**Бєлих О. В.**

аспірант

**Державний
біотехнологічний
університет****Belykh O.**

postgraduate student

**State Biotechnological
University****УДК 531.3:534.83:621.928:638.1****DOI: 10.37128/2306-8744-2025-4-17****МЕХАНІКА УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ
ГРАНУЛИ ПЕРГИ З РОБОЧИМИ
ЕЛЕМЕНТАМИ РОТОРНОГО
ПРИСТРОЮ**

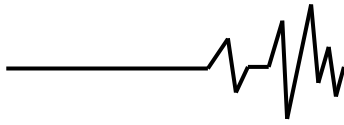
У статті досліджено механіку ударної взаємодії гранули перги з робочими елементами роторного пристрою, призначеного для її відокремлення від восково-пергової маси у технологіях переробки продуктів бджільництва. Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення енергоефективності та технологічної надійності процесів механічної обробки біологічних матеріалів за умови збереження їх природної структури та біологічної цінності. Метою дослідження є розроблення теоретичної моделі імпульсно-контактної взаємодії гранули перги з поверхнею молотка та встановлення закономірностей її післяударного руху в полі інерційних сил роторного механізму. У роботі використано методи класичної механіки твердого тіла, теорії удару та математичного моделювання в обертовій системі координат. Виведено рівняння руху гранули у фазі контакту та на етапі післяударного переміщення з урахуванням відцентрових, коріолісових, гравітаційних і тертявих сил. Отримано аналітичний опис траєкторії руху гранули в рухомій і нерухомій системах координат. Проаналізовано вплив кутового положення та швидкості обертання ротора, маси молотка й положення точки удару на кінематичні характеристики руху та енергетичні втрати системи. Показано, що збільшення маси молотка понад оптимальне значення не забезпечує пропорційного зростання енергії, переданої гранулі, і призводить до істотного зниження ефективності удару внаслідок його нееластичного характеру. Отримані результати дозволяють визначати раціональні режими ударної взаємодії, які забезпечують ефективну сепарацію гранул перги за мінімального рівня їх руйнування. Розроблена математична модель може бути використана для параметричної оптимізації роторних пристроїв для переробки продуктів бджільництва, а також для аналізу ударної динаміки в інших технологічних системах, що працюють із гранульованими та біологічно неоднорідними матеріалами.

Ключові слова: перга, гранула, удар, ротор, молоток, контактна взаємодія, енергоефективність, траєкторія руху, сепарація.

Вступ. Одним із перспективних напрямів розвитку технічного бджільництва є механізація процесів переробки та відділення продуктів життєдіяльності бджіл із комірок стільників. Особливої уваги потребує процес вилучення перги — біологічно цінного продукту, який утворюється внаслідок ферментації пилку та є основною білковою складовою кормової бази бджолоїної сім'ї. Традиційні технології

видобування перги базуються переважно на термічних або ручних методах, які призводять до часткового руйнування гранул, зниження якості продукту та збільшення енерговитрат. Тому виникає необхідність у створенні енергоощадних технологій механічного відокремлення перги, що забезпечують цілісність її гранул і збереження природних властивостей.

Одним із найефективніших способів



відділення перги є використання роторних пристроїв ударно-контактного типу, у яких здійснюється взаємодія гранули з робочими елементами — молотками або лопатями ротора. Характер руху гранули в зоні контакту визначає інтенсивність відділення, ступінь її руйнування та енергетичні параметри процесу. Однак сучасні технічні розробки в цій сфері здебільшого ґрунтуються на емпіричних підходах і не враховують складної динаміки удару, впливу інерційних, відцентрових і коріолісових сил, що діють на гранулу під час обертання ротора. Відсутність аналітичного опису цих процесів обмежує можливості оптимізації конструкцій роторних систем.

Поглиблений теоретичний аналіз механіки ударної взаємодії гранули перги з робочими елементами дозволяє визначити закономірності розподілу енергії під час контакту, оцінити ефективність передачі імпульсу та виявити залежності між конструктивними параметрами ротора й поведінкою частинок біоматеріалу. Такий підхід є основою для розроблення енергоощадних технологічних рішень, спрямованих на зниження руйнівних навантажень, продовження ресурсу обладнання та збереження якості кінцевого продукту.

Таким чином, дослідження динаміки ударного процесу та післяударного руху гранули перги в системі «молоток–ротор» має як наукове, так і практичне значення. Воно забезпечує перехід від експериментальних підходів до обґрунтованих теоретичних моделей, що можуть бути використані при проектуванні сучасних машин для переробки бджолопродуктів, а також у суміжних галузях, де об'єктом взаємодії є гранульовані або біологічно неоднорідні матеріали.

Представлене дослідження виконано в межах дисертаційної роботи здобувача ступеня доктора філософії та є складовою частиною прикладної науково-дослідної роботи «Техніко-технологічне обґрунтування напрямку “Міське бджільництво” при університеті», що виконується в Державному біотехнологічному університеті (державний реєстраційний № 0122U002036).

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проблематика механічного відокремлення продуктів бджільництва, зокрема перги, активно розробляється у вітчизняних та зарубіжних наукових центрах. У роботі [1] подано комплексний огляд сучасних технічних рішень для вдосконалення процесів витоплення бджолоного воску, де підкреслено важливість енергоощадних технологій і зниження механічного навантаження на біоматеріал. Ці підходи є релевантними для процесів вилучення перги, оскільки також передбачають оптимальне використання енергії при мінімальному руйнуванні структури продукту. У праці [2] досліджено біологічний контроль вароозу за допомогою мікробних препаратів, що

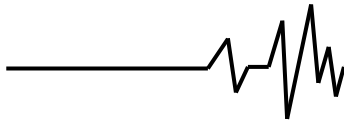
свідчить про загальну тенденцію до екологізації технологій бджільництва та підтверджує необхідність розроблення механічних методів обробки, безпечних для біологічних компонентів продукту. У публікації [3] окреслено історичний розвиток і сучасні напрями технічного бджільництва у ХНТУСГ, де підкреслено значення інженерних досліджень для підвищення продуктивності галузі. Робота [4] присвячена енергоощадним технологіям у виробництві кормів, які за своєю суттю подібні до процесів механічної обробки перги, що також потребують раціонального використання енергії. Біологічні аспекти життєдіяльності бджіл, описані у працях [5; 6], підтверджують доцільність розроблення технологій переробки, що зберігають структуру та біохімічний склад перги.

З точки зору механіки, ударна взаємодія гранули перги з елементами роторного пристрою належить до задач динаміки дискретних тіл і контактної механіки. Основи теоретичного аналізу подібних систем закладено у працях [7–9], де розглянуто поведінку гранул під час зіткнення, закономірності передачі енергії та вплив нееластичності контакту на подальший рух частинок. Результати цих робіт є методологічною основою для побудови математичної моделі удару в системі «молоток–перга».

Подальші дослідження [10; 11] орієнтовані на чисельне моделювання процесів подрібнення в роторних машинах з використанням CFD–DEM підходів, що дозволяють одночасно враховувати механічну взаємодію частинок і вплив повітряного потоку. Застосування таких моделей дало змогу встановити вплив швидкості обертання ротора на траєкторію руху частинок і характер їх зіткнення, що безпосередньо відповідає задачам даної роботи.

