

**Ольшанський В.П.**

д. ф.- м. н., професор

Ольшанський С.В.

к. ф.- м. н.

Харківський**національний технічний
університет сільського
господарства імені П.
Василенка****Olshanskii V.****Olshanskii S.****Petro Vasylenko Kharkiv
National Technical
University of Agriculture****УДК 534.1:539.3****DOI: 10.37128/2306-8744-2019-4-5****ПРО МОЖЛИВІСТЬ ЗАСТОЮ
ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОГО
ОСЦИЛЯТОРА З ЛІНІЙНИМ
В'ЯЗКИМ ОПОРОМ**

Розглянуто вільні коливання осцилятора зі степенево-нелінійною характеристикою пружності при дії лінійного в'язкого опору. Методом енергетичного балансу, який поширений в механіці, розрахунок амплітуд вільних затухаючих коливань зведено до обчислення коренів алгебраїчного рівняння що має точний аналітичний розв'язок лише при лінійній пружності осцилятора. У випадку довільного додатного показника нелінійної пружності потрібне чисельне розв'язування рівняння. Для цього в роботі використано ітераційний метод Ньютона, що має швидку збіжність ітерацій при довільному початковому наближенні. За результатами аналізу коефіцієнтів рівняння встановлено, що у випадку жорсткої характеристики пружності, коли показник нелінійності більший одиниці, коливання зводяться до скінченної кількості затухаючих розмахів, тобто вони обмежені в часі, а у випадку м'якої характеристики пружності, коли показник нелінійності менший одиниці, вони тривають до нескінченності, як і в лінійного дисипативного осцилятора. Дослідження проведено методом енергетичного балансу та числовим інтегруванням диференціального рівняння коливань на комп'ютері. Роботу сили в'язкого опору обчислено наближено, з використанням періодичних Атеб-функцій, які точно описують вільні незатухаючі коливання при відсутності опору. У підсумку виведено наближені ітераційні залежності для обчислень амплітуд розмахів, які спадають у ході руху. Проведено порівняння числових результатів, одержаних за наближеними формулами та числовим комп'ютерним інтегруванням нелінійної задачі Коші. Відзначено їх задовільну узгодженість, як при жорсткій, так і при м'якій характеристиках пружності, що підтвердило адекватність наближених аналітичних розв'язків задачі динаміки. Основна перевага викладеного наближеного способу розрахунку полягає у відсутності потреби будувати аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора, що є досить складною математичною задачею. До того ж, він дає можливість встановити умови, коли осцилятори з в'язким опором і сухим тертям мають аналогічні коливальні властивості.

Ключові слова: вільні затухаючі коливання, степенево нелінійна характеристика пружності, в'язке лінійне тертя, метод енергетичного балансу, періодичні Атеб-функції.



Вступ. Загально відомо, що лінійний дисипативний осцилятор з в'язким опором здійснює необмежену кількість розмахів у часі, що не підтверджується практикою. Цю невідповідність теорії практиці, зазвичай пояснюють тим, що в реальних умовах завжди, крім в'язкого опору, діє сила сухого тертя, яку нехтували в теоретичній моделі. Але є математичні моделі осциляторів, які здійснюють обмежену кількість розмахів при вільних коливаннях і при відсутності сухого тертя. Саме про них іде мова в цій роботі.

Огляд літературних джерел і постановка проблеми. Вільні механічні затухаючі коливання лінійних осциляторів з в'язким опором традиційно викладено в курсах теоретичної механіки [1, 2], а також в спеціальних підручниках з теорії коливань [3, 4]. Додатково також висвітлено і коливання осциляторів при спільній дії сил в'язкого опору та сухого тертя Кулона. Розв'язок такої задачі динаміки в [4] подано на фазовій площині з геометричною ілюстрацією. В роботах [5, 6] розглянуто два варіанти її розв'язку, а саме: точний, побудований методом припасовування та наближений, побудований методом енергетичного балансу. Цей наближений метод використовуємо і в даній статті, але, на відміну від згаданих публікацій, лінійну характеристику жорсткості коливальної системи заміняємо на степеневу нелінійну, коли при відсутності опору точний розв'язок нелінійного диференціального рівняння коливань виражається через періодичні Атеб-функції [7-9]. Зазначимо, що метод енергетичного балансу використано також в [10] для наближеного опису вільних коливань осцилятора зі степеневу нелінійним в'язким опором. Тут ставиться завдання поширити вказаний метод на нелінійно пружні коливальні системи.

