**Дмитрів В.Т.**

д.т.н., професор

Берегуляк С.Т.здобувач освітнього ступеня
доктора філософії**Національний****університет «Львівська
політехніка»****Dmytriv V.**Doctor of Technical Sciences,
Professor**Berehuliak S.**

recipient of the PhD degree

**Lviv Polytechnic National
University****УДК 623.438****DOI: 10.37128/2306-8744-2025-3-4**

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНО-ДЕМПФЕРНОЇ СИСТЕМИ

В роботі розглянуто метод зменшення кількості факторів для проведення планованого факторного експерименту на основі використання теорії розмірності. Факторний простір перетворюють у безрозмірні критерії.

Метою дослідження є розроблення критеріальних залежностей для обчислювального експерименту за результатом моделювання амплітуди коливання підпружиненої маси пружно-демпферної системи за негармонійного збудовального імпульсу сили заданої амплітуди і тривалості.

Приведено приклад перетворення факторів у безрозмірні критерії. Перетворення багатфакторного простору планованого експерименту показано на прикладі пружно-демпферної системи. Процес підпорядкували методу пропорційності і комбінації чисел подібності через рівняння зв'язків: $A_{m1} = \Phi(m_1, m_2, F(t), K_{pr}, K_{damp}, t_{rl}, g)$, де m_1 – підпружинена маса, кг; m_2 – непідпружинена маса, кг; $F(t)$ – сила збудження пружно-демпферної системи, Н; K_{pr} – коефіцієнт пружності, Н/м; K_{damp} – коефіцієнт демпфування, Н·с/м; t_{rl} – час релаксації (затухання імпульсу коливання), с; g – пришвидшення вільного падіння, м/с². Для зменшення кількості критеріїв подібності як безрозмірних факторів, прийнято спрощення у вигляді співвідношення критеріїв які однакові за характером. В рівнянні зв'язків перша складова є відношення мас, що характеризує силове навантаження на систему, друга складова – відношення між енергією коливання і енергією затухання коливань що характеризує сталу часу відновлення рівноваги мас системи, третя складова має фізичний зміст імпульсу збудовальної сили. Імпульс збудовальної сили, що діє на непідпружинену масу, прийняли $F(t) = 500$ Н. Підпружинену і непідпружинену маси, коефіцієнти пружності і демпфування прийняли в межах, що відповідає реальним пружно-демпферним системам: $m_1 = 400 \dots 1000$ кг; $m_2 = 40 \dots 50$ кг; $K_{pr} = 20 \dots 40$ кН/м; $K_{damp} = 2 \dots 2,5$ кН·с/м; тривалість затухання коливання прийняли $t_{rl} = 1$ с.

Аналіз відхилення між результатами моделювання амплітуди коливання і результатами розрахунку за регресійною моделлю на основі обчислювального експерименту не перевищують 5 %.

Ключові слова: амплітуда коливання, коефіцієнт пружності, демпфер, маса підпружинена, обчислювальний експеримент, матриця планування, фактор, рівняння регресії.



Вступ. Ідентифікація коливних систем до яких відносяться пружно-демпферні системи, є на сьогодні затребуваним з позиції розвитку транспортних засобів. Пружні підвіски транспортних засобів, незалежно від виду транспортної системи і конструкції підвісок, мають елементи пружності і демпфування. Пружність регламентує масу підпружиненої частини конструкції транспортного засобу. Використання демпфера в типовій конфігурації між підресореними та непідресореними масами в одних ситуаціях допомагає гасити коливання, а в інших – викликає їх. Для їх аналізу застосовують вхідні тестові сигнали імпульсні у вигляді дельта-функції Дірака, ступінчастого сигналу у вигляді функції Хевісайда, або гармонійного сигналу різної частоти. Відповідно стенди для діагностування пружно-демпферних систем використовують такий тип силового навантаження.

Необхідність зміни способу роботи пружно-демпферної системи в різних ситуаціях вимагає адаптивної системи, що обумовлює створення активної або напівактивної систем, відповідно керування пружністю або демпфуванням, чи в поєднання і пружністю і демпфуванням. Однак різноманітність пружно-демпферних систем, зокрема в транспортних засобах, вимагає наявності математичних залежностей, які б можна було застосувати в цифрових системах керування, що уможливить адаптувати параметри коливання до умов роботи системи.