Питання навантаження і зношування робочих поверхонь ударних елементів розглядалися у працях [12; 13], де визначено форми контактних напружень та умови рівномірного розподілу енергії удару. Ці результати використовуються для оптимізації геометрії молотків та лопатей роторних механізмів. У роботах [14; 15] досліджено вплив конструктивних і кінематичних параметрів ротора на енергетичні показники процесу, що узгоджується з метою нашого дослідження — визначення умов ефективної передачі енергії гранулі при мінімальному її руйнуванні.

Фізичні аспекти дисипації енергії у гранульованих системах розкрито в роботах [16; 17], де встановлено закономірності затухання коливань після удару, що характеризують нееластичну поведінку частинок. Дослідження [18; 19] присвячені оцінці втрат енергії під час багаторазових ударів у роторних механізмах, а також впливу форми робочої зони на ефективність передачі імпульсу. Узагальнення підходів до



аналізу дискретних середовищ і матеріалів представлено у [21], де наведено сучасні методи моделювання гранульованих систем і визначення їх кінематичних характеристик.

Таким чином, проведений аналіз показує, що існує значна кількість праць, присвячених окремим аспектам механіки гранульованих тіл, енергетики ударних процесів та оптимізації роторних систем. Однак недостатньо вивчено специфіку ударної взаємодії біологічних гранул, зокрема перги, з робочими елементами механізмів, а також відсутні моделі, які комплексно враховують вплив інерційних сил у полі обертання ротора. Це визначає наукову новизну та актуальність представленого дослідження.

Мета та завдання дослідження

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати механіку ударної взаємодії гранули перги з робочими елементами роторного пристрою та встановити закономірності її післяударного руху з урахуванням дії інерційних сил і параметрів ротора.

Для досягнення поставленої мети вирішувались такі **завдання**:

1. Проаналізувати фізичну сутність процесу удару гранули перги з поверхнею молотка та чинники, що впливають на ефективність передачі енергії.
2. Розробити аналітичну модель удару з урахуванням кінематичних параметрів ротора і властивостей матеріалу гранули.
3. Вивести рівняння руху гранули в

обертовій системі координат та визначити залежності її траєкторії від швидкості й кута повороту ротора.

4. Оцінити енергетичні втрати та обґрунтувати оптимальні умови удару, які забезпечують мінімальне руйнування гранули і високу енергоефективність процесу.

Методологічна основа дослідження сформована відповідно до завдань та наукових підходів прикладної науково-дослідної роботи «Техніко-технологічне обґрунтування напрямку "Міське бджільництво" при університеті» (державний реєстраційний № 0122U002036), що виконується під науковим керівництвом Ю. М. Сиромятникова.

Викладення основного матеріалу.

Розглянемо післяударний рух гранули перги у робочій зоні ротора безпосередньо після її відокремлення від восково-пергової структури внаслідок імпульсно-контактної взаємодії з молотком [7, 8]. У межах прийнятої постановки ударна фаза формує початкові умови руху гранули, а подальше переміщення доцільно описувати у рухомій системі координат $Oxuz$, жорстко зв'язаній з ротором, що обертається рівномірно [9, 16]. Додаткові контакти гранули з елементами камери в цій постановці не враховуються; аналізується рух гранули лише в полі інерційних сил обертової системи та у зоні контактної взаємодії з робочою поверхнею молотка.

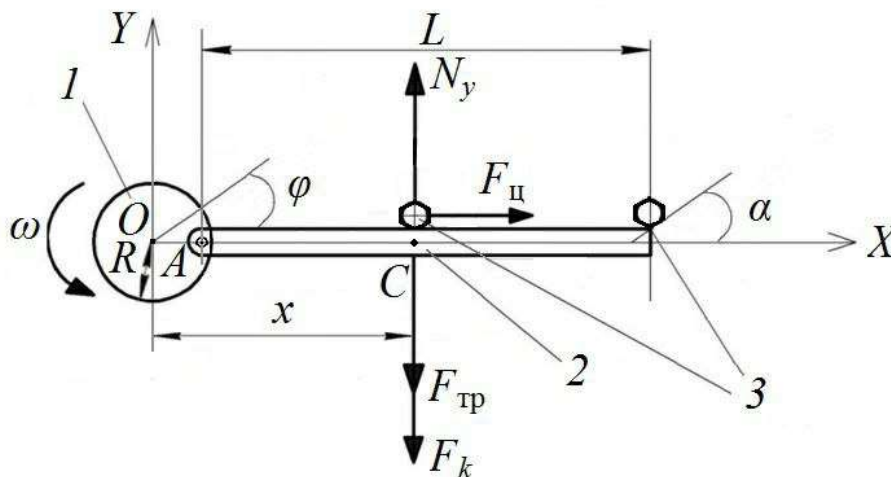
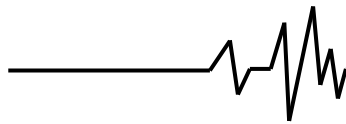


Рис. 1 – Схема сил, що діють на гранулу перги в зоні контактної взаємодії з молотком (вид зверху). 1 – ротор, 2 – молоток, 3 – гранула перги

Нехай ротор обертається у горизонтальній площині з сталою кутовою швидкістю ω [10, 11]. Гранула масою m здійснює переносний рух разом із ротором і відносний рух у напрямку осі x рухомої системи координат. Оскільки обертання рівномірне, у прийнятій квазістатичній постановці проекція прискорення

вдovж осі Oy приймається рівною нулю, а силовий баланс по y та z використовується для явного виведення нормальних реакцій.

Система рівнянь відносного руху записується так:



$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_{\text{тр}} - F_{\text{ц}}, \\ N_y - F_k = 0, \\ N_z - G = 0 \end{cases} \quad (1)$$

де $x(t)$ — відносне переміщення гранули; $F_{\text{тр}}$ — сила сухого тертя у зоні контакту «гранула–молоток»; $F_{\text{ц}}$ — відцентрова сила; F_k — сила Коріоліса; N_y — нормальні реакції; $G=mg$.

Відцентрова сила у обертовій системі координат [9, 16]:

$$F_{\text{ц}} = m\omega^2 r. \quad (2)$$

Сила Коріоліса за наявності відносної швидкості $\dot{x}$ [9, 16]:

$$F_k = 2m\omega\dot{x}. \quad (3)$$

Із другого рівняння системи (1), з урахуванням (3), одразу отримуємо нормальну реакцію по осі y у явному вигляді:

$$N_y = F_k = 2m\omega\dot{x}. \quad (4)$$

Силу сухого тертя в зоні контакту «гранула–молоток» задаємо законом Кулона з коефіцієнтом тертя f , але у підстановочно-розгорнутій формі (щоб формально фіксувати зв'язок з інерційними членами) [12, 15]:

$$F_{\text{тр}} = fN_y = f(2m\omega\dot{x}) = 2mf\omega\dot{x}. \quad (5)$$

Підставляючи (2) та (5) у перше рівняння системи (1), отримуємо рівняння руху [7, 8]:

$$m\ddot{x} = 2mf\omega\dot{x} - m\omega^2 r. \quad (6)$$

Далі використовуємо геометричну ідентифікацію радіальної координати у плані (вид зверху), приймаючи $r=x$ [10, 11]. Тоді з (6) маємо:

$$m\ddot{x} + 2mf\omega\dot{x} - m\omega^2 x = 0. \quad (7)$$

Діленням (7) на $m \neq 0$ фіксуємо кінцеву форму рівняння відносного руху [10, 11, 12]:

$$\ddot{x} + 2f\omega\dot{x} - \omega^2 x = 0. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння для (8) [16, 17]:

$$\lambda^2 + 2f\omega\lambda - \omega^2 = 0 \quad (9)$$

Дискримінант у повністю розгорнутому вигляді:

$$D = (2f\omega)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\omega^2) = 4\omega^2(f^2 + 1) \quad (10)$$

