**Ольшанський В.П.**

д. ф.- м. н., професор

**Ольшанський С.В.**

к. ф.- м. н.

**Харківський національний  
технічний університет  
сільського господарства  
імені П. Василенка****Olshanskii V.****Olshanskii S.****Petro Vasylenko Kharkiv  
National Technical  
University of Agriculture****УДК 534.1:539.3****DOI: 10.37128/2306-8744-2019-2-7**

## **РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ УДАРУ ПРУЖНИХ ТІЛ, ОДНЕ З ЯКИХ КОНУС**

*Розглянуто ударну взаємодію пружних тіл з невеликою початковою швидкістю, коли одне з них обмежене в зоні контакту з іншим конічною поверхнею обертання. З використанням відомого розв'язку статичної контактної задачі теорії пружності, що знайшов І.Я. Штаєрман, та припущень Г.Герца, які він зробив при створенні власної теорії квазістатичного удару твердих тіл, складено нелінійне диференціальне рівняння сили удару, як функції часу. Його замкнений аналітичний розв'язок, що описує процес динамічної взаємодії пружних тіл у часі, виражено через періодичний Атеб-синус. Для спрощення використання одержаного аналітичного розв'язку в розрахунках, складена окрема таблиця вказаної спеціальної функції та запропонована апроксимація її елементарними функціями, відносна похибка якої менша одного відсотка. З метою підтвердження вірогідності побудованих розв'язків, додатково проведено інтегрування рівняння сили удару на комп'ютері. Встановлена гарна відповідність числових результатів, до яких призводять побудований аналітичний розв'язок і числове інтегрування нелінійної задачі Коші на комп'ютері для диференціального рівняння другого порядку. Виведено: компактні формули максимумів зусилля удару та величини стискання тіл, а також формулу тривалості процесу удару. Відзначено, що одержані результати можуть бути використані при визначенні динамічних навантажень, які діють на футеровані гумою валки вібраційного класифікатора, при падінні на них кусків твердої сировини. Наведено приклади розрахунків і проведено порівняльний аналіз результатів.*

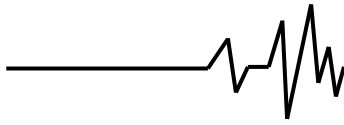
**Ключові слова:** сила удару, нелінійне диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок, Атеб-синус, конічне тіло.

**Постановка проблеми.** Враховуючи малу тривалість процесу удару, в технічних розрахунках часто замість сили удару використовують її імпульс або будують теорію на інтегральних енергетичних співвідношеннях. Це, насамперед, стосується моделей механічного удару, які поширені в опорі матеріалів [1-4]. Першою теорією, яка дала можливість обчислити величину сили удару та тривалість цього короткочасного процесу є теорія Г. Герца [5]. Вона отримала подальший розвиток у численних працях, із яких відзначимо монографічні видання [6-9]. В цих, та інших публікаціях, вона удосконалена урахуванням нестационарних коливань тіл, підданих удару. За тіло, що вдаряє в них, зазвичай, приймають пружну кулю або тверде тіло іншої форми, обмежене в зоні контакту

поверхнею другого порядку. Деякий виняток становить робота [7], в якій також розглянуто випадок більш щільного контакту тіл, коли вони обмежені поверхнями обертання більш високого порядку. В той же час залишають мало вивченими закономірності удару тіл, що мають особливу точку на поверхні контакту, до яких відноситься і конус. Саме цим спричинена мета роботи.

### **Формулювання мети досліджень.**

Визначення сили ударної взаємодії пружних тіл, одне з яких є конусом, аналіз зміни сили у часі та дослідження її екстремальних властивостей. При цьому ставляться також задачі визначення й інших характеристик ударного процесу, таких як зближення центрів мас тіл, тривалість удару тощо.



