних кормових систем. Показано, що поєднання ефективних реологічних параметрів суміші з локальними кінематичними характеристиками змішувача забезпечує можливість кількісної оцінки деформаційних процесів, питомої дисипації енергії та інтегральних енергетичних витрат до досягнення гомогенності.

Визначено взаємозв'язок між реологічними параметрами та енергетичними показниками процесу змішування, що дозволяє прогнозувати вплив порогу текучості, ефективної в'язкості, швидкостей зсуву та структурних змін



матеріалу на загальні витрати енергії. Результати енергетичного аналізу підтверджують, що найбільш суттєві втрати виникають у зонах когезійного ущільнення та в'язкопластичних переходів, де спостерігається максимальна інтенсивність дисипативних процесів.

Синтез отриманих результатів реалізовано у вигляді алгоритму комплексного застосування механіко-реологічних моделей, який формалізує послідовність ідентифікації ефективних параметрів, визначення локальних швидкостей зсуву, оцінювання питомої дисипації та інтегральної енергії змішування. Алгоритм забезпечує можливість прогнозування поведінки кормової суміші та вибору енергоефективних режимів для змішувачів різних типів.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на експериментальну верифікацію алгоритму, уточнення ефективних параметрів для широкого спектра кормових сумішей, розвиток чисельних методів моделювання (CFD/DEM) та інтеграцію розробленого підходу у системи автоматизованого керування технологічними процесами приготування кормів.

Список використаних джерел

1. Schulze D. *Powders and Bulk Solids: Behavior, Characterization, Storage and Flow*. Cham: Springer, 2021. 625 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-76720-4>
2. Al-Hashemi H.M.B., Al-Amri S.S. A review on the angle of repose of granular materials. *Powder Technology*. 2018. Vol. 330. P. 397-417. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.02.003>
3. Kamkeng L., Marchal P., Bertrandias A. Rheological characteristics of an anaerobically digested rye and maize silage mixture. *Chemical Engineering Research and Design*. 2023. Vol. 196. P. 309-318. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2023.06.045>
4. Kingsly A.R.P., Ileleji K.E., Stroshine R.L. Stress relaxation behavior of DDGS in relation to caking. *Powder Technology*. 2013. Vol. 235. P. 866-872. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.10.018>
5. Bonn D., Denn M.M., Berthier L., Divoux T., Manneville S. Yield stress materials in soft condensed matter. *Reviews of Modern Physics*. 2017. Vol. 89. Article 035005. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.035005>
6. Khan M., More R.V., Brandt L., Ardekani A.M. Rheology of dense fiber suspensions. *Physical Review Fluids*. 2023. Vol. 8. Article 064306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.8.064306>

7. Steffe J. F. *Rheological Methods in Food Process Engineering*. East Lansing: Freeman Press, 2019. 416 p.

8. Toğrul H., Arslan N. Mathematical model for prediction of apparent viscosity of molasses solutions. *Journal of Food Engineering*. 2004. Vol. 62, № 3. P. 281-289. [https://doi.org/10.1016/S0260-8774\(03\)00241-3](https://doi.org/10.1016/S0260-8774(03)00241-3)

9. Cares-Pacheco M.G., Falk V. A phenomenological law for complex granular materials from Mohr-Coulomb theory. *Advanced Powder Technology*. 2023. Vol. 34, Issue 1. Article 103888. <https://doi.org/10.1016/j.appt.2022.103888>

10. Macri, D., Chirone, R., Salehi, H. et al. Characterization of the Bulk Flow Properties of Industrial Powders from Shear Tests. *Processes*, 2020, vol. 8, no. 5, article 540. DOI: <https://doi.org/10.3390/pr8050540>

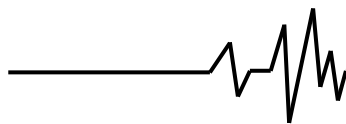
11. Jenike, A. W. *Storage and Flow of Solids*. Bulletin No. 123. Salt Lake City: University of Utah, 1964. 206 p.

12. Chhabra R.P., Richardson J.F. *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. 519 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8532-0.X0001-7>

13. Coussot, P. *Rheometry of Pastes, Suspensions and Granular Materials: Applications in Industry and Environment*. Springer, 2006. 279 p. <https://doi.org/10.1007/S00397-006-0118-Y>