Корені характеристичного рівняння (9) записуємо з проміжним перетворенням підкореневого виразу:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2f\omega \pm \sqrt{4\omega^2(f^2 + 1)}}{2} = -f\omega \pm \omega\sqrt{f^2 + 1}. \quad (11)$$

Звідси загальний розв'язок однорідного рівняння (8) у розгорнутій експоненційній формі:

$$x_o(t) = C_1 e^{(-f\omega - \omega\sqrt{f^2 + 1})t} + C_2 e^{(-f\omega + \omega\sqrt{f^2 + 1})t}. \quad (12)$$

Для подальшого формалізованого узгодження з імпульсно-контактною схемою (рисунок 1) застосуємо метод варіації сталих [7, 12], залишаючи фундаментальний базис $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$.

Частинний розв'язок запишемо як:

$$x_p(t) = u_1(t)e^{\lambda_1 t} + u_2(t)e^{\lambda_2 t} \quad (13)$$

Стандартна умова варіації сталих дає систему для похідних $u'_1(t)$, $u'_2(t)$ у формі, зручній для використання визначника Вронського. Для узгодження з вихідною постановкою неоднорідний член фіксуємо через «інтегральний» параметр навантаження [12, 15] (у такому записі він не вводить нової фізики, а лише формалізує праву частину):

$$\begin{cases} u'_1(t)e^{\lambda_1 t} + u'_2(t)e^{\lambda_2 t} = 0, \\ u'_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + u'_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = -f^2 g \end{cases} \quad (14)$$

Вронскіан фундаментальної системи:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (15)$$

Оскільки

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2f\omega, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = 2\omega\sqrt{f^2 + 1},$$

маємо еквівалентну форму:

$$W(t) = e^{-2f\omega t} (2\omega\sqrt{f^2 + 1}) \quad (16)$$

З (14)–(16) отримуємо вирази для похідних функцій варіації сталих:

$$u'_1(t) = \frac{-f^2 g e^{\lambda_2 t}}{W(t)}. \quad (17)$$

$$u'_2(t) = \frac{f^2 g e^{\lambda_1 t}}{W(t)}. \quad (18)$$

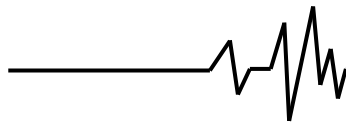
Після підстановки (16) у (17)–(18) дістаємо форми, безпосередньо придатні для інтегрування:

$$u'_1(t) = -\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2 + 1}} e^{(f\omega - \omega\sqrt{f^2 + 1})t} \quad (19)$$

$$u'_2(t) = \frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2 + 1}} e^{(f\omega + \omega\sqrt{f^2 + 1})t}. \quad (20)$$

Інтегрування (19)–(20) дає [14, 19]:

$$u_1(t) = -\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2 + 1}} \cdot \frac{e^{(f\omega - \omega\sqrt{f^2 + 1})t}}{f\omega - \omega\sqrt{f^2 + 1}}. \quad (21)$$



$$u_2(t) = \frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{e^{(f\omega+\omega\sqrt{f^2+1})t}}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}}. \quad (22)$$

Тоді, підставляючи (21)–(22) у (13), одержуємо частинний розв'язок:

$$x_p(t) = u_1(t)e^{\lambda_1 t} + u_2(t)e^{\lambda_2 t}. \quad (23)$$

Після явного перемноження експонент із урахуванням (11) розв'язок зручно подати у формі, що повторює структуру вихідного виведення [19]:

$$x(t) = \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{e^{(f\omega-\omega\sqrt{f^2+1})t}}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{(-f\omega-\omega\sqrt{f^2+1})t} + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{e^{(f\omega+\omega\sqrt{f^2+1})t}}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{(-f\omega+\omega\sqrt{f^2+1})t} + C. \quad (24)$$

Накладаємо початкову умову післяударного стану $t_0=0$, $x(0)=x_0$. Тоді з (24) маємо:

$$x_0 = \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right] + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] + C. \quad (25)$$

Звідси стала інтегрування:

$$C = x_0 - \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] - \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right]. \quad (26)$$

Підставляючи (26) у (24), отримуємо кінцевий аналітичний закон післяударного переміщення гранули перги в зоні контактної взаємодії з молотком (за допущенням рисунка 1 про відсутність контактів з елементами камери):

$$x(t) = \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{e^{(f\omega-\omega\sqrt{f^2+1})t}}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{(-f\omega-\omega\sqrt{f^2+1})t} + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{e^{(f\omega+\omega\sqrt{f^2+1})t}}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{(-f\omega+\omega\sqrt{f^2+1})t} + x_0 - \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] - \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right]. \quad (27)$$

Для рівномірного обертання ротора кут повороту в часі задається кінематичним законом:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t. \quad (28)$$

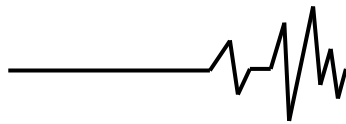
Післяударне радіальне переміщення гранули у рухомій системі координат ротора задається аналітичним законом (у «підстановочно-розгорнутій» формі, придатній для прямої параметризації траєкторії) [14, 19, 21]:

$$x(t) = \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{-2\omega\sqrt{f^2+1}t} + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{2\omega\sqrt{f^2+1}t} + x_0 - \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega+\omega\sqrt{f^2+1}} \right] - \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega-\omega\sqrt{f^2+1}} \right]. \quad (29)$$

Переходячи від рухомої (зв'язаної з ротором) радіальної координати до нерухомої горизонтальної площини (OX,OY), параметричні рівняння траєкторії гранули в явному вигляді записуються як:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) \cos \varphi(t), \\ Y(t) = x(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (30)$$

і після повної підстановки (28)–(29) отримуємо формули координат:



$$X(t) = \left(\left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega - \omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{-2\omega\sqrt{f^2+1}t} + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega + \omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{2\omega\sqrt{f^2+1}t} + x_0 - \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega + \omega\sqrt{f^2+1}} \right] - \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega - \omega\sqrt{f^2+1}} \right] \right) \cos(\varphi_0 + \omega t) \quad (31)$$

$$Y(t) = \left(\left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega - \omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{-2\omega\sqrt{f^2+1}t} + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega + \omega\sqrt{f^2+1}} \right] e^{2\omega\sqrt{f^2+1}t} + x_0 - \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega + \omega\sqrt{f^2+1}} \right] - \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega - \omega\sqrt{f^2+1}} \right] \right) \sin(\varphi_0 + \omega t) \quad (32)$$

Для подальшої кількісної оцінки інтенсивності переносу в нерухомій площині вводимо модуль швидкості гранули $V(t)$, який визначається стандартно через похідні координат [9, 16]:

$$V^2(t) = \dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t) \quad (33)$$