**Виклад основного матеріалу дослідження.** 1. Виведення рівняння сили удару. Виходимо з відомого розв'язку статичної контактної задачі теорії пружності, який побудував І.Я. Штаєрман [10], розглядаючи взаємодію конуса обертання з іншим пружним тілом. У відповідності з указаним розв'язком зближення центрів мас тіл  $x$  під дією сили стискання  $P$ , визначається формулою:

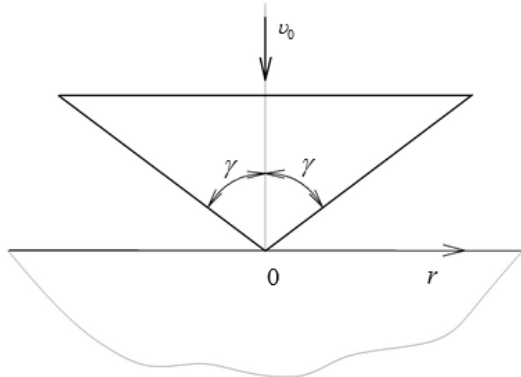
$$x = KP^{1/2}, \quad (1)$$

В якій:

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(Q_1 + Q_2) \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2};$$

$E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$  – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл;  $2\gamma$  – кут розкриття конуса (див. рис. 1).



**Рис. 1. Схема взаємодії тіл**

Візьмемо послідовно дві похідних за часом  $t$  з виразу (1). Це дає наступні вирази швидкості та прискорення:

$$\dot{x} = \frac{1}{2} K P^{-1/2} \dot{P},$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} K \left( \ddot{P} P^{-1/2} - \frac{1}{2} P^{-3/2} \dot{P}^2 \right).$$

Враховуючи їх, рівнянню відносного руху тіл при ударі [5]:

$$M \ddot{x} = -P$$

надаємо форму:

$$\frac{1}{2} M K \left( \ddot{P} P^{-1/2} - \frac{1}{2} P^{-3/2} \dot{P}^2 \right) = -P. \quad (2)$$

Тут  $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $m_1, m_2$  – маси тіл, задіяних в ударі.

Подальшим перетворенням вираз (2) зводимо до:

$$\ddot{P} - \frac{1}{2} \frac{\dot{P}^2}{P} + \frac{2}{MK} P^{3/2} = 0. \quad (3)$$

Це нелінійне диференціальне рівняння сили удару тіл. Його розв'язок визначає силу  $P = P(t)$ , як функцію часу  $t$ .

2. Побудова розв'язку рівняння сили удару на етапі динамічного стискання тіл. Припускаємо, що процес проходить на проміжку  $t \in (0, t_c)$ . Враховуючи, що в (3)

явно не входить  $t$ , замінимо  $\ddot{P}$  на  $\ddot{P} = \dot{P} \frac{d\dot{P}}{dP}$ . Це понижує порядок (3) з другого до першого, бо тепер:

$$\frac{d\dot{P}}{dP} - \frac{1}{2} \frac{\dot{P}}{P} + \frac{2}{MK} \frac{P^{3/2}}{\dot{P}} = 0. \quad (4)$$

Далі подаємо  $\dot{P}$  добутком  $\dot{P} = F(P) \cdot G(P)$ , у якому  $F(P), G(P)$  – невідомі функції. Підстановка добутку в (4) дає систему рівнянь:

$$\frac{dF}{dP} = \frac{1}{2} \frac{F}{P}; \quad \frac{dG}{dP} = -\frac{2}{MK} \frac{P^{3/2}}{F^2 G}.$$

Перше з них має розв'язок:

$$F(P) = P^{1/2}, \quad (5)$$

а друге, з урахуванням (5), приймає вигляд:

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{2}{MK} \frac{P^{1/2}}{G}.$$

Його інтегруванням знаходимо, що:

$$G(P) = \sqrt{C - \frac{8}{3MK} P^{3/2}},$$

де  $C$  – довільна стала.

Таким чином:

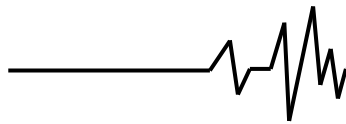
$$\dot{P} = \sqrt{P \left( C - \frac{8}{3MK} P^{3/2} \right)}, \quad (6)$$

що є розв'язком рівняння (4) з точністю до константи  $C$ .

