

**Ольшанський В.П.**

д.ф.-м.н., професор

Бурлака В.В.

к.т.н., доцент

Сліпченко М.В.

к.т.н., доцент

**Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені Петра Василенка**

Olshanskiy V.**Burlaka V.****Slipchenko M.**

**Petro Vasylenko Kharkiv
National Technical
University of Agriculture**

УДК 534.1; 539.3**DOI: 10.37128/2306-8744-2019-4-2**

ІМПУЛЬСНЕ ЗГИНАННЯ БАЛКИ З БІНАРНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

В статті проведено теоретичне дослідження руху балки з бінарними крайовими умовами при короткочасному імпульсному навантаженні. Розглянуто нестационарні коливання балки, спричинені короткочасним силовим навантаженням, рівномірно розподіленим по її довжині. Рух балки розглянуто на двох етапах. Припускається, що умови закріплення кінців балки пов'язані з очікуваним напрямом (знаком) їх повороту при згинанні балки. Прийнято, що під час дії навантаження краї балки жорстко затиснуті, тобто кути їх повороту дорівнюють нулю, а після розвантаження та зміни знаку кривизни балки вони стають шарнірно обіпертими в циліндричних шарнірах. За других крайових умов проходить вільне коливання балки. Завдяки використанню методу компенсуючих навантажень аналітична частина розв'язку виражена в рядах синусів. Оскільки система має несиметричну пружну характеристику відносно положення статичної рівноваги, для досягнення поставленої мети використано метод припасовування розв'язків. У підсумку розрахунків зведено до числового розв'язання інтегрального рівняння типу Вольтерра на комп'ютері. Крім того запропоновано апроксимацію, що дає простіші розрахункові формули ніж кусково-лінійна апроксимація. Запропонована апроксимація дозволяє обчислити значення крайових моментів і одержати формулу прогинів балки. Числовий аналіз показав, що за певних тривалостей силового навантаження амплітуда прогину балки з затиснутими кінцями у напрямі зовнішнього імпульсу менша ніж амплітуда прогину в протилежний бік, при русі розвантаженої балки з шарнірно обіпертими кінцями. Цей динамічний ефект, властивий системам з несиметричною характеристикою пружності, має місце при бінарному закріпленні країв балки або при підкріпленні її однобічними пружними опорами. Виведено формули, за якими можна обчислити час, коли ефект несиметрії буде найбільш чітко виражений, а також у якому випадку він буде відсутній. Наведено числові результати, що підтверджують адекватність запропонованих залежностей.

Ключові слова: силовий імпульс, згинання балки, бінарні крайові умови, інтегральне рівняння, ряд синусів, динамічний ефект.



Постановка проблеми. Імпульсні та ударні навантаження можуть призвести до руйнування пружних елементів конструкцій або до порушення їх працездатності. Тому дослідженню динаміки пружних систем при дії вказаних навантажень приділялась і продовжує приділятися значна увага. Серед робіт цього напрямку відзначимо монографічні видання [1-3]. В них проводили в основному математичне моделювання руху лінійних систем. Значно менше публікацій стосується імпульсного та ударного деформування нелінійних систем, яке має певні особливості, і вивчення їх потребує окремої уваги. Виходячи з цього, тут розглядаємо рух балки з нетрадиційними граничними умовами, коли пружна характеристика системи залежить від напрямку її деформування. При переміщенні балки в напрямку прикладеного імпульсного навантаження краї балки вважаються жорстко затиснутими, а при повороті кінців у протилежному напрямку – вони шарнірно обіперті. Така постановка задачі можлива лише при динамічному деформуванні балки, коли з плином часу кути повороту її країв змінюють знак.

Формулювання мети дослідження. Метою статті є теоретичне дослідження руху балки з бінарними крайовими умовами при короткочасному імпульсному навантаженні.

Оскільки система має несиметричну пружну характеристику відносно положення статичної рівноваги, для досягнення поставленої мети використано метод припасовування розв'язків, побудованих в тригонометричних рядах. В [4] такі розв'язки подавали рядами за формулами власних коливань. Невідомі згинальні моменти на торцях балки, що діють на першому етапі руху визначаються шляхом комп'ютерного числового розв'язання інтегрального рівняння типу Вольтерра, до якого призводить метод компенсуючих навантажень. Інтегральні рівняння такого типу в дослідженнях нестационарних коливань континуальних систем раніше використовували в [5-8].

Викладення основного матеріалу дослідження. Використовуємо розрахункову схему, що зображена на рис. 1.