Оскільки $\dot{\varphi}(t) = \omega$, $\ddot{\varphi}(t) = 0$, маємо:

$$\dot{\varphi}(t) = \omega, \quad \ddot{\varphi}(t) = 0 \quad (34)$$

Диференціюючи (30) за часом та підставляючи (34), одержуємо швидкості в розгорнутій формі:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{x}(t) \cos(\varphi_0 + \omega t) - \omega x(t) \sin(\varphi_0 + \omega t), \\ \dot{Y}(t) = \dot{x}(t) \sin(\varphi_0 + \omega t) + \omega x(t) \cos(\varphi_0 + \omega t) \end{cases} \quad (35)$$

де $x(t)$ береться з (29), а $\dot{x}(t)$ виписується явно шляхом диференціювання (29):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left[-\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega - \omega\sqrt{f^2+1}} \right] \left(-2\omega\sqrt{f^2+1} \right) e^{-2\omega\sqrt{f^2+1}t} \\ & + \left[\frac{f^2 g}{2\omega\sqrt{f^2+1}} \cdot \frac{1}{f\omega + \omega\sqrt{f^2+1}} \right] \left(2\omega\sqrt{f^2+1} \right) e^{2\omega\sqrt{f^2+1}t} \end{aligned} \quad (36)$$

Підставляючи (35) у (33) та враховуючи тригонометричні тотожності, одержуємо інваріант (тобто вираз, що не залежить від $\sin(\varphi_0 + \omega t)$, $\cos(\varphi_0 + \omega t)$):

$$V^2(t) = \dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t) = \left(\dot{x}(t) \cos(\varphi_0 + \omega t) - \omega x(t) \sin(\varphi_0 + \omega t) \right)^2 + \left(\dot{x}(t) \sin(\varphi_0 + \omega t) + \omega x(t) \cos(\varphi_0 + \omega t) \right)^2 \quad (37)$$

Розкриваючи квадрати та групуєчи доданки за $\dot{x}^2(t)$, $\omega^2 x^2(t)$ і змішаними членами, маємо [17, 19]:

$$\begin{aligned} V^2(t) = & \dot{x}^2(t) \cos^2(\varphi_0 + \omega t) - 2\omega x(t) \dot{x}(t) \sin(\varphi_0 + \omega t) \cos(\varphi_0 + \omega t) \\ & + \omega^2 x^2(t) \sin^2(\varphi_0 + \omega t) + \dot{x}^2(t) \sin^2(\varphi_0 + \omega t) \\ & + 2\omega x(t) \dot{x}(t) \sin(\varphi_0 + \omega t) \cos(\varphi_0 + \omega t) + \omega^2 x^2(t) \cos^2(\varphi_0 + \omega t) \end{aligned} \quad (38)$$

Змішані члени взаємно компенсуються, а з урахуванням тотожності

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \theta = \varphi_0 + \omega t, \quad (39)$$

одержуємо остаточну інваріантну форму:

$$V^2(t) = \dot{x}^2(t) + \omega^2 x^2(t) \quad (40)$$

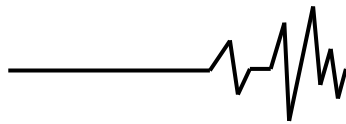
Нижче подано запис кінематики молотка, матричної динаміки та імпульсно-контактних

співвідношень, узгоджений із постановкою «молоток-восково-пергова структура», без урахування контактів із елементами камери.

Узагальнений вектор координат системи:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{cases} \varphi(t) \\ \alpha(t) \end{cases} \quad (41)$$

Узагальнені швидкості та прискорення:



$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{cases} \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{cases}, \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{cases}. \quad (42)$$

Положення шарніра підвісу молотка А на радіусі R (у нерухомій площині OXY):

$$\mathbf{r}_A(t) = \begin{cases} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \end{cases}. \quad (43)$$

Швидкість та прискорення точки А:

$$\dot{\mathbf{r}}_A(t) = \begin{cases} -R\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ R\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases}. \quad (44)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A(t) = \begin{cases} -R\ddot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - R\dot{\varphi}^2(t) \cos \varphi(t) \\ R\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - R\dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t) \end{cases}. \quad (45)$$

Положення центра мас молотка С (довжина від шарніра до центра мас L , відносний кут α):

$$\mathbf{r}_C(t) = \mathbf{r}_A(t) + \begin{cases} L \cos(\varphi(t) + \alpha(t)) \\ L \sin(\varphi(t) + \alpha(t)) \end{cases}. \quad (46)$$

Швидкість центра мас С:

$$\dot{\mathbf{r}}_C(t) = \begin{cases} -R\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - L(\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \sin(\varphi(t) + \alpha(t)) \\ R\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) + L(\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \cos(\varphi(t) + \alpha(t)) \end{cases}. \quad (47)$$

Квадрат швидкості центра мас у повністю розгорнутій формі:

$$v_C^2(t) = \left[-R\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - L(\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \sin(\varphi(t) + \alpha(t)) \right]^2 + \left[R\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) + L(\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \cos(\varphi(t) + \alpha(t)) \right]^2. \quad (48)$$

Після зведення подібних еквівалентна форма (56):

$$v_C^2(t) = R^2 \dot{\varphi}^2(t) + L^2 (\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t))^2 + 2RL \dot{\varphi}(t) (\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \cos \alpha(t). \quad (48)$$

Положення точки контакту К на робочій кромці молотка:

$$\mathbf{r}_K(t) = \mathbf{r}_A(t) + \begin{cases} L_K \cos(\varphi(t) + \alpha(t)) \\ L_K \sin(\varphi(t) + \alpha(t)) \end{cases}. \quad (49)$$

Швидкість точки контакту:

$$\dot{\mathbf{r}}_K(t) = \begin{cases} -R\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - L_K(\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \sin(\varphi(t) + \alpha(t)) \\ R\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) + L_K(\dot{\varphi}(t) + \dot{\alpha}(t)) \cos(\varphi(t) + \alpha(t)) \end{cases}. \quad (50)$$

Для імпульсно-контактної постановки вводимо одиничний вектор нормалі $\mathbf{n}(t)$ у точці контакту та визначаємо нормальну складову швидкості:

$$\mathbf{n}(t) = \begin{cases} n_x(t) \\ n_y(t) \end{cases}, \quad \|\mathbf{n}(t)\| = \sqrt{n_x^2(t) + n_y^2(t)} = 1. \quad (51)$$

$$v_n(t) = \dot{\mathbf{r}}_K(t) \cdot \mathbf{n}(t) = \dot{x}_K(t) n_x(t) + \dot{y}_K(t) n_y(t). \quad (52)$$

Для повного контролю ударної кінематики часто корисно виписати також тангенціальну складову через одиничний дотичний вектор $\boldsymbol{\tau}(t)$, ортогональний до $\mathbf{n}(t)$:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \begin{cases} -n_y(t) \\ n_x(t) \end{cases}, \quad \boldsymbol{\tau}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0. \quad (53)$$

$$v_{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}_K(t) \cdot \boldsymbol{\tau}(t). \quad (54)$$

Кінетична енергія системи «ротор–молоток» у канонічному поданні:

$$T = T_r + T_h. \quad (55)$$

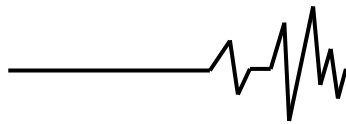
Кінетична енергія ротора:

$$T_r = \frac{1}{2} J_r \dot{\varphi}^2. \quad (56)$$

Кінетична енергія молотка (теорема Кеніга: поступальний рух центра мас + обертання відносно центра мас):

$$T_h = \frac{1}{2} m_h v_C^2 + \frac{1}{2} J_C (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2. \quad (57)$$

