Ольшанський В.П.
д. ф.- м. н., професор

Ольшанський С.В.
к. ф.- м. н.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка

Olshanskii V.

Olshanskii S.

Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture

УДК 534.1:539.3

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА МЕХАНІЧНОГО УДАРУ В ТЕОРІЇ ГЕРЦА

Узагальнено відомої класичної задачі Герца, про удар двох твердих тіл, з урахуванням контактних деформацій, досягнуто введенням у розгляд внутрішніх гістерезисних втрат енергії, що супроводжують динамічне деформування тіл під час удару. На відміну від класичного варіанту теорії, в узагальненій задачі не співпадають, а відрізняються графіки залежності сили удару від зближення центрів мас тіл на етапах їх стискання та розтискання. Тому диференціальні рівняння руху на цих етапах мають різні значення коефіцієнтів. Їм відповідають також різні тривалості у часі названих етапів, причому тривалість стискання більша ніж розтискання. Перші інтеграли нелінійних диференціальних рівнянь руху виражено в елементарних функціях а другі – через періодичні Ateb-функції. Виведено компактні формули для обчислення максимумів: зближення центра мас тіл, сили удару, розмірів площадки контакту, тиску в центрі цієї площадки. Одержано також компактний вираз коефіцієнта відновлення швидкості при прямому центральному ударі, причому його значення менші одиниці та не залежать від швидкості зіткнення і мас тіл, підданих удару. Це узгоджується з відомою гіпотезою Ньютона, яку традиційно використовують в теорії частково пружного стереомеханічного удару.

***Ключові слова**: механічний удар, контактні деформації, сила удару, етапи стискання та розтискання, гістерезісні втрати енергії, коефіцієнт відновлення швидкості.*

Постановка проблеми. Явище механічного удару досить часто спостерігається на практиці. Воно може бути причиною руйнування деталей і вузлів машин. Тому з ударом пов'язані розрахунки на динамічну міцність в опорі матеріалів [1, 2]. Теорію удару висвітлюють також в окремих спеціальних виданнях [3-5]. Із різних варіантів теорій лише теорії Г. Герца та М. О. Кільчевського дають розгортку процесу удару в часі та визначають силу контактної взаємодії між тілами. Інші вважать удар миттєвим і використовують поняття імпульсу сили. Тому теорію Г. Герца використовують в багатьох інженерних дослідженнях, серед яких вкажемо коливання стрижнів і пластин при механічному ударі [6-8], хоча вона стосується удару ідеально пружних тіл. За цією теорією коефіцієнт відновлення швидкості дорівнює одиниці, що не підтверджується практикою, бо насправді, він менший одиниці. Отже є потреба підвищити адекватність названої теорії, зберігаючи її можливості більш повно за інші моделювати процес механічного удару. З цим пов'язана мета дослідження.

Формулювання мети досліджень. *Метою* статті є узагальнення задачі механічного удару в теорії Г. Герца додатковим урахуванням гістерезисних втрат енергії, що супроводжують процес динамічного деформування тіл.

Виклад основного матеріалу дослідження. При моделюванні процесу удару використаємо нелінійну залежність сили удару $F(x)$ від величини зближення центрів мас тіл x, графічно зображено на рисунку 1.

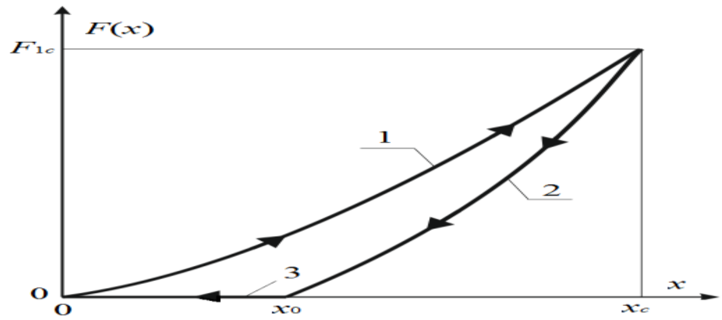

Рис. 1. Залежність сили удару від зближення центрів мас тіл:
1 – $F(x)=F_1(x)-$ **при стисканні; 2 –** $F(x)=F_2(x)-$ **при розтисканні;**
3 – відновлення форми пружних розвантажених тіл

Процеси стискання і розтискання тіл проходять за різними кривими, між якими утворюється петля гістерезису. Площа петлі гістерезису характеризує втрати механічної енергії. Саме так враховують втрати механічної енергії в теорії коливань [9].