Метою статті є дослідження особливостей вільних коливань нелінійно пружного осцилятора при наявності лінійного в'язкого опору, коли сила тертя пропорційна швидкості руху.

Побудова наближених ітераційних формул для розрахунку амплітуд розмахів. Рух осцилятора описуємо нелінійним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c|x|^{\nu} \text{sign}(x) = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2) m – маса осцилятора; k – коефіцієнт в'язкого опору; c – коефіцієнт жорсткості системи; $\nu > 0$ – показник

нелінійності; $x(t)$ – відхилення осцилятора від положення рівноваги $x = 0$; a_0 – стартове відхилення; t – час; крапка над x означає похідну за часом t .

Побудова точного розв'язку рівняння (1) є досить складною задачею. Тому обмежимось наближеним аналітичним аналізом коливального руху.

Розглянемо i -й розмах коливань, що починається з відхилення $x = -a_{i-1}$ і закінчується відхиленням $x = a_i$, причому $a_i < a_{i-1}$. Зміна потенціальної енергії $\Delta\Pi$ на цьому етапі руху становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c}{\nu+1} (a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1}). \quad (3)$$

Обчислимо далі роботу сили в'язкого опору A_T . Приймемо, що закон руху на i -му розмаху має вигляд [9]:

$$x(t) = -a \text{Ca}(\nu, 1, \omega t), \quad (4)$$

$$\text{де } a = \frac{1}{2} (a_{i-1} + a_i); \quad \omega = a^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{(1+\nu)c}{2m}};$$

$\text{Ca}(\nu, 1, \omega t)$ – Атеб-косинус.

Згідно з (4) переміщення осцилятора на i -му розмаху дорівнює $2a = a_i + a_{i-1}$, хоча вираз (4) не задовольняє строго крайових умов.

Робота сили опору подається інтегралом:

$$A_T = -2K \int_0^b \dot{x}(t) dt,$$

$$\text{у якому: } b = \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{\omega};$$

$$I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{\nu+1}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)};$$

$\Gamma(z)$ – Гама функція, затабульована в [11, 12].

У випадку лінійного осцилятора ($\nu = 1$)

маємо відомі результати: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $I = \frac{\pi}{2}$;

$$b = \frac{\pi}{2m}, \text{ бо } \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$



Взявши похідну з (4) по t отримуємо:

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+\nu} a\omega Sa(1, \nu, \omega t),$$

де $Sa(1, \nu, \omega t)$ - Атеб синус.

Тому вираз (5) набуває вигляд:

$$A_T = -2K \left(\frac{2}{2+\nu} \right)^2 a^2 \omega \int Sa^2(1, \nu, z) dz$$

Цей інтеграл є окремим випадком більш загального інтегралу, обчисленого в [13]. Із теореми в [13] випливає,

$$\text{що: } \int_0^{\frac{1+\nu}{2}} Sa^2(1, \nu, z) dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1+\nu}\right)}.$$

Тому:

$$A = -\lambda \frac{c}{1+\nu} (a_i + a_{i-1})^{\frac{3+\nu}{2}}, \quad (6)$$

де

$$\lambda = \frac{K}{2^{\nu/2} \sqrt{(1+\nu)mc}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1+\nu}\right)}. \quad (7)$$

Згідно з методом енергетичного балансу [10]:

$$\Delta\Pi = A_T.$$

Цей вираз, з урахуванням (3) і (7), зводиться до рівняння:

$$a_i^{\nu+1} = a_{i-1}^{\nu+1} - \lambda (a_i + a_{i-1})^{\frac{3+\nu}{2}}, \quad (8)$$

яке виражає зв'язок між амплітудними відхиленнями на i -му розмаху.

$$\xi_{i+1} = \xi_j - \frac{\xi_j^{\nu+1} + \gamma_i (1 + \xi_j)^{\frac{3+\nu}{2}} - 1}{(\nu+1)\xi_j^{\nu} + \gamma_i \frac{3+\nu}{2} (1 + \xi_j)^{\frac{1+\nu}{2}}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Починати ітерації слід з $\xi_0 = 1$ на першому розмаху, а на наступних брати початковим наближенням значення ξ_{j+1} з попередніх розмахів.