Це вимагає розроблення математичних моделей параметрів пружно-демпферної системи, які є зрозумілі і ефективні для програмування цифрових систем керування пружно-демпферною системою в процесі її функціонування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Аналітичні моделі, як правило, базуються на спрощеннях і вони можуть схильні до помилок. Було виявлено відмінності між результатами експериментів і результатами, отриманими за допомогою елементарних співвідношень для статичних характеристик циліндричних гвинтових пружин стиску [1]. Крім того, співвідношення жорсткості пружин, доступні в літературі, характеризуються достатньою точністю лише для пружин з числом витків не менше п'яти [2]. Проаналізовано вплив кінцевих витків на власні частоти поздовжніх коливань [3]. Досліджували використання демпфера та пружини для підвіски двигуна в колесі та формування системи динамічного амортизатора коливань, яка може одночасно покращити комфорт їзди та зменшити вібрацію двигуна в колесі порівняно з традиційною системою підвіски [4, 5]. Xu et al. досліджували демпфуючі властивості в'язкопружних демпферів з різними

в'язкопружними матеріалами [6, 7]. Sato et al. [8] запропонували метод оцінки практичного застосування в'язкопружних демпферів у контролі вібрації вітру, використовуючи еквівалентні синусоїдальні форми хвиль тривалої тривалості випадкових збуджень у вздовжньому та поперечному напрямках вітру. Lu et al. [9] досліджували конститутивний зв'язок в'язкопружних матеріалів, враховуючи ефект тертя окремих молекулярних ланцюгів з навколишнього середовища на мікрорівні.

Для дослідження пружно-демпферних систем, як правило, застосовуються стенди, які створюють імпульсні навантаження у вигляді коливань заданої частоти і амплітуди. Характеристики створюваних навантажень у вигляді коливань вивчали в роботі [10]. Встановлювали вплив зміни демпфування на амплітуду коливання системи. Доведено що поєднання експерименту і моделювання при різних значеннях демпфування проводять оцінку його значення [11].

Динамічні характеристики в'язкопружних демпферів демонструють характеристику зі зміною частоти та амплітуди зміщення навантаження.

Мета та завдання дослідження.

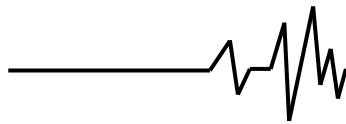
Розробити критеріальні залежності та провести обчислювальний експеримент пружно-демпферної системи за негармонійного впливу на коливну систему імпульсу сили заданої амплітуди і тривалості, що уможливить на основі кореляційної залежності реалізацію адаптивної пружно-демпферної системи.

Виклад основного матеріалу.

Аналізуючи теоретичні і експериментальні дослідження дослідників можна зробити висновок, що в теорії планування експерименту найбільш важливим є вибір параметрів процесу. Прийняті параметри повинні відображати всі основні фактори технологічного процесу, і їх число повинно бути мінімальним для планованого експерименту. Зменшення кількості факторів зменшує кількість дослідів і підвищує достовірність критерію відгуку.

Перетворення факторного простору методами теорії розмірності. Розмірність факторного простору залежить від числа факторів, тому для спрощення задачі скористаємося методами теорії розмірності, а саме π-теореми. Суть цієї теореми полягає в тому, що вся сукупність факторів може бути згрупована в безрозмірні критерії подібності $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$ [12 – 14].

Застосування методів теорії подібності й розмірності, критеріальних величин, як проміжної складової між теорією і експериментом, забезпечує функціональний зв'язок між цілими комплексами величин, які характеризують процес на рівні фізичної моделі [15]. Вся сукупність



факторів згрупована в безрозмірні критерії подібності. Для знаходження цих величин вибираємо основні одиниці вимірювання і через них - розмірність всіх інших величин. Наприклад, кількість факторів є n величин, а r - число величин, що мають незалежні розмірності, отримаємо $n - r$ критеріїв подібності. Вибрані критерії знаходяться у визначеній залежності.

Всі виділенні параметри повинні мати фізичний зміст і бути керованими в ході експерименту, відповідати вимогам сумісності і незалежності. Правильність вибору даних параметрів підтверджується визначником, що складається з розмірностей цих параметрів, який не повинен дорівнювати нулю.

Розглянемо перетворення багатофакторного простору планованого експерименту на прикладі пружно-демпферної системи. Процес можна підпорядкувати методу пропорційності і комбінації чисел подібності через рівняння зв'язків:

$$A_{m1} = \Phi(m_1, m_2, F(t), K_{pr}, K_{damp}, t_{rl}, g) \quad (1)$$

де m_1 - підпружинена маса, кг; m_2 - непідпружинена маса, кг; $F(t)$ - сила збурення пружно-демпферної системи, Н; K_{pr} - коефіцієнт пружності, Н/м; K_{damp} - коефіцієнт демпфування, Н·с/м; t_{rl} - час релаксації (затухання імпульсу коливання); с; g - прискорення вільного падіння, м/с².