1. Етап стискання тіл. На цьому етапі зближення $x(t)$ центрів мас двох незакріплених твердих тіл з масами m_1 і m_2 описуємо нелінійним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x}=-F_1(x)=-\beta\,x^{3/2},\qquad(1)$$

де $m=\dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}$, $\beta-$ коефіцієнт, який залежить від форми та пружних характеристик тіл згідно з розв'язком контактної задачі теорії пружності [2]; $F_1(x)-$ сила удару при стисканні тіл; крапка над x означає похідну за часом t.

Так, при ударі двох куль з радіусами R_1 і R_2, матеріали яких на етапі стискання мають модулі пружності E_1 і E_2 та коефіцієнти Пуассона μ_1 і μ_2, множник β визначається залежністю [2]:

$$\beta=\frac{4}{3Q}\sqrt{R},\qquad(2)$$

у якій $Q=\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}$;

$$R=\frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}.$$

Рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0)=0;\quad \dot{x}(0)=\upsilon.\qquad(3)$$

де $\upsilon-$ швидкість зіткнення тіл.

Перший інтеграл цієї задачі Коші має вигляд:

$$\dot{x}=\sqrt{\upsilon^2-\frac{4\beta}{5m}x^{5/2}}.\qquad(4)$$

Із нього випливає, що максимальне зближення центрів мас тіл x_c, при якому $\dot{x}=0$, становить:

$$x_c=\left(\frac{5m}{4\beta}\upsilon^2\right)^{2/5}.\qquad(5)$$

Другий інтеграл рівняння (1), що задовольняє умови (2), виражається через Ateb-синус $Sa(v,n;\xi)$ добутком [10]:

$$x(t)=x_c\;Sa\left(\frac{3}{2},1;\frac{5}{4}\frac{\upsilon}{x_c}t\right).\qquad(6)$$

В дослідженні Ольшанського В.П. [10] надрукована таблиця цієї спеціальної функції, а також запропонована апроксимація її елементарними функціями, що спрощує розрахунки.

Згідно з (1), (4), зміна сили удару у часі підпорядкована закону

$$F_1(x)=\beta[x(t)]^{3/2}=\beta\,x_c^{3/2}\left[Sa\left(\frac{3}{2},1;\frac{5\upsilon}{4x_c}t\right)\right]^{3/2}\qquad(7)$$

,

де $F_{1c} = \beta x_c^{3/2}$ – максимальне значення сили удару.

Тиск у центрі кругової площадки контакту $q(t)$ при зіткненні двох куль описується виразом:

$$q(t) = \frac{3}{2}\frac{F_1(t)}{\pi a^2(t)} = \frac{3\beta}{2\pi R} x_c^{1/2} \left[Sa\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{5\upsilon}{4x_c} t\right)\right]^{1/2}, \quad (8)$$

за умови, що радіус площадки контакту $a(t)$ становить:

$$a(t) = (R x_c)^{1/2} \left[Sa\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{5}{4}\frac{\upsilon}{x_c} t\right)\right]^{1/2}. \quad (9)$$

Для обчислення максимумів цих величин маємо: $\max q(t) = q_c = \frac{3\beta}{2\pi R} x_c^{1/2}$, $\max a(t) = a_c = (R x_c)^{1/2}$.

Процес стискання проходить на проміжку $t \in [0; t_c]$, де t_c – корінь рівняння:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{5\upsilon}{4x_c} t_c\right) = 1. \quad (10)$$

Згідно з таблицею задачі Герца про удар [10]:

$$\frac{\upsilon}{x_c} t_c \approx 1{,}4716 \Rightarrow t_c \approx 1{,}4716 \frac{x_c}{\upsilon} \quad (11)$$

або з урахуванням (3):

$$t_c \approx 1{,}609 \left(\frac{m}{\beta\sqrt{\upsilon}}\right)^{2/5}.$$

2. На етапі розтискання рух центрів мас тіл у часі описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{y} = -F_2(y) = -\beta^* y^{3/2}. \quad (12)$$

Тут $y = x - x_0$; x_0 – зближення центрів мас, при якому зникає контакт двох тіл; $F_2(y)$ – сила удару при розтисканні.