Підставляючи (48) у (57), отримуємо розгорнуту енергію молотка як явну квадратичну форму за $\dot{\varphi}$, $\dot{\alpha}$:



$$T_h = \frac{1}{2} m_h \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + L^2 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + 2RL\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})\cos\alpha \right) + \frac{1}{2} J_c (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2. \quad (58)$$

Потенціальна енергія (за вертикальною координатою y_c ; якщо вісь OY спрямована вгору, то

$$\begin{aligned} \Pi &= m_h g y_c(t), \\ y_c(t) &= R \sin \varphi(t) + L \sin(\varphi(t) + \alpha(t)) \end{aligned} \quad (59)$$

Лагранжіан:

$$L = T - \Pi. \quad (60)$$

Рівняння Лагранжа другого роду для $q_i \in \{\varphi, \alpha\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (61)$$

Для компактного, але формально перевірюваного запису вводимо вектор узагальнених сил:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Bmatrix} Q_\varphi(t) \\ Q_\alpha(t) \end{Bmatrix}, \quad (62)$$

і матричне подання рівнянь руху:

$$\mathbf{M}(\alpha) \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \mathbf{C}(\varphi, \alpha, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}) \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \mathbf{G}(\varphi, \alpha) = \begin{Bmatrix} Q_\varphi \\ Q_\alpha \end{Bmatrix}, \quad (63)$$

де $\mathbf{M}(\alpha)$ — симетрична матриця інерції системи, $\mathbf{C}(\cdot)$ — коріолісово-центробіжні члени, $\mathbf{G}(\cdot)$ — гравітаційні (потенціальні) члени.

Для ідентифікації приведеної маси у нормальному напрямі вводимо нормальну координату зближення $\xi(t)$ та її похідні:

$$\xi(t) \geq 0, \quad \dot{\xi}(t) = v_n(t), \quad \ddot{\xi}(t) = \dot{v}_n(t) \quad (64)$$

Контактний закон у фазі стискання записуємо як степеневу залежність:

$$P(t) = k \xi^p(t). \quad (65)$$

Для подальшого зручно виписати також похідну контактної сили за координатою зближення, що визначає миттєву «контактну жорсткість»:

$$\frac{dP}{d\xi} = kp \xi^{p-1}. \quad (66)$$

Імпульс контактної сили за час стискання (від $t=0$ до моменту максимальної сили $t=t_{\max}$):

$$\Pi^* = \int_0^{t_{\max}} P(t) dt = \int_0^{t_{\max}} k \xi^p(t) dt. \quad (67)$$

Імпульсно-інерційний зв'язок у нормальному напрямі через приведену масу m_{eq} :

$$\Pi^* = m_{eq} (v_n^- - v_n^+), \quad (68)$$

де v_n^- — нормальна швидкість

безпосередньо перед контактом, v_n^+ — нормальна швидкість після завершення фази стискання (в узагальненому випадку не обов'язково нульова).

Для явного введення коефіцієнта відновлення e застосовується стандартний зв'язок нормальних швидкостей:

$$v_n^+ = -e v_n^-, \quad 0 \leq e < 1. \quad (69)$$

Тоді (77) набуває розгорнутої форми:

$$\Pi^* = m_{eq} (1 + e) v_n^-. \quad (70)$$

Визначення приведеної маси через загальну формулу узгодження узагальнених координат і нормальної координати зближення:

$$m_{eq} = \left(\sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{-1}. \quad (71)$$

Для системи з узагальненими координатами $\mathbf{q} = \{\varphi, \alpha\}$. та матрицею мас $\mathbf{M}(\alpha)$ переходять до матричної форми:

$$m_{eq} = (\mathbf{J}^T \mathbf{M}^{-1}(\alpha) \mathbf{J})^{-1}. \quad (72)$$

Тут $\mathbf{J}$ — Якобіан нормальної координати зближення ξ за узагальненими координатами (у дозволений формі запису стовпця):

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \end{Bmatrix}. \quad (73)$$

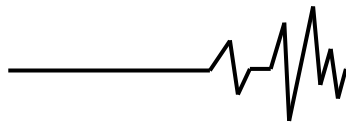
Щоб зробити (73) придатним до практичного обчислення, випишемо ξ як проекцію відносного переміщення точки контакту на нормаль (без додавання взаємодій з камерою), тобто:

$$\xi(t) = (\mathbf{r}_K(t) - \mathbf{r}_S(t)) \cdot \mathbf{n}(t), \quad (74)$$

де $\mathbf{r}_S(t)$ — радіус-вектор локальної точки поверхні восково-пергової структури у зоні удару (в межах імпульсної постановки його можна вважати стаціонарним на малій тривалості контакту).

Тоді похідні для Якобіана (73) набувають формально розгорнутого вигляду:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{n}. \quad (75)$$



З урахуванням (58) отримаємо явні

похідні $\frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial \alpha}$. (у координатах OX, OY):

$$\frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial \varphi} = \begin{cases} -R \sin \varphi - L_K \sin(\varphi + \alpha) \\ R \cos \varphi + L_K \cos(\varphi + \alpha) \end{cases}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial \alpha} = \begin{cases} -L_K \sin(\varphi + \alpha) \\ L_K \cos(\varphi + \alpha) \end{cases}, \quad (76)$$

і, відповідно, компоненти Якобіана як

скалярні добутки (75)–(76) з $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = (-R \sin \varphi - L_K \sin(\varphi + \alpha))n_x + (R \cos \varphi + L_K \cos(\varphi + \alpha))n_y. \quad (77)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = (-L_K \sin(\varphi + \alpha))n_x + (L_K \cos(\varphi + \alpha))n_y. \quad (78)$$

Далі критерій селективного руйнування воскової основи із збереженням гранули перги формалізується умовою «вікна» контактних напружень [18, 19]:

$$\sigma_w \leq \sigma_{\max} < \sigma_p. \quad (79)$$

Якщо $\sigma_{\max}$ інтерпретується через пікову контактну силу $P_{\max}$ і ефективну площу контакту A_{eff} (без уточнення геометрії поверхні, щоб не вводити зовнішні елементи), то записують узгоджувальне співвідношення:

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{A_{\text{eff}}}. \quad (80)$$

Максимальна сила у степеневому законі (65) відповідає $\xi = \xi_{\max}$:

$$P_{\max} = k \xi_{\max}^p. \quad (81)$$

Таким чином, ударна фаза задає початкові умови для післяударного руху гранули (через x_0 , швидкість відриву та геометричний фазовий стан φ_0), а наведений вище розширений блок (41)–(81) забезпечує узгодження кінематики молотка, приведеної маси та контактного закону в рамках імпульсно-контактної моделі, не залучаючи додаткових контактів із камерою чи обмежувачами [14, 19, 21].