$$A_{m1} = \Phi \left(\frac{K_{pr}^{\alpha s} \cdot K_{damp}^{\gamma s} \cdot F(t)^{\lambda s}}{m_1}; \frac{K_{pr}^{\alpha h} \cdot K_{damp}^{\gamma h} \cdot F(t)^{\lambda h}}{m_2}; \frac{K_{pr}^{\alpha d} \cdot K_{damp}^{\gamma d} \cdot F(t)^{\lambda d}}{t_{rl}}; \frac{K_{pr}^{\alpha \mu} \cdot K_{damp}^{\gamma \mu} \cdot F(t)^{\lambda \mu}}{g} \right) \quad (2)$$

Коефіцієнти $\alpha s, \dots, \gamma h, \dots, \lambda \mu$ визначаються з умови, що кожен комплекс є безрозмірною величиною. Значення $\alpha s, \gamma s, \lambda s$ визначаємо так:

$$\frac{K_{pr}^{\alpha s} \cdot K_{damp}^{\gamma s} \cdot F(t)^{\lambda s}}{m_1} = \frac{(M^1 \cdot T^{-2})^{\alpha s} \cdot (M^1 \cdot T^{-1})^{\gamma s} \cdot (M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2})^{\lambda s}}{M^1} = M^{\alpha s + \gamma s + \lambda s - 1} \cdot T^{-2\alpha s - \gamma s - 2\lambda s} \cdot L^{\lambda s} = 1 \quad (3)$$

З рівності (3) складаємо систему рівнянь зі степеневих виразів і розв'язуємо, знаходячи значення степенів при їх параметрах

$$\begin{cases} \alpha s + \gamma s + \lambda s - 1 = 0 \\ -2\alpha s - \gamma s - 2\lambda s = 0 \\ \lambda s = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha s = -1 \\ \gamma s = 2 \\ \lambda s = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Критерій подібності для підпружиненої маси визначається відношенням:

$$\pi_{m1} = \frac{K_{damp}^2}{m_1 \cdot K_{pr}} \quad (5)$$

Аналогічно для інших критеріїв знаходимо значення показників і записуємо відношення для інших критеріїв подібності:

$$\pi_{m2} = \frac{K_{damp}^2}{m_2 \cdot K_{pr}}, \pi_{trl} = \frac{t_{rl} \cdot K_{pr}}{K_{damp}}, \pi_g = \frac{F(t) \cdot K_{pr}}{K_{damp}} \quad (6)$$

Для зменшення кількості критеріїв подібності як безрозмірних факторів, спростуємо у вигляді співвідношення критеріїв які однакові за характером:

Для знаходження цих величин вибираємо основні одиниці вимірювання і через них виразимо розмірність всіх інших величин. В даному випадку $n = 7$ величин, а $r = 3$ - число величин, що мають незалежні розмірності, отримаємо $n - r = 4$ критерії подібності. Вибрані критерії знаходяться в визначеній залежності. Основні одиниці розмірності: маса, довжина, час (Табл. 1). Основними параметрами коливання є $K_{pr}, K_{damp}, F(t)$.

Таблиця 1 - Розмірність параметрів рівняння коливання пружно-демпферної системи

Параметри	m_1	m_2	$F(t)$	K_{pr}	K_{damp}	t_{rl}	g
M	1	1	1	1	1	0	0
L	0	0	1	0	0	0	1
T	0	0	-2	-2	-1	1	-2

Правильність вибору параметрів підтверджує визначник, що складається з розмірності цих параметрів, які не повинні дорівнювати нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} M & F(t) & K_{pr} & K_{damp} \\ L & 1 & 1 & 1 \\ T & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

З урахуванням вибору основних одиниць рівняння (1) можна записати у вигляді:

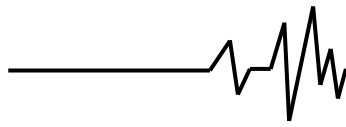
$$\pi_m = \frac{\pi_{m2}}{\pi_{m1}} = \frac{m_1}{m_2} \quad (7)$$

Підставимо взамін параметрів в рівнянні (1) критерії:

$$A_{m1} = \Phi \left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{t_{rl} \cdot K_{pr}}{K_{damp}}, \frac{F(t) \cdot K_{pr}}{K_{damp}^2 \cdot g} \right) \quad (8)$$

В рівнянні (8) перша складова є відношення мас, що характеризує силове навантаження на систему, друга складова - відношення між енергією коливання і енергією затухання коливань що характеризує сталу часу відновлення рівноваги мас системи, третя складова має фізичний зміст імпульсу збурювальної сили.