Коефіцієнт β^* залежить від модулів пружності E_1^* і E_2^* та коефіцієнтів Пуассона μ_1^* і μ_2^* матеріалів тіл при їх розвантаженні. У випадку двох куль він подається формулою:

$$\beta^* = \frac{4}{3Q^*}\sqrt{R}, \quad (13)$$

де $Q^* = \frac{1-(\mu_1^*)^2}{E_1^*} + \frac{1-(\mu_2^*)^2}{E_2}$.

Рівняння (5) розв'язуємо при початкових умовах:

$$y(t_c) = y_c = x_c - x_0; \quad \dot{y}(t_c) = 0.$$

Перший інтеграл рівняння (5) виражається в елементарних функціях:

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta^*}{m}\left(y_c^{5/2} - y^{5/2}\right)}, \quad (14)$$

а другий має вигляд:

$$\int_{y/y_c}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}} = \tau = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta^*\sqrt{y_c}}{m}}(t - t_c). \quad (15)$$

Враховуючи інтегральне подання періодичного Ateb-косинуса $Ca(v, n; \eta)$ [11], із (7) одержуємо:

$$y(t) = y_c Ca\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{5}{4}\tau\right). \quad (16)$$

Сила взаємодії тіл на етапі розтискання підпорядкована закону:

$$F_2(t) = \beta^*[y(t)]^{3/2} = \beta^* y_c^{3/2}\left[Ca\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{5}{4}\tau\right)\right]^{3/2} \quad (17)$$

.

При цьому, згідно з рисунком, має місце рівність $F_1(t_c) = F_2(t_c)$ або

$$\beta^* y_c^{3/2} = \beta^*(x_c - x_0)^{3/2} = \beta x_c^{3/2}. \quad (18)$$

Для розрахунку тиску в центрі площадки контакту та радіуса цієї площадки можна використати формули:

$$q(t)=\frac{3}{2}\frac{F_2(t)}{\pi\, a^2(t)}=\frac{3\beta}{2\pi R}\frac{x_c^{3/2}\left[Ca\left(\frac{3}{2},1;\frac{5}{4}\tau\right)\right]^{3/2}}{x_0+y_c\,Ca\left(\frac{3}{2},1;\frac{5}{4}\tau\right)}; \qquad (19)$$

$$a(t)=\left[R\,x_0+R\,y_c\;Ca\left(\frac{3}{2},1;\frac{5}{4}\tau\right)\right]^{1/2}.$$

Тривалість процесу удару t_y визначається рівнянням:

$$Ca\left(\frac{3}{2},1;\frac{5}{4}\tau_y\right)=0, \qquad (20)$$

у якому $\tau_y=\sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta^*\cdot\sqrt{y_c}}{m}}\left(t_y-t_c\right).$

Корінь рівняння (9) має наближене значення $\tau_y\approx 1{,}4716$. Тому:

$$t_p=t_y-t_c\approx\frac{1{,}4716}{\sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta^*\cdot\sqrt{y_c}}{m}}}=\frac{1{,}4716}{\sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta^*\cdot y_c^{3/2}}{m\,y_c}}} \qquad (21)$$

Враховуючи (3) і (8), формулі (10) надаємо більш компактну форму:

$$t_p=\frac{1{,}4716}{\upsilon}\sqrt{x_c y_c}. \qquad (22)$$

Оскільки при врахуванні гістерезисних втрат енергії $y_c<x_c$, то згідно з (11) $t_p<t_c$. Отже в узагальненій задачі удару тривалість етапу стискання t_c більша, ніж етапу розтискання t_p.

Обчислимо далі швидкість u і кінці удару. Поклавши $y=0$ в (6), отримуємо:

$$\dot{y}=u=\sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta^*}{m}y_c^{5/2}}=\sqrt{\frac{4}{5}\frac{\beta}{m}\frac{\beta^*}{\beta}y_c^{5/2}}=\upsilon\sqrt{\frac{\beta^*}{\beta}\left(\frac{y_c}{x_c}\right)^{5/2}}. \qquad (23)$$

Із співвідношення (8) випливає, що

$$\frac{y_c}{x_c}=\left(\frac{\beta}{\beta^*}\right)^{2/3}.$$

Тому:

$$u=\upsilon\left(\frac{\beta}{\beta^*}\right)^{1/3}. \qquad (24)$$

Таким чином, коефіцієнт відновлення швидкості K виражається компактною формулою:

$$K=\frac{\upsilon}{u}=\sqrt[3]{\frac{\beta}{\beta^*}}. \qquad (25)$$

Оскільки $\beta<\beta^*$ то $K<1$, що підтверджується практикою. Коефіцієнт відновлення швидкості не залежить від мас тіл підданих удару, а також від швидкості їх зіткнення. Цей висновок повністю узгоджується з відомою в теорії механічного удару гіпотезою І. Ньютона.