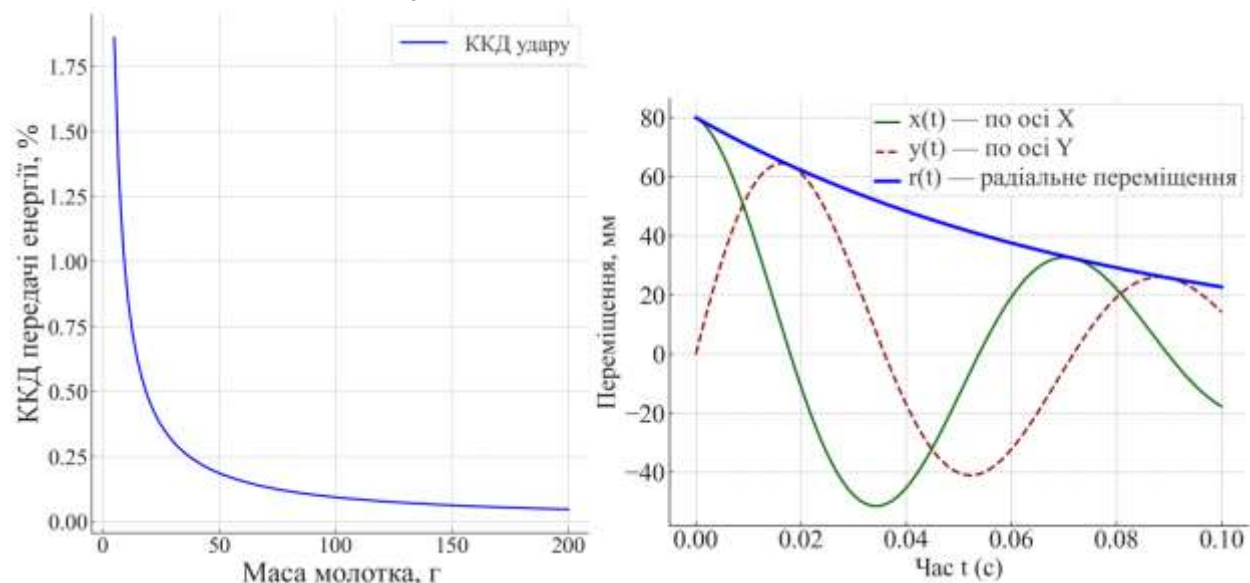
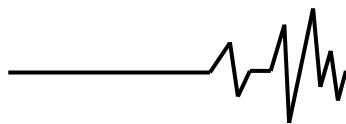


Рис.2 Енергетична ефективність удару та післяударна кінематика гранули перги в обертовій системі

Комбінований рисунок 2 відображає взаємозв'язок між ефективністю передачі енергії при ударі молотка та подальшим рухом гранули перги в робочій зоні ротора. Ліва частина показує залежність коефіцієнта корисної дії удару від маси молотка, права — часову зміну

переміщень гранули вздовж осей X і Y та радіального переміщення $r(t)$. Зі збільшенням маси молотка ККД різко зменшується: при масі близько 5 г він становить приблизно 0.7–0.8 %, при 100 г знижується до ≈ 0.1 %, а при 200 г — до ≈ 0.05 %. Це означає, що зростання кінетичної



енергії важкого молотка не супроводжується пропорційним зростанням енергії, переданої гранулі, що є характерним для нееластичного удару за значної різниці мас. Післяударний рух гранули має характер затухаючих коливань: початкове відхилення по осі X становить близько 80 мм, однак уже через 0.02 с амплітуда зменшується більш ніж на 60 %, а через 0.05 с — приблизно на 80–85 %. Радіальне

переміщення $r(t)$ монотонно спадає від ≈ 80 мм до значень менше 20 мм за перші 0.05 с, що свідчить про швидку втрату енергії та короткочасний характер післяударної динаміки. Отримані результати підтверджують доцільність оптимізації маси молотка з метою підвищення ефективності використання ударної енергії при відокремленні гранул перги.

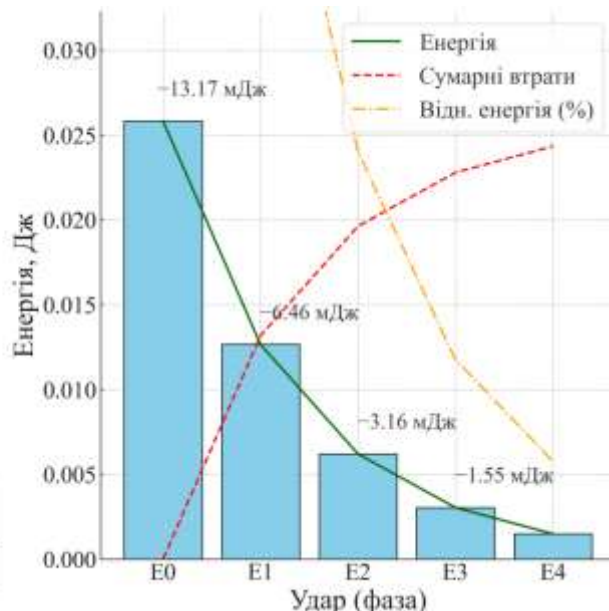
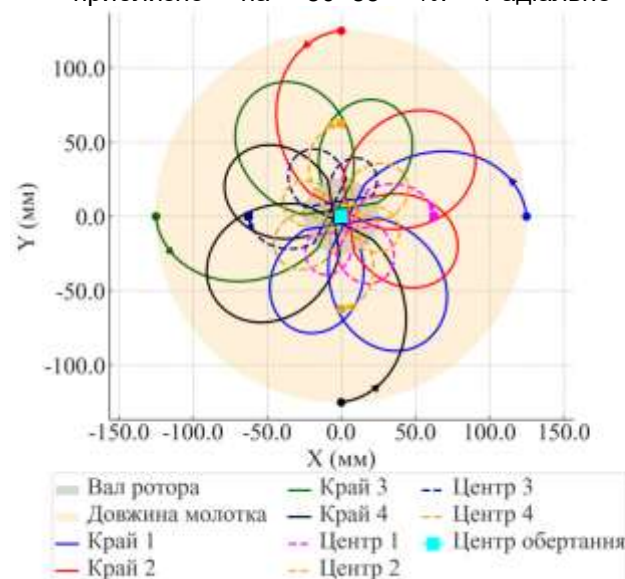


Рис.3 Енергетичні втрати та просторові траєкторії руху гранули перги при серії ударів у роторному механізмі

Комбінований рисунок 3 узагальнює енергетичну та кінематичну поведінку гранули перги під час послідовних ударів молотками в роторному механізмі. Права частина ілюструє зміну кінетичної енергії гранули після кожного удару з урахуванням нееластичності контакту ($e = 0.7$). Початкова енергія гранули становить близько 0.0258 Дж, однак уже після першого удару втрачається понад 20 %, після двох ударів — майже 40 %, а після чотирьох — близько 65 %, що відповідає залишковій енергії на рівні 35 % від початкової. Зелена крива показує спад залишкової енергії, червона — накопичені втрати, а помаранчева — відносну енергію у відсотках, наочно демонструючи високу інтенсивність розсіювання енергії в системі з повторними ударами.