Уведенням позначення $\xi = \frac{a_i}{a_{i-1}}$,

рівнянню (8) надаємо форму:

$$\xi^{\nu+1} - \gamma_i (1 + \xi)^{\frac{3+\nu}{2}} - 1 = 0$$

де

$$\gamma_i = \frac{\lambda}{(a_{i-1})^{\frac{\nu-1}{2}}}.$$

Компактний аналітичний розв'язок рівняння (9) має лише для лінійного осцилятора. У цьому випадку:

$$\lambda(1 + \xi)^2 = 1 - \xi^2 \Leftrightarrow \lambda(1 + \xi) = 1 - \xi.$$

Звідки:

$$\xi = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda},$$

причому $\lambda = \frac{\pi}{4\sqrt{mc}}$.

Зміна амплітуд відбувається за законом геометричної прогресії:

$$a_i = a_{i-1} \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Похибка наближеної форми (10) така як

$$\text{в апроксимації } \exp(-2\lambda) \approx \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}.$$

При довільних $\nu > 0$ рівняння (9) доводиться розв'язувати числовими методами, зокрема за схемою Ньютона:

Підкреслимо, що ітераційна схема Ньютона має досить швидку збіжність, що спрощує обчислення коренів рівняння (9).

Аналіз рівняння (9) показує, що воно має дійсні додатні корені, лише при $\gamma_i < 0$. Ця нерівність завжди виконується при $\nu < 1$. У



випадку $\nu > 1$ зменшення a_{i-1} призводить до того що $\gamma_i > 1$ і рівняння (9) перестає мати додатні корені. Фізично це означає, що при м'якій степеневій характеристиці пружності осцилятора ($\nu < 1$) вільні коливання проходять до нескінченно малих значень a_{i-1} , а при жорсткій степеневій характеристиці пружності ($\nu > 1$) такі значення a_{i-1} неможливі, тобто осцилятор здійснює обмежену кількість розмахів, як при сухому

терті. Область застою коливань при $\nu > 1$ подається нерівністю:

$$|x| < \lambda^{\frac{2}{\nu-1}}.$$

Отже, в нелінійному осциляторі з жорсткою характеристикою пружності при дії лінійного в'язкого опору є область застою коливань і без сухого тертя. В цьому проявляється особливість коливань розглянутої нелінійної системи.

Для наближеного обчислення тривалості i -го розмаху t_i можна використовувати формулу:

$$t_i = 2^{\nu-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{\sqrt{c(1+\nu)}}} \left[\frac{1}{(3a_{i-1} + a_i)^{\frac{\nu-1}{2}}} + \frac{1}{(3a_i + a_{i-1})^{\frac{\nu-1}{2}}} \right]$$

Її точність погіршується зі збільшенням i . Для перевірки теоретичних положень розглянемо приклади розрахунків.

Числові результати та їх порівняльний аналіз.

Приклад 1. Розглянемо затухання вільних коливань осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при $\nu = 3$, $m = 1$ кг, $c = 400$ Н/м³, $K = 0,2$ Нс/м; $a_0 = 0,05$ м. Для розрахунку послідовності амплітуд розмахів доводиться розв'язувати рівняння:

$$\xi^4 + \gamma_i(\xi + 1)^3 - 1 = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (12)$$

у якому $\gamma_i = \frac{\lambda}{a_{i-1}}$; $\lambda = 0,00618024$ м.

При обчисленні значення λ по формулі

$$(7) \text{ врахували, що: } \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3,625608;$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = 0,919063; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Рівняння (12) поділом на $(\xi + 1)$ зводиться до кубічного:

$$\xi^3 - (1 - \gamma_i)\xi^2 + (2\gamma_i + 1)\xi - (1 - \gamma_i) = 0$$

і має розв'язок [14]:

$$\xi = A + B + \frac{1 - \gamma_i}{3},$$

$$\text{де } A = \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}}; \quad B = -\sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}};$$

$$Q = \frac{1}{27} p^3 + \frac{1}{4} q^2;$$

$$p = -\frac{1}{3}(1 - \gamma_i)^2 + 2\gamma_i + 1;$$

$$q = -\frac{2}{27}(1 - \gamma_i)^3 + \frac{1}{3}(1 - \gamma_i)(2\gamma_i + 1) - (1 - \gamma_i).$$

Обчислена послідовність амплітуд записана в табл. 1.