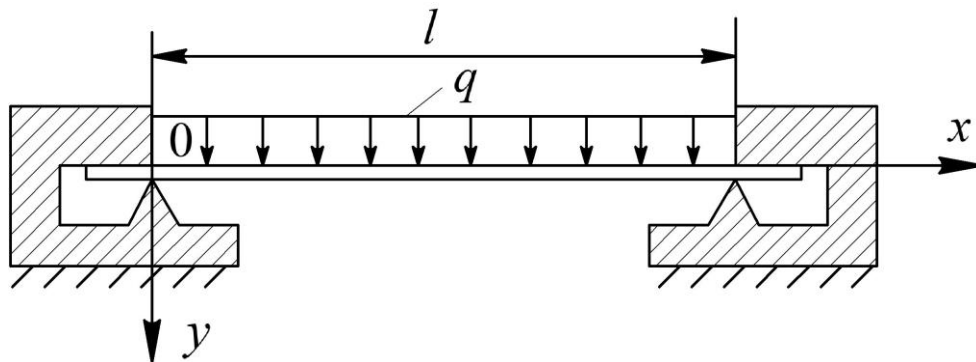


Рис. 1. Розрахункова схема балки

Розглянемо два етапи руху балки. На першому з них, коли переміщення перерізів балки проходять у напрямку дії навантаження, а кути повороту торців дорівнюють нулю, прогини балки

$y = y(x, t)$ описуємо диференціальними рівняннями:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q [H(t) - H(t - t_1)] - M \delta'(x - x_1) + M \delta'(x - x_2). \quad (1)$$

Тут EJ – згинальна жорсткість балки; ρF – її погонна маса; q – стала інтенсивності розподілу навантаження по довжині балки; $H(t)$, $H(t - t_1)$ – одиничні функції Хевісайда; t_1 – тривалість дії імпульсу в часі t ; $M = M(t)$ – невідомі моменти, прикладені в перерізах $x = x_1$ і $x = x_2$, причому $x_1 \rightarrow 0$, а $x_2 \rightarrow l$, де l – довжина балки; $\delta'(x - x_1)$, $\delta'(x - x_2)$ – похідні по x функції Дірака; x –

повздожня координата; $t \in [0; t_*]$; t_* – кінець першого етапу.

Розв'язок рівняння (1) подаємо у вигляді ряду:

$$y(x, t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} f_m(t) \sin(\alpha_m x), \quad (2)$$

де $\alpha_m = \frac{\pi m}{l}$; $f_m(t)$ – невідомі функції часу.

У відповідності з (2): $y(0, t) = y(l, t) = 0$. Для визначення невідомих M , що входять в (1), використовуємо умови:



Підстановкою (2) в (1) отримуємо диференціальне рівняння:

$$\left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2 f_m = \frac{4}{\rho Fl} \left\{ \frac{q}{\alpha_m} [H(t) - H(t-t_1)] - M(t)\alpha_m \right\},$$

в яких $\omega_m = \alpha_m^2 \sqrt{EJ / \rho F}$.

Розв'язавши їх при нульових початкових

умовах: $f_m(0) = 0$; $\left. \frac{df_m}{dt} \right|_{t=0}$, одержуємо:

$$f_m(t) = \frac{4}{\rho Fl \omega_m^2} \left[\frac{q}{\alpha_m} \varphi_m(t) - \alpha_m \omega_m \int_0^{t \leq t_*} M(u) \sin \omega_m(t-u) du \right]. \quad (4)$$

Тут $\varphi_m(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\omega_m t) & t \leq t_1 \\ 2 \sin \frac{\omega_m t_1}{2} \sin \left(\omega_m \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \right) & t \geq t_1, \end{cases}$ при t_* – невідомий час, коли

відбувається зміна крайових умов (3).

Враховуючи (2) і (4), одержуємо формулу прогинів балки:

$$y(x,t) = \frac{4}{lEJ} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^3} \left\{ \frac{q}{\alpha_m^2} \varphi_m(t) - \omega_m \int_0^{t \leq t_*} M(u) \sin[\omega_m(t-u)] du \right\} \sin(\alpha_m x) \quad (5)$$

Взявши з цього виразу похідну по x , після підстановки її в (3), отримуємо

інтегральне рівняння для визначення

$M(t)$:

$$q \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\varphi_m(t)}{\alpha_m^4} = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\omega_m}{\alpha_m^2} \int_0^{t \leq t_*} M(u) \sin[\omega_m(t-u)] du. \quad (6)$$

Його розв'язуємо числовим методом, використовуючи ступінчасту апроксимацію $M(u)$. Для цього вибраний проміжок часу $[0; t]$ поділяємо на K відрізків довжиною