Позначимо символом  $P_c$  максимум сили удару, який настає при  $\dot{P} = 0$ . Тоді

$$C = \frac{8}{3MK} P_c^{3/2} \text{ і (6) набуває вигляд:}$$

$$\dot{P} = \frac{dP}{dt} = \sqrt{\frac{8}{3MK}} \sqrt{P \left( P_c^{3/2} - P^{3/2} \right)}.$$



Проінтегрувавши цей вираз, з урахуванням того, що  $P=0$  при  $t=0$ , отримуємо:

$$\int_0^P \frac{dy}{\sqrt{y(P_c^{3/2} - y^{3/2})}} = \sqrt{\frac{8}{3MK}} t.$$

Перейдемо до нової змінної інтегрування  $z = y/P_c$ . Тоді:

$$\int_0^{P/P_c} \frac{dz}{\sqrt{z(1 - z^{3/2})}} = \sqrt{\frac{8P_c^{1/2}}{3MK}} t. \quad (7)$$

Далі заміною  $z = u^2$  виразу (7) надаємо більш компактну форму:

$$\int_0^{\sqrt{P/P_c}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = \lambda t, \quad (8)$$

де

$$\lambda = \sqrt{\frac{2P_c^{1/2}}{3MK}}. \quad (9)$$

Верхня межа інтегрування в (8) є Атеб-синусом [11-13]. Тому:

$$\sqrt{P/P_c} = \text{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2} \lambda t\right).$$

Звідки випливає, що:

$$P(t) = P_c \cdot \left[ \text{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2} \lambda t\right) \right]^2. \quad (10)$$

Сила  $P(t)$  досягає максимального значення  $P_c$ , коли:

$$\text{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2} \lambda t\right) = 1.$$

Це рівняння має корінь:

$$\lambda t = \lambda t_c = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}},$$

де інтеграл виражається через гама-функцію  $\Gamma(z)$  по формулі:

$$I = \sqrt[3]{4} \frac{\Gamma^2(4/3)}{\Gamma(5/3)}.$$

Враховуючи, що [14]:

$$\Gamma(4/3) \approx 0,8929795;$$

$$\Gamma(5/3) \approx 0,9027453, \quad \text{одержуємо:}$$

$I \approx 1,402182$ . Тому тривалість процесу стискання становить:

$$t_c = \frac{I}{\lambda} \approx \frac{1,402182}{\lambda}. \quad (11)$$

Щоб виразити невідоме  $P_c$  через швидкість зіткнення тіл  $v_0$ , скористаємося теоремою про зміну кількості руху. За цією теоремою та у відповідності з (10):

$$Mv_0 = \int_0^{t_c} P(t) dt = P_c \int_0^{t_c} \left[ \text{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2} \lambda t\right) \right]^2 dt.$$

Замінімо змінну інтегрування по формулі  $\lambda t = \xi$ . Тоді:

$$Mv_0 = \frac{P_c}{\lambda} \int_0^I \left[ \text{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2} \xi\right) \right]^2 d\xi = \frac{P_c}{\lambda} \cdot \frac{2}{3},$$

що разом з (9) приводить до рівняння:

$$Mv_0 = \frac{2}{3} P_c \sqrt{\frac{3MK}{2P_c^{1/2}}} = \sqrt{\frac{2MK}{3}} P_c^{3/2}.$$

Із цього рівняння отримуємо:

$$P_c = \left( \frac{3}{2} \frac{M}{K} v_0^2 \right)^{2/3} \quad (12)$$

Виведені формули (9), (10), (11) і (12) створюють можливість обчислити параметри удару  $P_c$ ,  $\lambda$ ,  $t_c$  і  $P(t)$  на інтервалі стискання  $t \in (0; t_c)$ .

При цьому не складено знайти і максимум стискання тіл  $x_c$ , бо, згідно з (1):

$$x_c = K P_c^{1/2} = \left( \frac{3}{2} M K^2 v_0^2 \right)^{1/3}. \quad (13)$$

Зближення центрів мас тіл у часі подається формулою:

$$x(t) = x_c \cdot \text{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2} \lambda t\right), \quad (14)$$

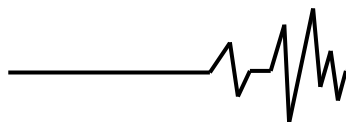
тобто пропорційне Атеб-синусу.

Зазначимо, що сталу  $\lambda$  можна виразити в іншій формі. Так, згідно з (12), (9), (13):

$$\frac{3}{2} M = \frac{K P_c^{2/3}}{v_0^2},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{v_0^2 P_c^{1/2}}{K^2 P_c^{2/3}}} = \frac{v_0}{\sqrt{K^2 P_c}} = \frac{v_0}{x_c}.$$

Тоді, при відомому  $x_c$ :



$$t_c = \frac{I \cdot x_c}{v_0} \approx 1,402182 \frac{x_c}{v_0}; \quad \eta = \frac{v_0 t}{x_c}$$

і формулам (10), (14) можна надати вигляд:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \left[ \text{Sa} \left( 2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \right]^2, \quad \frac{x(t)}{x_c} = \text{Sa} \left( 2, 1, \frac{3}{2} \eta \right), \quad (15)$$

що теж пов'язано з обчисленням значень Атеб-сінуса.