Таблиця 1. Значення a_i при $\nu = 3$

i	1	2	3	4
100 a_i , м	3,787	2,593	1,449	0,469



Осцилятор виконує лише чотири повних розмахи з перетином положення $x = 0$ і це підтверджує графік коливань на рис. 1,

одержаний числовим інтегруванням рівняння (1). комп'ютерним

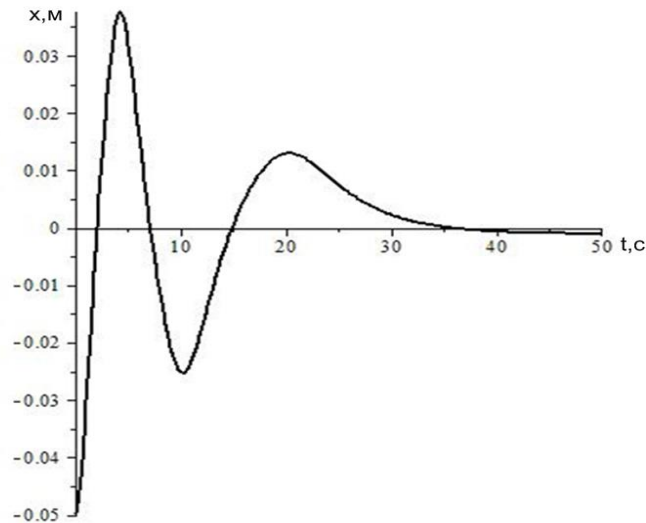


Рис. 1. Графік коливань при $\nu = 3$

Приклад 2. Розглянемо вільні коливання осцилятора, у якого: $\nu = 2$, $m = 1$ кг, $c = 400$ Н/м², $K = 0,5$ Нс/м, спричинені початковим відхиленням $x = -a_0$, $a_0 = 0,05$ м. Розрахунок послідовності амплітуд розмахів зводиться до розв'язання числовим методом рівняння:

$$\xi^3 + \gamma_i (\xi + 1)^{5/3} - 1 = 0,$$

у якому $\gamma_i = \frac{\lambda}{\sqrt{a_{i-1}}}$; $\lambda = 0,0182148$ м^{1/2}.

Тут при обчисленні λ по формулі (7) враховано, що: $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,678939$;

$$\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) = 0,940658.$$

Розрахована за формулою (11) послідовність амплітуд розмахів записана в табл. 2.

Таблиця 2. Значення a_i при $\nu = 2$

i	$10\xi_{j+1}$	$10^2 a_i, \text{ м}$	i	$10\xi_{j+1}$	$10^2 a_i, \text{ м}$
0	-	5,0000	7	7,37033	1,0755
1	8,52485	4,2624	8	6,98022	0,7507
2	8,40796	3,5838	9	6,45864	0,4849
3	8,27107	2,9642	10	5,73040	0,2778
4	8,10864	2,4036	11	4,65819	0,1294
5	7,91284	1,9019	12	2,98787	0,0387
6	7,67239	1,4592	13	0,31102	0,0012

Для порівняння на рис. 2,а,б показано графік коливань, одержаний числовим інтегруванням рівняння (1). Маємо задовільну відповідність результатів розрахунку двома способами. В табл. 2 при $i = 13$ є зайвий

розмах з дуже малою амплітудою, якого немає на рис. 2,б. Ця похибка наближеної теорії, що ґрунтується на методі енергетичного балансу.

Приклад 3. Використовуючи виведені наближені формули, знайдемо послідовність амплітуд коливань осцилятора з м'якою



характеристикою пружності, в якого: $\nu = 0,5$;
 $m = 1$ кг, $c = 100$ Н м^{-1/2}, $K = 1$ Нс/м;
 $a_0 = 0,05$ м. Для цього доводиться методом
ітерацій розв'язувати алгебраїчне рівняння:

$$\xi^{1,5} + \gamma_i (\xi + 1)^{1,75} - 1 = 0,$$

де $\gamma_i = \sqrt[4]{a_{i-1}}$; $\lambda = 0,0761260$ м^{-1/4}.