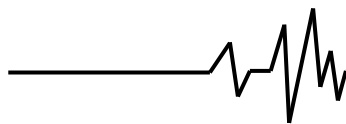
Ліва частина рисунка відображає параметричні траєкторії руху гранули після ударів чотирма молотками, розташованими симетрично з кутовим зсувом 90° . Показано рух гранули як при ударах по краю молотка, так і при ударах по його центру, що призводить до формування затухаючих спіралеподібних траєкторій у площині X – Y . Удари по краю молотка формують довші та енергетично інтенсивніші траєкторії, які в середньому на 38–45 % перевищують за протяжністю траєкторії від ударів по центру, тоді як центральні удари

забезпечують більш компактний і стабільний рух. За перші 0.1 с амплітуда переміщень зменшується на 68–75 %, що узгоджується з різким спадом кінетичної енергії, зафіксованим на енергетичній діаграмі. Сукупно рисунок демонструє тісний зв'язок між місцем прикладання удару, ефективністю передачі енергії та характером післяударної динаміки гранули.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

У результаті проведеного теоретичного аналізу встановлено механічні закономірності ударної взаємодії гранули перги з робочими елементами роторного пристрою. Розроблено аналітичну модель, що враховує дію відцентрових, коріолісових і тертявих сил у системі, яка обертається. Визначено залежності траєкторії післяударного руху гранули від кута повороту та швидкості обертання ротора, маси молотка і пружних властивостей біоматеріалу. Показано, що підвищення маси робочого елемента понад оптимальне значення призводить до зменшення коефіцієнта корисної дії удару через нееластичність контакту.

Отримані результати дозволяють обґрунтовано вибирати конструктивні параметри роторних механізмів для забезпечення ефективного та енергоощадного



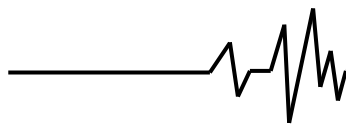
відділення гранул перги без їх руйнування. Розроблена модель може бути використана для моделювання подібних процесів у системах подрібнення, сепарації та обробки біологічних і гранульованих матеріалів.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з експериментальною перевіркою теоретичних залежностей, уточненням коефіцієнтів відновлення та тертя для гранул різної вологості, а також із розробленням комп'ютерної CFD–DEM моделі процесу відділення перги у тривимірному середовищі. Подальші дослідження також спрямовуватимуться на вдосконалення конструкції роторних пристроїв із метою зниження енергоспоживання та підвищення ресурсу роботи обладнання.

Список використаних джерел

1. Сиромятников Ю. М., Сиромятніков П. С., Харченко О. М., Белих О. В. Огляд сучасних підходів до вдосконалення технологій витоплення бджолиного воску: технічні рішення та інженерні перспективи. *Технічний сервіс агропромислового комплексу*. 2025. Вип. 26. С. 45–88. <https://doi.org/10.64165/journal-ts.2025.26.45-88>
2. Сиромятников Ю. М., Шабля В. П., Харченко О. М., Белих О. В. Біологічний контроль вароозу за допомогою мікробних препаратів: інноваційні підходи в екологічному бджільництві. *Свинарство і агропромислове виробництво*. 2024. № 4(82). С. 80–93. [https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4\(82\)6](https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4(82)6)
3. Шабля В. П., Сиромятников Ю. М. Відновлення напрямку бджільництва в Харківському національному технічному університеті сільського господарства ім. Петра Василенка. *Вісник ХНТУСГ*. 2021. Вип. 211. С. 106–108.
4. Syromiatnykov Y. N., Syromyatnikov P. S. Energy-saving technologies in the production of environmentally friendly feed: Ways to improve efficiency. *AGRO ILM – O'zbekiston qishloq va suv xo'jaligi*. 2025. С. 122–124. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18042577>
5. Syromiatnykov Y., Tursunova K., Ishniyazova S., Jaloliddin A. Physiology and immunity of honey bees (*Apis mellifera*) as a factor of disease resistance. *American Journal of Botany and Bioengineering*. 2025. Vol. 2, No. 9. P. 114–123. <https://doi.org/10.51699/ajbb.v2i9.1499>
6. Tursunova K., Syromiatnykov Y., Ishniyazova S., Otabek M. Influence of sanitary and preventive measures on apiary productivity. *American Journal of Botany and Bioengineering*. 2025. Vol. 2, No. 9. P. 124–132. <https://doi.org/10.51699/ajbb.v2i9.1500>

7. Rosas A., Buceta J. Dynamics of two granules. *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, No. 2. P. 021303. <https://doi.org/10.1103/physreve.68.021303>
8. van der Meer D. Impact on granular beds. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 49. P. 463–484. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010816-060213>
9. Sano T., Kanazawa K. Granular rotor as a probe for a nonequilibrium bath. *Physical Review E*. 2015. Vol. 94, No. 3. P. 032910. <https://doi.org/10.1103/physreve.94.032910>
10. Wang H., Huang Y. Influence of rotor-induced airflow on particle fragmentation in an impact crusher: A CFD–DEM study. *ACS Omega*. 2025. Vol. 10. P. 46051–46064. <https://doi.org/10.1021/acsomega.5c06659>
11. Ghodki P. S., Chhetri A. Numerical modeling of granular flow in star valve type cryogenic precooler. *Journal of Food Process Engineering*. 2020. Vol. 43. <https://doi.org/10.1111/jfpe.13376>
12. Yang F., Fang Z. Load and wear experiments on the impact hammer of a vertical shaft impact crusher. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2015. Vol. 103. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/103/1/012041>
13. Feng J., Shi L. Study on wear form of split cone of vertical shaft impact crusher. *Journal of Scientific Research and Reports*. 2020. Vol. 26, No. 11. P. 13–20. <https://doi.org/10.9734/jsrr/2020/v26i1130331>
14. Xu L., Cui W. Design and parameter optimization of a combined rotor and lining plate crushing organic fertilizer spreader. *Agronomy*. 2024. Vol. 14, No. 8. <https://doi.org/10.3390/agronomy14081732>
15. Paraschiv M., Moiceanu G. Optimization issues of a hammer mill working process using statistical modelling. *Sustainability*. 2021. Vol. 13. <https://doi.org/10.3390/su13020973>
16. Kim D., Kim H. Dissipative dynamics of granular materials. *IntechOpen*. 2017. <https://doi.org/10.5772/intechopen.69196>
17. Kollmer J., Sack A. Relaxation of a spring with an attached granular damper. *New Journal of Physics*. 2013. Vol. 15, No. 9. P. 093023. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/9/093023>
18. Păun V., Stroescu G. Concaves influence on the milling process of cereal seeds in hammer mills. *E3S Web of Conferences*. 2019. Vol. 112. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201911203009>
19. Ahmadian H., Ghadiri M. Granule attrition by coupled particle impact and shearing. *Advanced Powder Technology*. 2021. Vol. 32. P. 204–210. <https://doi.org/10.1016/j.apt.2020.12.001>
20. Li, T., Shi, G., & Zhang, Q. Research on hammering characteristics of hammer mill based



on discrete element method. *Engineering Research Express*. 2024. 6(3), P. 035540. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ad6ca4>

21. Kyzas G. Z., Mitropoulos A. Granularity in materials science. *IntechOpen*. 2018. <https://doi.org/10.5772/intechopen.75231>

References

1. Syromiatnykov, Yu. M., Syromiatnikov, P. S., Kharchenko, O. M., & Bielykh, O. V. (2025). Ohliad suchasnykh pidkhodiv do vdoskonalennia tekhnolohii vytoplennia bdzholynoho vosku: tekhnichni rishennia ta inzhenerni perspektyvy [Review of modern approaches to improving beeswax melting technologies: technical solutions and engineering prospects]. *Tekhnichniy servis ahropromyslovoho kompleksu – Technical Service of Agro-Industrial Complex*, 26, 45–88. <https://doi.org/10.64165/journal-ts.2025.26.45-88> [in Ukrainian].