3. Розв'язок рівняння удару на етапі розтискання тіл. Він відбувається на проміжку часу  $t \in (t_c; t_y)$ , де  $t_y$  тривалість удару. Для одержання розрахункових формул треба будувати розв'язок рівняння (3) при початкових умовах:

$$P(t_c) = P_c; \quad \dot{P}(t_c) = 0. \quad (16)$$

Але це робити не обов'язково, бо при пружному ударі графіки  $P(t)$  і  $x(t)$  симетричні відносно вертикалі  $t = t_c$ , а  $t_y = 2t_c$ . Тому для аналізу процесу можна використати формули (15), замінивши в них

$$\text{Sa} \left( 2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \text{ на } \text{Sa} \left( 2, 1, \frac{3}{2} (2I - \eta) \right).$$

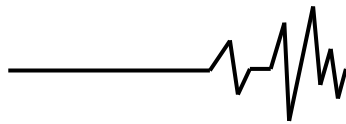
Для проведення розрахунків теж потрібні значення Атеб-сінуса. Тому з метою їх спрощення наводимо таблицю 1 цієї спеціальної функції. Методом лінійної інтерполяції табличних даних не складно знайти потрібні значення з досить високою точністю.

Таблиця 1

Значення Атеб-сінуса  $\text{Sa} \left( \quad \right) = \text{Sa} \left( 2, 1, \frac{3}{2} \eta \right)$

| $10\eta$ | $10\text{Sa}(\quad)$ | $10\eta$ | $10\text{Sa}(\quad)$ | $10\eta$     | $10\text{Sa}(\quad)$ |
|----------|----------------------|----------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0,2      | 0,200                | 5,0      | 4,923                | 9,8          | 8,720                |
| 0,4      | 0,400                | 5,2      | 5,110                | 10,0         | 8,834                |
| 0,6      | 0,600                | 5,4      | 5,295                | 10,2         | 8,943                |
| 0,8      | 0,800                | 5,6      | 5,479                | 10,4         | 9,047                |
| 1,0      | 1,000                | 5,8      | 5,660                | 10,6         | 9,147                |
| 1,2      | 1,200                | 6,0      | 5,840                | 10,8         | 9,241                |
| 1,4      | 1,400                | 6,2      | 6,018                | 11,0         | 9,330                |
| 1,6      | 1,599                | 6,4      | 6,194                | 11,2         | 9,414                |
| 1,8      | 1,799                | 6,6      | 6,368                | 11,4         | 9,493                |
| 2,0      | 1,998                | 6,8      | 6,539                | 11,6         | 9,566                |
| 2,2      | 2,197                | 7,0      | 6,707                | 11,8         | 9,634                |
| 2,4      | 2,396                | 7,2      | 6,873                | 12,0         | 9,697                |
| 2,6      | 2,594                | 7,4      | 7,036                | 12,2         | 9,753                |
| 2,8      | 2,792                | 7,6      | 7,196                | 12,4         | 9,804                |
| 3,0      | 2,990                | 7,8      | 7,353                | 12,6         | 9,849                |
| 3,2      | 3,187                | 8,0      | 7,506                | 12,8         | 9,888                |
| 3,4      | 3,383                | 8,2      | 7,656                | 13,0         | 9,922                |
| 3,6      | 3,579                | 8,4      | 7,803                | 13,2         | 9,949                |
| 3,8      | 3,774                | 8,6      | 7,946                | 13,4         | 9,971                |
| 4,0      | 3,968                | 8,8      | 8,085                | 13,6         | 9,987                |
| 4,2      | 4,161                | 9,0      | 8,221                | 13,8         | 9,996                |
| 4,4      | 4,353                | 9,2      | 8,352                | 14,0         | 9,999                |
| 4,6      | 4,544                | 9,4      | 8,479                | $10 \cdot I$ | 10,00                |
| 4,8      | 4,734                | 9,6      | 8,602                |              |                      |

У разі потреби, значення спеціальної функції можна також знаходити, користуючись апроксимацією:



$$\text{Sa}\left(2,1, \frac{3}{2}\eta\right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta < 0,2 \\ 0,1998 + 1,032(\eta - 0,2) - 0,19(\eta - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq \eta \leq 0,8 \\ 1 - \sin^2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (I - \eta)\right] & 0,8 < \eta \leq I. \end{cases}$$

Відносна похибка цього наближення менша одного відсотка.