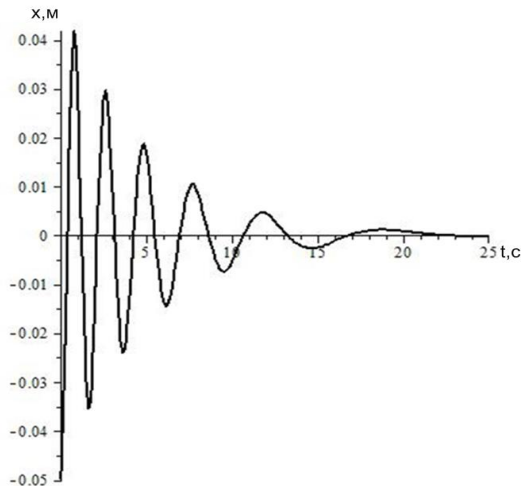
При обчисленні λ по формулі (7)
враховано, що [12]: $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1,3541179$;

$$\Gamma\left(\frac{13}{6}\right) = 1,0823435.$$

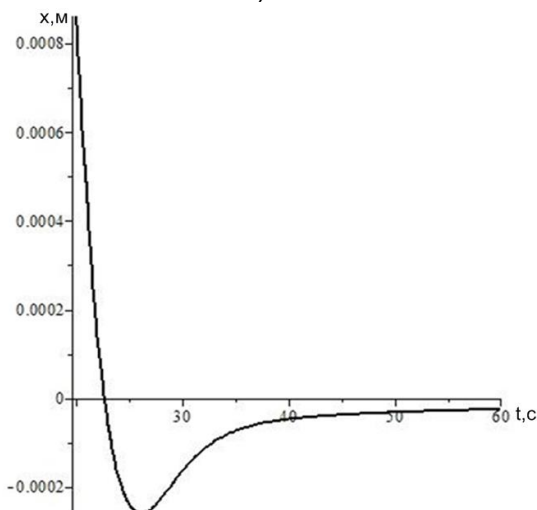
Розрахована послідовність з десяти перших
амплітуд розмахів по формулі (11) записана в
табл. 3.

Таблиця 3. Значення a_i при $\nu = 0,5$

i	$10\xi_{j+1}$	$10^2 a_i, \text{ м}$	i	$10\xi_{j+1}$	$10^2 a_i, \text{ м}$
1	9,23133	4,6157	6	9,29878	3,1643
2	9,24584	4,2676	7	9,30868	2,9463
3	9,25981	3,9517	8	9,32255	2,7467
4	9,27327	3,6645	9	9,33384	2,5637
5	9,28625	3,4030	10	9,34476	2,3957



а)



б)

Рис. 2. Графік коливань при $\nu = 2$: а) –
основна частина б) – заключна частина

Відповідний цьому проміжку руху графік
коливань, обчислений комп'ютерним
інтегруванням рівняння (1), подано на рис. 3.
Маємо задовільну узгодженість результатів на
рис. 3 і в табл. 3. Зі зростанням номера розмаху
 i збільшується відношення ξ_{j+1} , тобто дещо
зменшується тем спадання амплітуд розмахів.

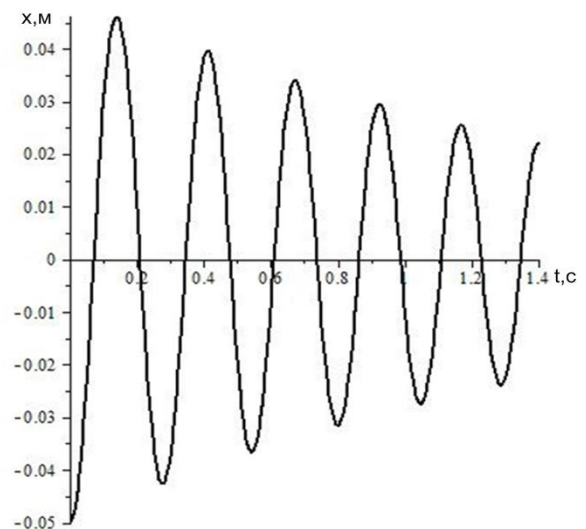
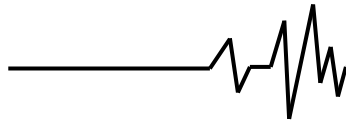


Рис. 3. Графік коливань при $\nu = 0,5$

Висновки. Методом енергетичного
балансу виведено рекурентні співвідношення
для наближеного розрахунку послідовності
амплітуд розмахів, без розв'язування рівняння
руху осцилятора. Показано, що у випадку
жорсткої ступеневої характеристики пружності
послідовність має обмежену кількість членів, а
в випадку м'якої характеристики послідовність
нескінченна. Проведено порівняння числових
результатів, одержаних за наближеними



формулами і числовим комп'ютерним інтегрування задачі Коші. Встановлено задовільну узгодженість результатів, одержаних різними методами.