Результати обчислювального експерименту. Розглянемо характер зміни амплітуди коливання пружно-демпферної системи за наступних вхідних параметрів. Імпульс збурювальної сили, що діє на непідпружинену масу, прийняли $F(t) = 500$ Н.



Підпружинену і непідпружинену маси, коефіцієнти пружності і демпфування прийняли в межах, що відповідає реальним пружно-демпферним системам [16 – 29]: $m_1 = 400 \dots 1000$ кг; $m_2 = 40 \dots 50$ кг; $K_{pr} = 20 \dots 40$ кН/м; $K_{damp} = 2 \dots 2,5$ кН·с/м; тривалість

затухання амплітуди коливання прийняли $t_{rl} = 1$ с. Обчислювальний експеримент провели на рівні двофакторного експерименту (табл. 2). Імпульс збурювальної сили залишався сталим на рівні 500 Н, його як фактор не застосовували.

Таблиця 2 - Рівні варіювання факторів

Фактор	Позна-чення	Критерій подібності	Рівні факторів			Інтервал варіування
			верхній	нульовий	нижній	
			значення коду			
			+ 1	0	- 1	
π_m	x_1	m_1/m_2	20	15	10	5
π_{trl}	x_2	$\frac{t_{rl} \cdot K_{pr}}{K_{damp}}$	15	12,5	10	2,5

Для дослідження впливу даних факторів, згідно з матриці експерименту (Табл. 3), моделювання проводили згідно наведеної аналітичної моделі за наведеною методикою [21].

Для того, щоб матриця планування мала властивість ортогональності, вводимо стовпчик в таблиці 3 з коректованими значеннями рівня x' , яке розраховуємо за формулою [22]

$$(x'_i)^2 = x_i^2 - \frac{\sum x_i^2}{N}. \quad (9)$$

Матриця плану подано в таблиці 3, в якій стовпці 2-6 складають ортогональну матрицю планування, стовпчик 7 – значення відгуку експерименту. Коефіцієнти рівняння регресії приведено в таблиці 4.

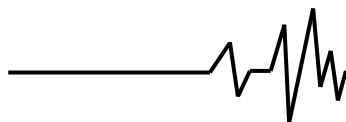
Таблиця 3 - Матриця ортогонального двофакторного плану другого порядку

№ дос.	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$(x'_1)^2$	$(x'_2)^2$	$y(A_{m1}), m$
1	2	3	4	5	6	7
1	+1	-1	-1	0.3333	0.3333	0,0093
2	+1	0	0	0.3333	-0.6667	0,0074
3	+1	+1	+1	0.3333	0.3333	0,0055
4	0	-1	0	-0.6667	0.3333	0,012
5	0	0	0	-0.6667	-0.6667	0,0097
6	0	+1	0	-0.6667	0.3333	0,0081
7	-1	-1	+1	0.3333	0.3333	0,0165
8	-1	0	0	0.3333	-0.6667	0,0134
9	-1	+1	-1	0.3333	0.3333	0,0098
Σ	6	6	4	-	-	-

Таблиця 4 - Результати розрахунків коефіцієнтів рівняння регресії

Коефіцієнти рівняння	Коефіцієнти	
	Кодовані	натуральні
b0	0,01018	0,0424
b1	-0,00293	-0,00139
b2	-0,0024	0,00182
b12	0,00071	$5,7 \cdot 10^{-5}$
b11	$7,883 \cdot 10^{-5}$	$3,153 \cdot 10^{-6}$
b22	$6 \cdot 10^{-8}$	$9,6 \cdot 10^{-9}$

Рівняння регресії в натуральних значеннях при $t_{rl} = 1$ с, має вигляд:



$$A_{m1} = 0,0424 - 0,00139 \cdot \frac{m_1}{m_2} + \frac{0,00182 \cdot K_{pr}}{K_{damp}} + 5,7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{m_1 \cdot K_{pr}}{m_2 \cdot K_{damp}} + 3,153 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 9,6 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{K_{pr}}{K_{damp}}\right)^2. \quad (10)$$

Графічне представлення рівняння регресії (10) подано у вигляді тривимірної площини (рис. 1).

В таблиці 5 приведено амплітуди коливання підпружиненої маси, отримані за результатами моделювання аналітичною залежністю [21] і розраховані регресійною залежністю (10). Параметри змінних в залежностях відповідали значенням наведених вище і не виходили за означені межі.