References

1. Schulze, D. (2021). *Powders and bulk solids: Behavior, characterization, storage and flow*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-76720-4>
2. Al-Hashemi, H. M. B., Al-Amri, S. S. (2018). A review on the angle of repose of granular materials. *Powder Technology*, 330, 397–417. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.02.003>
3. Kamkeng, L., Marchal, P., Bertrandias, A. (2023). Rheological characteristics of an anaerobically digested rye and maize silage mixture. *Chemical Engineering Research and Design*, 196, 309–318. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2023.06.045>
4. Kingsly, A. R. P., Ileleji, K. E., Stroshine, R. L. (2013). Stress relaxation behavior of DDGS in relation to caking. *Powder Technology*, 235, 866–872. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.10.018>
5. Bonn, D., Denn, M. M., Berthier, L., Divoux, T., Manneville, S. (2017). Yield stress materials in soft condensed matter. *Reviews of Modern Physics*, 89, 035005. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.035005>



6. Khan, M., More, R. V., Brandt, L., Ardekani, A. M. (2023). Rheology of dense fiber suspensions. *Physical Review Fluids*, 8, 064306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.8.064306>
7. Steffe, J. F. (2019). *Rheological methods in food process engineering* (3rd ed.). Freeman Press.
8. Toğrul, H., Arslan, N. (2004). Mathematical model for prediction of apparent viscosity of molasses solutions. *Journal of Food Engineering*, 62(3), 281–289. [https://doi.org/10.1016/S0260-8774\(03\)00241-3](https://doi.org/10.1016/S0260-8774(03)00241-3)
9. Cares-Pacheco, M. G., Falk, V. (2023). A phenomenological law for complex granular materials from Mohr–Coulomb theory. *Advanced Powder Technology*, 34(1), 103888. <https://doi.org/10.1016/j.appt.2022.103888>
10. Macri, D., Chirone, R., Salehi, H., et al. (2020). Characterization of the bulk flow properties of industrial powders from shear tests. *Processes*, 8(5), 540. <https://doi.org/10.3390/pr8050540>
11. Jenike, A. W. (1964). *Storage and flow of solids* (Bulletin No. 123). University of Utah.
12. Chhabra, R. P., Richardson, J. F. (2008). *Non-Newtonian flow and applied rheology: Engineering applications* (2nd ed.). Butterworth-Heinemann. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8532-0.X0001-7>
13. Coussot, P. (2006). *Rheometry of pastes, suspensions and granular materials: Applications in industry and environment*. Springer. <https://doi.org/10.1007/S00397-006-0118-Y>

COMPREHENSIVE APPLICATION OF MECHANICAL AND RHEOLOGICAL MODELS FOR DESCRIBING THE BEHAVIOR OF FEED MATERIALS IN MIXING APPARATUSES

The article presents an integrated mechanico-rheological concept for describing the behavior of multicomponent feed materials in mixing apparatuses. The relevance of the study is driven by

the fact that feed mixtures contain frictional, cohesive, fibrous, and pasty components, each characterized by specific deformation mechanisms that influence energy consumption and the dynamics of homogenization. Standard models applied separately to each material type do not adequately capture the spatial and temporal heterogeneity of stress–strain states within the working volume of mixers.

The study systematizes the physico-mechanical properties of feed materials and identifies four characteristic rheological states: frictional, cohesive, viscoplastic, and fibrous. For each of these, the applicability of the Mohr–Coulomb, Jenike, Herschel–Bulkley, and Bingham–Shvedov models is substantiated. It is demonstrated that, under the action of the mixing tool, the mixture develops local zones with different shear rates, consolidation levels, and structural stability, which determine the mosaic nature of the material's rheological response.

Special attention is devoted to the energetic aspects of mixing. Relationships between shear stress, deformation rate, specific power dissipation, and the integral mixing energy required to achieve homogenization are established. The highest energy losses occur in cohesive and viscoplastic zones, where structural failure and intensive dissipation take place. Based on generalized effective rheological parameters, an approach for the quantitative assessment of mixing energy efficiency is formulated.

A formalized algorithm for the comprehensive application of mechanico-rheological models is proposed, incorporating parameter identification, kinematic modeling, calculation of local dissipation, and energetic integration. The algorithm enables prediction of the behavior of feed mixtures and selection of rational mixing regimes for various types of mixing equipment.

Keywords: *rheological regimes, yield criteria, energy metrics of mixing, specific dissipation power; local stresses, kinematic shear conditions, algorithmic modeling.*

Відомості про автора

Купчук Ігор Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки та технологічних процесів в АПК, інженерно-технологічний факультет, Вінницький національний аграрний університет (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: kupchuk.igor@i.ua; <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).

Kupchuk Ihor – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Associate Professor of the Department of Engineering Mechanics and Technological Processes in the Agricultural Industry, Faculty of Engineering and Technology, Vinnytsia National Agrarian University (3, Sonychna St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: kupchuk.igor@i.ua; <http://orcid.org/0000-0002-2973-6914>).

Стаття надійшла 30.09.2025

Стаття прийнята 10.10.2025

Опубліковано 25.12.2025