Список використаних джерел

1. Теоретична механіка / І. В. Кузьо та ін. Харків : Фоліо, 2017. 780 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье И. А. Курс теоретической механики. Москва : Дрофа, 2006. 720 с.
3. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теория колебаний и стійкості руху. Київ : Вища школа, 2004. 525 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва : Дрофа, 2004. 591 с.
5. Коливання дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський та ін. Харків : Міськдрук, 2015. 116 с.
6. Динаміка дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський та ін. Харків : Міськдрук, 2016. 264 с.
7. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів : Львівська політехніка, 2014. 288 с.
8. Cveficanin L., Pogany T. Oscillator with a sum of Noninteger-Order Nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics*. 2012. Article ID 649050. 20 p.
9. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності. *Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал*. 2017. № 3 (86). С. 34-40.
10. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград : Машиностроение. 1976. 320 с.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). М. : Наука, 1979. 832 с.
12. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Москва : Наука, 1977. 344 с.
13. Дрогомирецька Х. Т. Про інтегрування спеціальних Атеб-функцій. *Вісник Львівського університету. Серія : Механіко-математична*. Львів. 1997. Вип. 46. С. 108-110..
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М. : Наука, 1974. 832 с.

Список джерел у транслітерації

1. Cusio I.V., Zinko Y.A., Vankovich T.-N. M. and that. (2017) *Teoretychna mekhanika [Theoretical mechanics]*. Kharkiv, Folio. 780.
2. Loytsyansky L.G., Lurie A.I. (2006) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki [The course of theoretical mechanics]*. Moscow, Bustard. 720.
3. Vasilenko M.V., Alekseychuk O.M. (2004) *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion]*. Kiev, High School. 525.
4. Babakov I.M. (2004) *Teoriya kolebaniy [Theory of fluctuations]*. Moscow, Drofa, 591.
5. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. & Tishchenko L.N. (2015) *Kolyvannya dysypatyvnykh ostsylatoriv [Dissipative oscillators oscillations]*. Kharkiv, Miskdruk. 116.
6. Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N. & Olshanskiy S.V. (2016) *Dynamika dysypatyvnykh ostsylatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]*. Kharkiv, Miskdruk. 264.
7. Pukach P. Ya. (2014) *Iakisni metody doslidzhenia nelineinix kolvaniianux sistem [Qualitative methods for the investigation of nonlinear oscillations of systems]*. Lviv : Lviv Polytechnic. 288.
8. Cveficanin L., Pogany T. (2012) *Oscillator with a sum of Noninteger -Order Nonlinearities*. Hindawi Publishing Cororation, *Journal of Applied Mathematics*. Article ID 649050, 20.
9. Olshanskiy V.P. Olshanskiy S.V. (2017) *Pro rukh ostsylatora zi stepenevoyu kharakterystykoyu pruzhnosti [Of the vibration elasticity in engineering and technology]*. Vinnytsia. № 3 (86), 34-40.
10. Panko Ya.G. (1976) *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]*. Leningrad, Mechanical Engineering. 320.
11. Abramovits M., Stigan I. (1979) *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]*. Moscow, Science. 832.
12. Janke E., Jemde F., Ljosh F. (1977) *Special'nye funktsii [Special functions]*. Moscow, Nauka. 344.
13. Drogomiretska H.T. (1997) *Pro intehruvannya spetsial'nykh Ateb-funktsiy [About the integration of special Ateb functions]*. Bulletin of the University of Lviv. Series: Mechanical and Mathematical. Lviv. Issue. 46, 108-110.
14. Korn G., Korn T. (1974) *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) [Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers)]*. Moscow, Science. 832.