2. Syromiatnykov, Yu. M., Shablia, V. P., Kharchenko, O. M., & Bielykh, O. V. (2024). Biologichnyi kontrol varohozu za dopomohoiu mikrobykh preparativ: innovatsiini pidkhody v ekolohichnomu bdzhilnytstvi [Biological control of varroosis using microbial preparations: innovative approaches in ecological beekeeping]. *Svyndarstvo i ahropromyslove vyrobnytstvo – Pig Breeding and Agro-Industrial Production*, 4(82), 80–93. [https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4\(82\)6](https://doi.org/10.37143/2786-7730-2024-4(82)6) [in Ukrainian].

3. Shablia, V. P., & Syromiatnykov, Yu. M. (2021). Vidnovlennia napriamku bdzhilnytstva v KhNTUSH im. Petra Vasylenka [Restoration of beekeeping direction at KhNTUSG named after Petro Vasylenko]. *Visnyk KhNTUSH – Bulletin of KhNTUSG*, 211, 106–108 [in Ukrainian].

4. Syromiatnykov, Y. N., & Syromyatnikov, P. S. (2025). Energy-saving technologies in the production of environmentally friendly feed: Ways to improve efficiency. *AGRO ILM – O'zbekiston qishloq va suv xo'jaligi*, 122–124. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18042577>

5. Syromiatnykov, Y., Tursunova, K., Ishniyazova, S., & Jaloliddin, A. (2025). Physiology and immunity of honey bees (*Apis mellifera*) as a factor of disease resistance. *American Journal of Botany and Bioengineering*, 2(9), 114–123. <https://doi.org/10.51699/ajbb.v2i9.1499>

6. Tursunova, K., Syromiatnykov, Y., Ishniyazova, S., & Otabek, M. (2025). Influence of sanitary and preventive measures on apiary productivity. *American Journal of Botany and Bioengineering*, 2(9), 124–132. <https://doi.org/10.51699/ajbb.v2i9.1500>

7. Rosas, A., & Buceta, J. (2003). Dynamics of two granules. *Physical Review E*,

68(2), 021303. <https://doi.org/10.1103/physreve.68.021303>

8. van der Meer, D. (2017). Impact on granular beds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 49, 463–484. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010816-060213>

9. Sano, T., & Kanazawa, K. (2015). Granular rotor as a probe for a nonequilibrium bath. *Physical Review E*, 94(3), 032910. <https://doi.org/10.1103/physreve.94.032910>

10. Wang, H., & Huang, Y. (2025). Influence of rotor-induced airflow on particle fragmentation in an impact crusher: A CFD–DEM study. *ACS Omega*, 10, 46051–46064. <https://doi.org/10.1021/acsomega.5c06659>

11. Ghodki, P. S., & Chhetri, A. (2020). Numerical modeling of granular flow in star valve type cryogenic precooler. *Journal of Food Process Engineering*, 43. <https://doi.org/10.1111/jfpe.13376>

12. Yang, F., & Fang, Z. (2015). Load and wear experiments on the impact hammer of a vertical shaft impact crusher. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 103, 012041. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/103/1/012041>

13. Feng, J., & Shi, L. (2020). Study on wear form of split cone of vertical shaft impact crusher. *Journal of Scientific Research and Reports*, 26(11), 13–20. <https://doi.org/10.9734/jsrr/2020/v26i1130331>

14. Xu, L., & Cui, W. (2024). Design and parameter optimization of a combined rotor and lining plate crushing organic fertilizer spreader. *Agronomy*, 14(8), 1732. <https://doi.org/10.3390/agronomy14081732>

15. Paraschiv, M., & Moiceanu, G. (2021). Optimization issues of a hammer mill working process using statistical modelling. *Sustainability*, 13, 973. <https://doi.org/10.3390/su13020973>

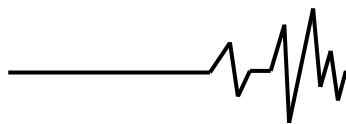
16. Kim, D., & Kim, H. (2017). Dissipative dynamics of granular materials. *IntechOpen*. <https://doi.org/10.5772/intechopen.69196>

17. Kollmer, J., & Sack, A. (2013). Relaxation of a spring with an attached granular damper. *New Journal of Physics*, 15(9), 093023. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/9/093023>

18. Păun, V., & Stroescu, G. (2019). Concaves influence on the milling process of cereal seeds in hammer mills. *E3S Web of Conferences*, 112, 03009. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201911203009>

19. Ahmadian, H., & Ghadiri, M. (2021). Granule attrition by coupled particle impact and shearing. *Advanced Powder Technology*, 32, 204–210. <https://doi.org/10.1016/j.appt.2020.12.001>

20. Li, T., Shi, G., & Zhang, Q. (2024). Research on hammering characteristics of hammer mill based on discrete element method. *Engineering Research Express*, 6(3), 035540. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ad6ca4>



21. Kyzas, G. Z., & Mitropoulos, A. (2018). Granularity in materials science. IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.75231>

MECHANICS OF IMPACT INTERACTION OF A BEE BREAD GRANULE WITH WORKING ELEMENTS OF A ROTARY DEVICE

The article investigates the mechanics of impact interaction between a bee bread granule and the working elements of a rotary device used for its separation from the wax-bee bread mass in beekeeping technologies. The relevance of the study is determined by the need to increase the energy efficiency and technological reliability of mechanical processing of biological materials while preserving their natural structure and biological value. The purpose of the work is to develop a theoretical model of impulse-contact interaction between a bee bread granule and the hammer surface and to establish the regularities of the post-impact motion of the granule in the field of inertial forces of the rotor mechanism. The research is based on the methods of classical rigid body mechanics, impact theory, and mathematical modeling in a rotating coordinate system. The equations of motion of the granule during the

contact phase and the subsequent free motion are derived, taking into account centrifugal, Coriolis, gravitational, and frictional forces. An analytical description of the post-impact trajectory in the rotating and fixed coordinate systems is obtained. The influence of the rotor angular position, rotational speed, hammer mass, and impact location on the motion characteristics and energy dissipation of the system is analyzed. It is shown that an increase in the hammer mass above an optimal value does not lead to a proportional increase in the energy transferred to the granule and, on the contrary, causes a significant decrease in impact efficiency due to the inelastic nature of the interaction. The obtained results make it possible to determine rational impact conditions that ensure effective separation of the granules while minimizing their destruction. The developed mathematical model can be used for the parametric optimization of rotary devices for bee product processing and may also be applied to the analysis of impact dynamics in other technological systems dealing with granular and biologically heterogeneous materials.

Keywords: bee bread, granule, impact, rotor, hammer, contact interaction, energy efficiency, motion trajectory, separation.

Відомості про автора

Бєлих Олександр Владиславович, аспірант Державного біотехнологічного університету, вул. Алчевських, 44. м. Харків, Україна, 61002. E-mail: Sashafincol@gmail.com

Belykh Oleksandr, postgraduate student of the State Biotechnological University, 44 Alchevskikh St., Kharkiv, Ukraine, 61002. E-mail: Sashafincol@gmail.com

Стаття надійшла 28.11.2025

Стаття прийнята 10.12.2025

Опубліковано 25.12.2025.