Приклад розрахунку. Користуючись виведеними формулами, обчислимо характеристики удару при вертикальному падінні гумової кулі на абсолютно жорстку горизонтальну підлогу. Для проведення розрахунків приймаємо: $R_1=0{,}015$ м; $m_1=21{,}206\cdot 10^{-3}$ кг; $E_1=4\cdot 10^6$ Па; $E_1^*=7{,}5\cdot 10^6$ Па; $\mu_1=\mu_1^*=0{,}5$; $\upsilon=6$ м/с; $R_2=\infty$; $m_2=\infty$; $E_2=E_2^*=\infty$. За цих вихідних даних на етапі стискання маємо: $Q=1{,}875\cdot 10^{-7}$ Па$^{-1}$; $\beta=870929{,}686$ Па м$^{1/2}$; $x_c=4{,}129\cdot 10^{-3}$ м; $F_{1c}=231{,}074$ Н; $a_c=7{,}870\cdot 10^{-3}$ м; $q_c=1781378{,}994$ Па при $t=t_c=1{,}01\cdot 10^{-3}$ с. На етапі розтискання: $Q^*=10^{-7}$ Па$^{-1}$; $\beta^*=1632993{,}161$ Па; $x_0=1{,}414\cdot 10^{-3}$ м; $y_c=2{,}715\cdot 10^{-3}$ м; $t_p=8{,}21\cdot 10^{-4}$ с.

Коефіцієнт відновлення швидкості $K=0{,}811<1$. Розрахунки підтверджують вірогідність виведених формул.

Висновки. При врахуванні гістерезисних втрат енергії характеристики удару на етапі стискання мають інші значення, ніж на етапі розтискання. Їх зміна у часі на етапі стискання описується Ateb-синусом, а на етапі розтискання – Ateb-косинусом. Тривалість стискання більша, ніж тривалість розтискання. В узагальненій задачі коефіцієнт відновлення швидкості менший одиниці. Він не залежить від мас тіл, підданих удару та від швидкості їх зіткнення.

Список використаних джерел

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Гурняк Л. І. Опір матеріалів / Л. І. Гурняк, Ю. В. Гуцуляк, Т. Б. Юзків. – Львів : Новий світ, 2005. – 364 с.
3. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – М. : Стройиздат, 1965. – 447 с.
4. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.
5. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара / Я. Г. Пановко. – Москва : Наука, 1977. – 223 с.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Х. Янг, У. Уивер. – Москва : Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. Надутый В. П. Взаимодействие кусков материала с футерованным валком вибрационного классификатора / В. П. Надутый, В. Ф. Ягнюков, И. В. Ягнюкова // Вибрации в технике и технологиях. – 2014. – № 1 (73). – С. 94-99.
8. Ольшанский В. П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В. П. Ольшанский, Л. Н. Тищенко, С. В. Ольшанский. – Харьков : Міськдрук, 2012. – 320 с.
9. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А. А. Ларин. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
10. Ольшанський В. П. Ateb-синус у розвязку задачі Герца про удар / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98-103. – Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.
11. Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37-42.