4. Числові результати та їх порівняльний аналіз. Для проведення розрахунків приймаємо сталевий конус:  $M = 0,8$  кг;  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\mu_1 = 0,25$  з кутом  $\gamma = 70^\circ$ . Припускаємо, що він вдаряє з початковою швидкістю  $v_0 = 5$  м/с по нерухомому гумовому півпростору, у якому  $E_2 = 5 \cdot 10^6$  Па,

$\mu_2 = 0,5$ . Для цих вихідних

даних:  $Q_1 + Q_2 = 1,5 \cdot 10^{-7}$  1/Па;

$K = 2,92845 \cdot 10^{-4}$  Па<sup>-1/2</sup>. Обчислені:

$P_c \approx 2189,3856$  Па;  $x_c \approx 0,0137$  м;

$t_y = 2t_c = 0,007685$  с. Розраховані по

формулі (15) відношення  $P(t)/P_c$  у різні моменти часу вказано в табл. 2

Таблиця 2

Обчислені двома способами відношення  $P(t)/P_c$

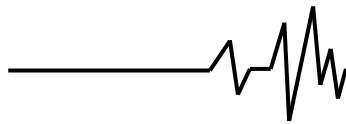
| $\eta$ | $P(t)/P_c$ ,<br>форм. (15) | $P(t)/P_c$ ,<br>числов. інтегр. | $\eta$ | $P(t)/P_c$ ,<br>форм. (15) | $P(t)/P_c$ ,<br>числов. інтегр. |
|--------|----------------------------|---------------------------------|--------|----------------------------|---------------------------------|
| 0,2    | 0,0399                     | 0,0400                          | 1,4022 | 1,0000                     | 1,0000                          |
| 0,4    | 0,1575                     | 0,1576                          | 1,6044 | 0,9403                     | 0,9402                          |
| 0,6    | 0,3411                     | 0,3413                          | 1,8044 | 0,7804                     | 0,7805                          |
| 0,8    | 0,5634                     | 0,5635                          | 2,0044 | 0,5634                     | 0,5635                          |
| 1,0    | 0,7804                     | 0,7805                          | 2,2044 | 0,3411                     | 0,3413                          |
| 1,2    | 0,9403                     | 0,9402                          | 2,4044 | 0,1575                     | 0,1576                          |

Значення Атеб-сінуса брали з табл. 1. Для порівняння, в табл. 2 вказано відношення  $P(t)/P_c$ , які дає числове інтегрування рівняння (3), з початковими умовами (16), на комп'ютері в середовищі «Maple» [15]. Маємо досить близькі результати розрахунків двома способами. Зазначимо, що обчислене вище  $P_c$  попадає в інтервал динамічних навантажень 200-300 кг, які діють на футеровку валків вібраційного класифікатора, при швидкості удару 4-5 м/с [16]. Отже викладена теорія може бути використана для розрахунку цих навантажень.

**Висновки.** Рівняння удару з невеликою швидкістю пружних тіл, одне з яких конус, має замкнутий аналітичний розв'язок, що виражається квадратом Атеб-сінуса. Складена таблиця цієї функції та відповідна їй аналітична апроксимація суттєво спрощують використання розв'язку в розрахунках, який дає розгортку процесу удару в часі та дозволяє обчислити його експериментальні параметри. Він визначає також тривалість удару. Вірогідність одержаного аналітичного розв'язку підтверджена збіжністю результатів, до яких він призводить, з результатами числового інтегрування рівняння удару на комп'ютері.