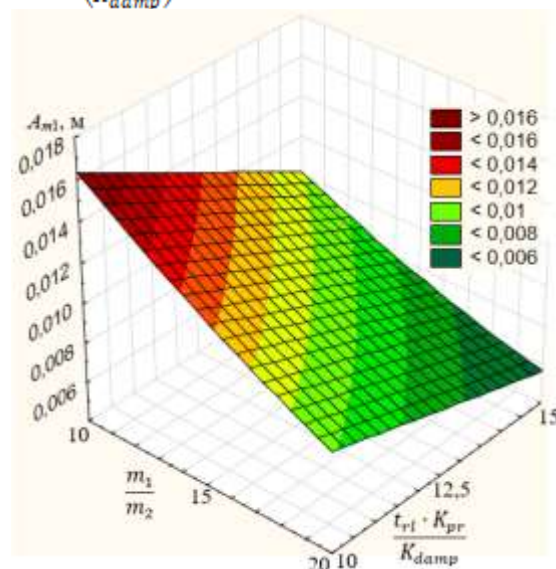


Рис. 1. 3D модель амплітуди коливання підпружиненої маси пружно-демпферної системи у функції від безрозмірних критеріїв

Таблиця 5 - Результати обчислювального експерименту і моделювання амплітуди коливання пружно-демпферної системи

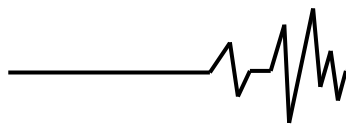
Рівні факторів		Амплітуда коливання підпружиненої маси A_{m1}			
x_1	x_2	розрахунок, р-ня (10), м	модель [21], м	відхилення, м	відхилення, %
+1	-1	0,00902	0,0093	-0,00028	3,01
+1	0	0,00733	0,0074	-0,00007	0,95
+1	+1	0,00564	0,0055	0,00014	2,55
0	-1	0,01258	0,012	0,00058	4,83
0	0	0,01018	0,0097	0,00048	4,95
0	+1	0,00778	0,0081	-0,00032	3,95
-1	-1	0,0163	0,0165	-0,0002	1,21
-1	0	0,01319	0,0134	-0,00021	1,57
-1	+1	0,01007	0,0098	0,00027	2,76

Отримані значення амплітуди коливання підпружиненої маси в метрах. Тому після коми значення брали до п'ятого знаку після коми. Для оцінки отриманих амплітуд коливання підпружиненої маси визначали відхилення в абсолютних значеннях і у відсотках до результатів аналітичної моделі.

Аналіз відхилення між результатами моделювання амплітуди коливання і результатами розрахунку за регресійною моделлю на основі обчислювального експерименту не перевищують 5 %. Площина графічної моделі наближається до лінійної залежності.

Висновки та перспективи подальших досліджень. За результатами аналітичного моделювання проведення обчислювального експерименту з використанням безрозмірних критеріїв уможливило підвищити ефективність застосування отриманих регресійних залежностей в цифрових системах керування, що актуально для адаптивної пружно-демпферної системи.

Регресійні моделі з безрозмірними факторами дозволяють аналізувати характер параметра відгуку, вплив як фізичних параметрів

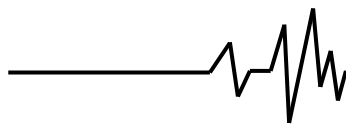


так і безрозмірних критеріїв, виведених на основі теорії розмірності.

Для аналізу фізичної стабільності параметру відгуку доцільно провести фізичний планований факторний експеримент з розрахунком безрозмірних критеріїв як факторів і вивести регресійну модель для порівняння результатів.