Список джерел у транслітерації

1. Pisarenko G.S., Kvitka A.L., & Umansky E.S. (2004) *Opir materialiv [Materials Resistance]*. – Kyiv: Vyshcha shkola.
2. Gurniak L.I., Gutsulyak Yu.V., & Yuzkiv T.B. (2005) *Opir materialiv [Materials Resistance]*. – Lviv: Novyi svit.
3. Goldsmith W. (1965) *Udar. Teoriya i fizicheskie svojstva soudaryaemyh tel [Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies].* – M.: Stroyizdat.
4. Kilchevsky N.A. (1976) *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdyh tel. Udar. [Dynamic contact compression of solids. Blow]*. – Kiev : Naukova Dumka.
5. Panovko Y.G (1977) *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara. [Introduction to the theory of mechanical shock]* – M.: Nauka.
6. Timoshenko S.P., Yang D.H., & Weaver U. (1985) *Kolebaniya v inzhenernom dele [Fluctuations in engineering]* – M: Mashinostroenie.
7. Naduty V.P., Yagnyukov V.F., & Yagnyukova I.V. (2014) Vzaimodejstvie kuskov materiala s futerovannym valkom vibracionnogo klassifikatora [Interaction of pieces of material with a lined roll of a vibration classifier]. *Vibracii v tekhnike i tekhnologiyah, 1,* 94-99 [in Russian].
8. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V., & Tishchenko L.M. (2012) *Kolebaniya sterzhnej i plastin pri mekhanicheskom udare [Oscillations of rods and plates during a mechanical shock]* – Kharkov: Miskdruk.
9. Larin A.A. (2013) *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskih kolebanij [Essays history of development theory of mechanical oscillations]* – Sevastopol: Weber.
10. Olshanskiy V.P., & Olshanskiy S.V. (2018) Ateb-sy`nus u rozvyazku zadachi Gercza pro udar [Ateb-sin in solving the Hertz problem]. *Visnyk NTU «KhPI». – Kharkiv : NTU «KhPI», Seriia : Matematychne modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh. 3 (1279),* 98-103 [in Ukrainian].
11. Gricik V.V., Nazarkevich M.A. (2007) Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij [Mathematical models of algorithms and implementation Atte functions] *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy, 12,* 37-42 [in Ukrainian].

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИЧЕСКОГО УДАРА В ТЕОРИИ ГЕРЦА

Обобщение известной классической задачи Герца об ударе двух твердых тел, с учетом контактных деформаций достигнуто введением в рассмотрение внутренних гистерезисных потерь энергии, которые сопровождают динамическое деформирование тел при ударе. В отличие от классического варианта теории, в обобщенной задаче не совпадают, а отличаются графики зависимости силы удара от сближения центров масс тел на этапах их сжатия и расжатия. Поэтому

дифференциальные уравнения движения на этих этапах имеют разные значения коэффициентов. Им соответствуют также разные продолжительности во времени названных этапов, причем продолжительность сжатия больше, чем длительность расжатия. Первые интегралы нелинейных дифференциальных уравнений движения выражены в элементарных функциях, а вторые – через периодические Ateb-функции. Выведены компактные формулы для вычисления максимумов: сближения центров масс тел, силы удара, размеров площадки контакта, давления в центре этой площадки. Получено также компактное выражение коэффициента восстановления скорости при прямом центральном ударе, причем его значение меньше единицы и не зависит от скорости столкновения и масс тел, подвергнутых удару. Это согласуется с известной гипотезой Ньютона, которую традиционно используют в теории частично упругого стереомеханического удара.

Ключевые слова: механический удар, контактные деформации, сила удара, этапы сжатия и разжатия, гистерезисные потери энергии, коэффициент восстановления скорости.

THE GENERALIZED PROBLEM OF A MECHANICAL IMPACT IN THE HERZ THEORY

The generalization of the well-known classical Hertz problem of the impact of two solids, taking into account contact deformations, was achieved by introducing into consideration the internal hysteresis energy losses, accompanying the dynamic deformation of bodies upon impact. In contrast to the classical version of the theory, in the generalized problem they do not coincide, but the graphs of the dependence of the impact force on the convergence of the centers of mass of the bodies at the stages of their compression and stretching differ. Therefore, the differential equations of motion at these stages have different values of the coefficients. They also correspond to different durations in time of the mentioned stages, and the duration of compression is longer than the duration of decompression. The first integrals of the nonlinear differential equations of motion are expressed in elementary functions and the second integrals are expressed through periodic Ateb-functions. Compact formulas have been derived for calculating the maxima: the convergence of the centers of mass of the bodies, the impact force, the dimensions of the contact area, the pressure at the center of this area. A compact expression was also obtained for the coefficient of speed recovery for a direct central impact, moreover, its value is less than unity and does not depend on the speed of the collision and the masses of the bodies subjected to the impact. This is consistent with the well-known Newton hypothesis, which is traditionally used in the theory of partially elastic stereomechanical shock.

Keywords: mechanical shock, contact deformation, impact force, compression and decompression stages, hysteresis energy loss, speed recovery factor.

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, (e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, (e-mail: stasolsh77@gmail.com).

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и деталей машин Харьковского национального университета сельского хозяйства. (e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Ольшанский Станислав Васильевич – к.ф.-м.н., доцент, Харьковский национальный университет сельского хозяйства (e-mail: stasolsh77@gmail.com).

Olshanskiy Vasiliy Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov. (e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – PhD in Physics and Mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; (e-mail: stasolsh77@gmail.com).