**Список використаних джерел**

- Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
- Шкельов Л. Т. Опір матеріалів / Л. Т. Шкельов, А. М. Станкевич, Д. В. Пошивач. – Київ : Віпол, 2011. – 456 с.
- Ольшанський В. П. Сравнение приборов консольной балки при ударе, вычисленных по теориям Кокса и Сен-Венана / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2012. – № 4 (68). – С. 94-97.
- Ольшанський В. П. Вычисление динамических перемещений балки при неупругом ударе по теориям Кокса и Сен-Венана / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Проблемы прочности. – 2013. – № 3. – С. 148-156.
- Hertz H. Über die Berrührung Fester Elastischer Körper / H. Hertz // Journal Reine und Angewandte Mathematik. – 1882. В 92. – S. 156-171.



6. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – М. : Стройиздат, 1965. – 447 с.

7. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.

8. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – Москва : Машиностроение, 1970. – 734 с.

9. Ольшанский В. П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В. П. Ольшанский, Л. Н. Тищенко, С. В. Ольшанский. – Харьков : Миськдрук, 2012. – 320 с.

10. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.-Л. : Гостехиздат, 1949. – 272 с.

11. Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37-42.

12. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. -288 с.

13. Ольшанський В.П. Ateb-синус у розв'язку задачі Герца про удар / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ“ХПІ” , 2018.-№3 (1279).- С. 98-103. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.

14. Абрамовиц .М. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами ) / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979.- 832 с.

15. Дьяконов В. П. Maple 8 в математике , физике и образовании / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс, 2003.-656 с.

16. Надутый В. П. Взаимодействие кусков материала с футерованным валком вибрационного классификатора / В. П. Надутый, В. Ф. Ягнюков, И. В. Ягнюкова // Вибрации в технике и технологиях. Всеукраїнський науково технічний журнал. - Вінниця, 2014.-№1(73).-С.94-99.

### References

1. Pysarenko H.S., Kvitka O.L. & Umanskiy E.S. (2004) *Opir materialiv [Materials Resistance]*. – Kyiv : Vyshcha shkola. 2. Shkelov L.T., Stankevych A.M. & Poshivach D. V. (2011) *Opir materialiv [Materials Resistance]*. – Kyiv : Vipol.

3. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. (2012) *Sravnienie priborov konsolnoy balki pri udare, vyichislenyih po teoriyam Koksa i Sen-*

*Venana [Comparison of cantilever beam devices at impact, calculated according to the theories of Cox and Saint-Venant]. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh : Vseukrainskyi naukovotekhnichniy zhurnal.* – Vinnytsia, 4 (68), 94-97 [in Ukrainian].*

4. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. (2013) *Vyichislenie dinamicheskikh peremescheniy balki pri neuprugom udare po teoriyam Koksa i Sen-Venana [Calculation of the dynamic displacements of a beam with an inelastic impact on the theories of Cox and Saint-Venant]. *Strength problems*, 3, 148-156 [in Ukrainian].*

5. Herts H. Ü ber die Berr ü hrung Fester Elastischer KÖ rper. *Jornal Reine und Andewandte Mathematik*, 1882. B 92, 156-171.

6. Goldsmit V. (1965) *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemyih tel [Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies]*. – М.: Stroyizdat, 447.

7. Kilchevsky N. A. (1976) *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdyyih tel. Udar [Dynamic contact compression of solids. Blow]*. – Kiev: Naukova dumka, 319.

8. Filippov A.P. (1970) *Kolebaniya deformiruemyih sistem [Oscillations of deformable systems]*. – Moscow: Mechanical Engineering, 734.

9. Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N. & Olshanskiy S.V. (2012) *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mehanicheskom udare [Swings of rods and plates with mechanical impact]*. – Kharkiv : Miskdruk, 320.

10. Shtaerman I.Ya. (1949) *Kontaktynaya zadacha teorii uprugosti [Contact problem of the theory of elasticity]*. – М.-Л. : Gostekhizdat, 272.

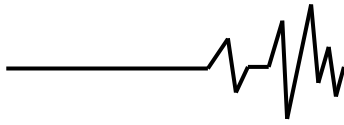
11. Gricik V.V., Nazarkevich M.A. *Matematychni modeli alhorytmiv i realizatsiia Atebfunktsii [Mathematical models of algorithms and realizations Ateb-functions] Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 12, 37-42 [in Ukrainian].

12. Pukach P. Ya. (2014) *Yakisni metody doslidzhennia nelineinykh kolyvalnykh system [Qualitative methods for investigating nonlinear oscillatory systems]*. – Lviv: Lvivska politekhnika, 288.

13. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. (2018) *Ateb-synus u rozv'iazku zadachi Hertsa pro udar [Ateb-sinus in the solution of the Hertz problem]. *Visnyk NTU“KhPI”. Matematychnemodeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh.* № 3, 98-103 [in Ukrainian].*

14. Abramovits M., Stigan I. (1979) *Spravochnik po spetsialnyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami ) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]*. – М.: Nauka, 832.

15. Dyakonov V.P. (2003) *Maple 8 v matematike, fizike i obrazovanii [Maple 8 in*



*Mathematics, Physics and Education*]. – M.: Solon-Press, 656.

16. Nadutyiy V. P. (2014) Vzaimodeystvie kuskov materiala s futerovannym valkom vibratsionnogo klassifikatora [The interaction of pieces of material with a lined roll vibration classifier] *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh : Vseukrainskyi naukovy-tekhnichnyi zhurnal*. – Vinnytsia, 1 (73), 94-99.

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УДАРА УПРУГИХ ТЕЛ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ КОНУС

Рассмотрено ударное взаимодействие упругих тел с небольшой начальной скоростью, когда одно из них ограничено в зоне контакта с другим конической поверхностью вращения. С использованием известного решения статической контактной задачи теории упругости, которое нашел И.Я. Штаерман, и допущений Г.Герца, которые он сделал при создании собственной теории квазистатического удара твердых тел, составлено нелинейное дифференциальное уравнение силы удара, как функции времени. Его замкнутое аналитическое решение, которое описывает процесс динамического взаимодействия тел во времени, выражено через периодический Атеб-синус. Для упрощения использования полученного аналитического решения в расчетах, составлена отдельная таблица указанной специальной функции и предложена аппроксимация ее элементарными функциями, относительная погрешность которой меньше одного процента. С целью подтверждения достоверности построенных решений, дополнительно проведено интегрирование уравнения силы удара на компьютере. Установлено хорошее соответствие результатов, к которым приводят построенное аналитическое решение и числовое интегрирование нелинейной задачи Коши на компьютере для дифференциального уравнения второго порядка. Выведено компактные формулы максимумов усилия удара и величины сжатия тел, а также формулу длительности процесса удара. Отмечено, что полученные результаты могут быть использованы при определении динамических нагрузок, действующих на футерованные резиной валки вибрационного классификатора,

при падении на них кусков твердого сырья. Приведено примеры расчетов и проведен сравнительный анализ результатов.

**Ключевые слова:** сила удара нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое решение, Атеб-синус, коническое тело.

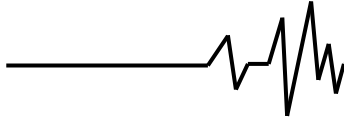
### SOLUTION OF THE EQUATION OF IMPACT THE ELASTIC BODY, ONE OF WHICH CONE

The impact interaction of elastic bodies with a small initial velocity is considered, when one of them is limited in the contact zone with another conical surface of revolution. Using the well-known solution of the static contact problem of the theory of elasticity, which found I. Shtaermann, and the assumptions of G. Hertz, which he made when creating his own theory of quasistatic impact of solids, compiled a nonlinear differential equation of impact force as a function of time. His closed analytical solution, which describes the process of dynamic interaction of bodies in time, is expressed through the periodic Ateb-sine. To simplify the use of the obtained analytical solution in the calculations, a separate table of the specified special function has been compiled and its approximation with elementary functions has been proposed, the relative error of which is less than one percent. In order to confirm the reliability of the constructed solutions, the integration of the equation of impact force on the computer was carried out in parallel. A good agreement is established between the results obtained by the constructed analytical solution and the numerical integration of the nonlinear Cauchy problem on a computer for a second-order differential equation. Compact formulas for the maxima of the impact force and the magnitude of the compression of bodies, as well as the formula for the duration of the impact process are derived. It is noted that the obtained results can be used in determining the dynamic loads acting on the rubber-lined rolls of the vibration classifier when pieces of solid raw materials fall on them. Examples of calculations are given and a comparative analysis of the results is carried out.

**Keywords:** impact force, nonlinear differential equation, analytical solution, Ateb-sine, conical body.

### Відомості про авторів

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com



**Ольшанський Василій Павлович** – доктор фізико-математических наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Olshanskiy Vasyl Pavlovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильевич** – кандидат фізико-математических наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Phd in Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com