Список використаних джерел

1. Yildirim V. Exact Determination of the Global Tip Deflection of both Close-Coiled and Open-Coiled Cylindrical Helical Compression Springs having Arbitrary Doubly-Symmetric Cross-Sections. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016;115–116: 280–298. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.022>
2. Paredes M. Enhanced Formulae for Determining Both Free Length and Rate of Cylindrical Compression Springs. *Journal of Mechanical Design*. 2016;138(2): 021404. <https://doi.org/10.1115/1.4032094>
3. Liu H., Kim D. Effects of end Coils on the Natural Frequency of Automotive Engine Valve Springs. *International Journal of Automotive Technology*. 2009;10(4): 413–420. <https://doi.org/10.1007/s12239-009-0047-8>
4. Liu M, Gu F, Zhang Y (2017) Ride comfort optimization of in-wheel-motor electric vehicles with in-wheel vibration absorbers. *Energies* 10(10): 1647. <https://doi.org/10.3390/en10101647>
5. Qin Y, He C, Ding P, et al. (2018) Suspension hybrid control for in-wheel motor driven electric vehicle with dynamic vibration absorbing structures. *IFAC-PapersOnLine* 51(31): 973–978. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.10.054>
6. Xu, Z.D.; Xu, C.; Hu, J. Equivalent fractional Kelvin model and experimental study on viscoelastic damper. *J. Vib. Control*. 2015, 21, 2536–2552. <https://doi.org/10.1177/1077546313513604>
7. Xu, Z.D.; Liao, Y.X.; Ge, T.; Xu, C. Experimental and theoretical study on viscoelastic dampers with different matrix rubbers. *J. Eng. Mech. ASCE* 2016, 142, 04016051. [https://ascelibrary.org/doi/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001101](https://ascelibrary.org/doi/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001101)
8. Sato, D.; Osabel, D.M.; Kasai, K. Evaluation method for practical application of viscoelastic damper using equivalent sinusoidal waveforms of long-duration random excitations in along- and across-wind directions. *Eng. Struct.* 2022, 254, 113735. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113735>
9. Lu, D.; Xue, B.; Cao, Y.; Chen, B. Constitutive theory for direct coupling of molecular frictions and the viscoelasticity of soft materials. *J. Appl. Mech. ASME* 2022, 89, 051007. <https://doi.org/10.1115/1.4053728>
10. Дитят'єв О.В. Щодо питання вибору типу вібростенду для діагностування для діагностування підвіски автомобіля. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2023. Вип. 2(21). С. 91-100. DOI: 10.36910/automash.v2i21.1213
11. Дитят'єв О.В. Вплив нетестованого колеса осі на похибку визначення демпфування колеса, що тестується методом EuSaMA. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2024. Вип. 1(22). С. 139-146. DOI: 10.36910/automash.v1i22.1354
12. Sonin A.A. The Physical Basis of Dimensional Analysis. 2nd Edition, Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge. 2001. <http://goo.gl/2BaQM6>
13. Shen W., and Lin D. K. J. Statistical theories for dimensional analysis, *Statistica Sinica*. 2019, 29(2), pp. 527–550. <https://www.jstor.org/stable/26705477>
14. Albrecht M. C., Albrecht T. A., Nachtsheim C. J. and Cook R. D. Experimental Design for Engineering Dimensional Analysis, *Technometrics*. 2013, 55(3), 257–270. <http://www.jstor.org/stable/24587346>
15. Dmytriv V.T., Dmytriv I.V., Horodetskyi I.M., Horodniak R.V., Dmytriv T.V. Method of theory of dimensions in experimental research of systems and processes. *INMATEH - Agricultural Engineering*. 2021, 65(3), 233 - 240. DOI: 10.35633/INMATEH-65-24
16. Genove J., Tashkov S., Traykov B., Arnaudov K., Venkov G. Analysis and control laws of semi-active vehicle suspension systems with rendering an account of the physical characteristics of magneto-rheological dampers. *The International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering*. 2008. 13(13). 15-31. DOI: 10.21608/amme.2008.39370
17. Hyniova K. Experiments Taken on Energy Management in Active Suspension of Vehicles. *WSEAS Transactions on Systems*. 2012, 11(8), 326-335.
18. Jesus Lozoya-Santos J., Morales-Menendez R., Tudón-Martínez J. C., Sename O., Dugard L., Ramirez-Mendoza R. Control Strategies for an Automotive Suspension with a MR Damper. *Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano (Italy)*, 2011, 1820-1825. <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.03641>
19. Tao, Y., Rui, X.; Liu, F.; Shan, J.; Zhang, J. Analysis of the Vibration Characteristics of a Moving Tracked Vehicle Considering the Powertrain Magnetorheological Damping System. *Appl. Sci.* 2025, 15, 8997. <https://doi.org/10.3390/app15168997>
20. Zhang, H., Wang, E., Min, F., Subash R., Su C. Skyhook-based semi-active control of full-vehicle suspension with magneto-rheological dampers. *Chin. J. Mech. Eng.* 2013, 26, 498–505. <https://doi.org/10.3901/CJME.2013.03.498>



21. Dmytriv V., Berehuliak S. a mathematical model of an elastic-damper system based on the example of a kelvin-voigt body. *Vibrations in engineering and technology*. 2025, 2(17), 30-38. DOI: 10.37128/2306-8744-2025-2-3

22. Dmytriv V.T., Dmytriv I.V., Yatsunskyi P.P. Experimental pulse generator combined with the milking machine collector, *INMATEH - Agricultural Engineering*. 2019, 59(3), 219-226. DOI: 10.35633/INMATEH-59-24

References

1. Yildirim V. Exact Determination of the Global Tip Deflection of both Close-Coiled and Open-Coiled Cylindrical Helical Compression Springs having Arbitrary Doubly-Symmetric Cross-Sections. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016;115–116: 280–298. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.022>

2. Paredes M. Enhanced Formulae for Determining Both Free Length and Rate of Cylindrical Compression Springs. *Journal of Mechanical Design*. 2016;138(2): 021404. <https://doi.org/10.1115/1.4032094>