О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАСТОЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ЛИНЕЙНЫМ ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Рассмотрено свободные колебания осциллятора со степенно-нелинейной характеристикой упругости при действии линейного вязкого сопротивления. Методом энергетического баланса, который распространен в механике, расчет амплитуд свободных затухающих колебаний сведен к вычислению корней алгебраического уравнения, которое имеет точное аналитическое решение только при линейной упругости осциллятора. В случае произвольного положительного показателя нелинейной упругости требуется численное решение уравнения. Для этого в работе использован итерационный метод Ньютона, который имеет быструю сходимость итераций при произвольном начальном приближении. По результатам анализа коэффициентов уравнения установлено, что в случае жесткой характеристики упругости, когда показатель нелинейности больше единицы, колебания сводятся к конечному числу затухающих размахов, то есть они ограничены во времени, а в случае мягкой характеристики упругости, когда показатель нелинейности меньше единицы, они продолжаются до бесконечности, как и у линейного диссипативного осциллятора. Исследования проведено методом энергетического баланса и численным интегрированием дифференциального уравнения колебаний на компьютере. Работу силы вязкого сопротивления вычислено приближенно, с использованием периодических Атеб-функций, которые точно описывают свободные незатухающие колебания при отсутствии сопротивления. В итоге получены приближенные итерационные зависимости для вычислений амплитуд размахов, которые затухают в ходе движения. Проведено сравнение числовых результатов, полученных по приближенным формулам и численным компьютерным интегрированием нелинейной задачи Коши. Отмечено удовлетворительное согласование результатов, как при жесткой, так и при мягкой характеристикам упругости, что подтвердило адекватность приближенных аналитических решений задачи динамики. Основное преимущество изложенного приближенного способа расчета заключается в отсутствии необходимости строить аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения движения осциллятора, что является достаточно сложной математической

задачей. К тому же, он дал возможность установить условия, когда осцилляторы с вязким сопротивлением и сухим трением имеют аналогичные колебательные свойства.

Ключевые слова: свободные затухающие колебания, степенно-нелинейная характеристика упругости, вязкое линейное сопротивление, метод энергетического баланса, периодические Атеб-функции.

ON THE POSSIBILITY OF STAGNATION OF FREE OSCILLATIONS OF A NONLINEARLY ELASTIC OSCILLATOR WITH A LINEAR VISCOUS RESISTANCE

The free oscillations of an oscillator with a power-nonlinear elasticity characteristic under the action of linear viscous resistance are considered. Using the energy balance method, which is widespread in mechanics, the calculation of the amplitudes of free damped oscillations is reduced to calculating the roots of an algebraic equation, which has an exact analytical solution only with linear elasticity of the oscillator. In the case of an arbitrary positive indicator of nonlinear elasticity, a numerical solution of the equation is required. For this, the Newton's iterative method was used in the work, which has fast convergence of iterations at an arbitrary initial approximation. According to the results of the analysis of the coefficients of the equation established, that in the case of a rigid characteristic of elasticity, when the nonlinearity is greater than unity, the oscillations are reduced to a finite number of decaying ranges, that is, they are limited in time, and in the case of a soft characteristic of elasticity, when the nonlinearity is less than unity, they continue to infinity, as linear dissipative oscillator. The research is given by the method of energy balance and numerical integration of the differential equation of oscillations on a computer. The work of the force of viscous resistance is calculated approximately using periodic Ateb functions that accurately describe free undamped oscillations in the absence of resistance. As a result, approximate iterative dependences are obtained for calculating the amplitudes of the ranges that decay during movement. The numerical results obtained using approximate formulas and numerical computer integration of the nonlinear Cauchy problem are compared. Their satisfactory agreement was noted. A satisfactory agreement was noted between the results for both hard and soft elastic characteristics, which confirmed the adequacy of approximate analytical solutions to the dynamics problem. The main advantage of the described approximate calculation method is that there is no need to build an analytical solution to the nonlinear



differential equation of motion of the oscillator, which is a rather complicated mathematical problem. Furthermore, it made it possible to establish conditions under which the oscillator with a viscous and dry friction resistance have similar oscillation properties.

Keywords: free damped oscillations, power-nonlinear elasticity characteristic, viscous linear resistance, energy balance method, periodic Ateb-functions.

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Василій Павлович – доктор фізико-математических наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Olshanskiy Vasyl Pavlovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильевич – кандидат фізико-математических наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Phd in Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com