3. Liu H., Kim D. Effects of end Coils on the Natural Frequency of Automotive Engine Valve Springs. *International Journal of Automotive Technology*. 2009;10(4): 413–420. <https://doi.org/10.1007/s12239-009-0047-8>

4. Liu M, Gu F, Zhang Y (2017) Ride comfort optimization of in-wheel-motor electric vehicles with in-wheel vibration absorbers. *Energies* 10(10): 1647. <https://doi.org/10.3390/en10101647>

5. Qin Y, He C, Ding P, et al. (2018) Suspension hybrid control for in-wheel motor driven electric vehicle with dynamic vibration absorbing structures. *IFAC-PapersOnLine* 51(31): 973–978. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.10.054>

6. Xu, Z.D.; Xu, C.; Hu, J. Equivalent fractional Kelvin model and experimental study on viscoelastic damper. *J. Vib. Control*. 2015, 21, 2536–2552. <https://doi.org/10.1177/1077546313513604>

7. Xu, Z.D.; Liao, Y.X.; Ge, T.; Xu, C. Experimental and theoretical study on viscoelastic dampers with different matrix rubbers. *J. Eng. Mech. ASCE*. 2016, 142, 04016051. [https://ascelibrary.org/doi/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001101](https://ascelibrary.org/doi/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001101)

8. Sato, D.; Osabel, D.M.; Kasai, K. Evaluation method for practical application of viscoelastic damper using equivalent sinusoidal waveforms of long-duration random excitations in along- and across-wind directions. *Eng. Struct.* 2022, 254, 113735. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113735>

9. Lu, D.; Xue, B.; Cao, Y.; Chen, B. Constitutive theory for direct coupling of molecular frictions and the viscoelasticity of soft materials. *J.*

Appl. Mech. ASME 2022, 89, 051007. <https://doi.org/10.1115/1.4053728>

10. Dityatyev O. About the question of selection of the type of vibrostan for diagnostics of vehicle suspension. *Suchasni tehnologii v mashinobuduvanni ta transporti*. 2023, 2(21), 91-100. DOI: 10.36910/automash.v2i21.1213

11. Dityatyev O. The influence of an untested axle wheel on the error of determining the damping of a wheel tested by the eusama method EuSaMA. *Suchasni tehnologii v mashinobuduvanni ta transporti*. 2024, 1(22), 139-146. DOI: [10.36910/automash.v1i22.1354](https://doi.org/10.36910/automash.v1i22.1354)

12. Sonin A.A. The Physical Basis of Dimensional Analysis. 2nd Edition, Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge. 2001. <http://goo.gl/2BaQM6>

13. Shen W., and Lin D. K. J. Statistical theories for dimensional analysis, *Statistica Sinica*. 2019, 29(2), pp. 527–550. <https://www.jstor.org/stable/26705477>

14. Albrecht M. C., Albrecht T. A., Nachtsheim C. J. and Cook R. D. Experimental Design for Engineering Dimensional Analysis, *Technometrics*. 2013, 55(3), 257–270. <http://www.jstor.org/stable/24587346>

15. Dmytriv V.T., Dmytriv I.V., Horodetskyi I.M., Horodniak R.V., Dmytriv T.V. Method of theory of dimensions in experimental research of systems and processes. *INMATEH - Agricultural Engineering*. 2021, 65(3), 233 - 240. DOI: 10.35633/INMATEH-65-24

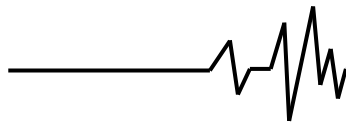
16. Genove J., Tashkov S., Traykov B., Arnaudov K., Venkov G. Analysis and control laws of semi-active vehicle suspension systems with rendering an account of the physical characteristics of magneto-rheological dampers. *The International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering*. 2008. 13(13). 15-31. DOI: [10.21608/amme.2008.39370](https://doi.org/10.21608/amme.2008.39370)

17. Hyniova K. Experiments Taken on Energy Management in Active Suspension of Vehicles. *WSEAS Transactions on Systems*. 2012, 11(8), 326-335.

18. Jesus Lozoya-Santos J., Morales-Menendez R., Tudón-Martínez J. C., Sename O., Dugard L., Ramirez-Mendoza R. Control Strategies for an Automotive Suspension with a MR Damper. *Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011*, 1820-1825. <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.03641>

19. Tao, Y., Rui, X.; Liu, F.; Shan, J.; Zhang, J. Analysis of the Vibration Characteristics of a Moving Tracked Vehicle Considering the Powertrain Magnetorheological Damping System. *Appl. Sci.* 2025, 15, 8997. <https://doi.org/10.3390/app15168997>

20. Zhang, H., Wang, E., Min, F., Subash R., Su C. Skyhook-based semi-active control of full-vehicle suspension with magneto-rheological



dampers. *Chin. J. Mech. Eng.* 2013, 26, 498–505. <https://doi.org/10.3901/CJME.2013.03.498>

21. Dmytriv V., Berehuliak S. a mathematical model of an elastic-damper system based on the example of a kelvin-voigt body. *Vibrations in engineering and technology*. 2025, 2(17), 30-38. DOI: 10.37128/2306-8744-2025-2-3

22. Dmytriv V.T., Dmytriv I.V., Yatsunskyi P.P. Experimental pulse generator combined with the milking machine collector, *INMATEH - Agricultural Engineering*. 2019, 59(3), 219-226. DOI: 10.35633/INMATEH-59-24

COMPUTATIONAL EXPERIMENT IN MODELING OSCILLATIONS OF AN ELASTIC-DAMPER SYSTEM

The paper considers a method for reducing the number of factors for conducting a planned factorial experiment based on the use of dimensionality theory. The factor space is converted into dimensionless criteria.

The purpose of the study is to develop criterion dependencies for a computational experiment based on the results of modeling the amplitude of oscillations of a sprung mass of an elastic-damper system under a non-harmonic disturbing force pulse of a given amplitude and duration.

An example of transforming factors into dimensionless criteria is given. The transformation of the multifactor space of the planned experiment is shown on the example of an elastic-damper system. The process was subjected to the method of proportionality and a combination of similarity numbers through the equation of relations:

$A_{m1} = \Phi(m_1, m_2, F(t), K_{pr}, K_{damp}, t_{r1}, g)$, where m_1 - the sprung mass, kg; m_2 - the unsprung mass, kg; $F(t)$ - the perturbation force of the elastic-damper system, N; K_{pr} - the elasticity coefficient, N/m; K_{damp} - the damping coefficient, N·s/m; t_{r1} - the relaxation time (damping of the oscillation pulse), s; g - the acceleration of free fall, m/s². To reduce the number of similarity criteria as dimensionless factors, a simplification was adopted in the form of a ratio of criteria that are the same in nature. In the equation of relations, the first component is the ratio of masses, which characterizes the force load on the system, the second component is the ratio between the energy of oscillation and the energy of oscillation damping, which characterizes the time constant for restoring the equilibrium of the masses of the system, the third component has the physical content of the impulse of the disturbing force. The impulse of the disturbing force acting on the unsprung mass was taken to be $F(t) = 500$ N. The sprung and unsprung masses, the coefficients of elasticity and damping were taken within the limits corresponding to real elastic-damping systems: $m_1 = 400 \dots 1000$ kg; $m_2 = 40 \dots 50$ kg; $K_{pr} = 20 \dots 40$ KN/m; $K_{damp} = 2 \dots 2.5$ KN·s/m; the duration of the oscillation damping was taken to be $t_{r1} = 1$ s.

Analysis of the deviation between the results of the simulation of the amplitude of oscillations and the results of the calculation by the regression model based on the computational experiment does not exceed 5%.

Keywords: amplitude of oscillation, coefficient of elasticity, damper, sprung mass, computational experiment, planning matrix, factor, regression equation.

Відомості про авторів

Дмитрів Василь Тарасович - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою проєктування машин та автомобільного інжинірингу, Національний університет «Львівська політехніка», 79013, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, Україна, e-mail: Vasyl.T.Dmytriv@lpnu.ua, <https://orcid.org/0000-0001-9361-6418>

Берегуляк Степан Тарасович – здобувач освітнього ступеня доктора філософії кафедри проєктування машин та автомобільного інжинірингу, Національний університет «Львівська політехніка», 79013, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, Україна, e-mail: Stepan.T.Berehuliak@lpnu.ua, <https://orcid.org/0009-0005-6597-9752>

Dmytriv Vasyl - Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of Department of Desing Machine and Automotive Engineering, Lviv Polytechnic National University, 79013, 12 Stepan Bandera Str., Lviv, Ukraine, e-mail: Vasyl.T.Dmytriv@lpnu.ua, <https://orcid.org/0000-0001-9361-6418>

Berehuliak Stepan - recipient of the PhD degree of Department of Desing Machine and Automotive Engineering, Lviv Polytechnic National University, 79013, 12 Stepan Bandera Str., Lviv, Ukraine, e-mail: Stepan.T.Berehuliak@lpnu.ua, <https://orcid.org/0009-0005-6597-9752>

Стаття надійшла 15.09.2025

Стаття прийнята 30.10.2025

Опубліковано 25.12.2025