$\tau = t / K$. Тоді, для обчислення значень крайових моментів M_s на s -ому проміжку часу, замість (6), одержуємо рекурентне співвідношення:



$$M_s = M(s\tau) = \left(\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega_m \tau / 2)}{\alpha_m^2} \right)^{-1} \left\{ q \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\varphi_m(s\tau)}{2\alpha_m^4} - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \times \right. \\ \times \sin \frac{\omega_m \tau}{2} \left[\sin(\omega_m s\tau) \sum_{\substack{j=1,2,\dots \\ (s>1)}}^{s-1} M_j \cos(\omega_m (j-0,5)\tau) - \cos(\omega_m s\tau) \times \right. \\ \left. \left. \times \sum_{\substack{j=1,2,\dots \\ (s>1)}}^{s-1} M_j \sin(\omega_m (j-0,5)\tau) \right] \right\}, \quad (7)$$

у якому $s\tau \leq t_*$, $M_j = const$ – значення моменту на j -ому проміжку часу.

Послідовно збільшуючи t , за допомогою (7), знаходимо не тільки $M(t)$, а і час $t = t_*$,

$$y(x, s\tau) = \frac{4}{IEJ} \sum_{m=1,3,\dots} \left\{ \frac{q \cdot \varphi_m(s\tau)}{\alpha_m^5} - \frac{2}{\alpha_m^3} \sin \frac{\omega_m \tau}{2} \left[\sin(\omega_m s\tau) \sum_{\substack{j=1 \\ (s>1)}}^{s-1} M_j \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(\omega_m (j-0,5)\tau) - \cos(\omega_m s\tau) \sum_{\substack{j=1 \\ (s>1)}}^{s-1} M_j \sin(\omega_m (j-0,5)\tau) \right] \right\} \sin(\alpha_m x), \quad (8)$$

Що дає можливість обчислити і прогини балки на s -ому проміжку часу.

Зазначимо, що використана апроксимація поширена при числовому розв'язанні інтегральних рівнянь типу Вольтера в дослідженнях динаміки елементів конструкцій при короточасних навантаженнях [1, 5, 8]. Замість неї можна також використовувати кусково-лінійну апроксимацію [7],

коли $M(t_*) = 0$, тобто коли відбувається зміна крайових умов.

У відповідності до прийнятої апроксимації формула (5) набуває вигляд:

але вона призводить до більш складних розрахункових формул.

На другому етапі руху, після зміни крайових умов, балку вважаємо розвантаженою, тобто приймаємо $t_1 < t_*$. Тоді рівняння (1) стає однорідним ($q = M = 0$). Його розв'язок подаємо у вигляді ряду:

$$y(x, t) = \sum_{m=1,3,\dots} \left[a_m \cos(\omega_m (t - t_*)) + b_m \sin(\omega_m (t - t_*)) \right] \sin(\alpha_m x). \quad (9)$$

Для визначення коефіцієнтів a_m і b_m маємо співвідношення:

$$a_m = \frac{4}{IEJ} \left[\frac{q \cdot \varphi_m(t_*)}{\alpha_m^5} - \frac{\omega_m}{\alpha_m^3} \int_0^{t_*} M(u) \sin(\omega_m (t_* - u)) du \right]; \\ b_m = \frac{4}{IEJ} \left[\frac{q \cdot \dot{\varphi}_m(t_*)}{\omega_m \alpha_m^5} - \frac{\omega_m}{\alpha_m^3} \int_0^{t_*} M(u) \cos(\omega_m (t_* - u)) du \right]; \quad (10) \\ \dot{\varphi}_m(t_*) = 2\omega_m \sin \frac{\omega_m t_1}{2} \cos \left(\omega_m \left(t_* - \frac{t_1}{2} \right) \right).$$



Формула (9) має чинність для тих $t > t_*$,

коли $\left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} < 0$.

Якщо підставити вирази (10) в (9), то для обчислення прогинів балки знову одержимо формулу (2), в якій:

$$f_m(t) = \frac{4}{l\rho F\omega_m^2} \left[\frac{q}{\alpha_m} \varphi_m(t) - \alpha_m \omega_m \int_0^{t_*} M(u) \sin(\omega_m(t-u)) du \right].$$

Нааявні тут інтеграли по u визначені в кінці першого етапу руху. Тобто заново їх обчислювати не треба, що спрощує теоретичне дослідження руху розвантаженої балки з шарнірно обіпертими кінцями. Для розрахунку $y(x,t)$ залишається формула (8), але тепер в ній треба зафіксувати суми по j , зберігаючи їх значення, що відповідають $s\tau = t_*$.

Числові результати. Їх одержали для балки (двотавр № 12), у якого $EJ = 7,35 \cdot 10^5 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$; $\rho F = 11,5 \text{ кг/м}$;

$l = 5 \text{ м}$, при $q = 1800 \text{ Н/м}$. Для аналізу швидкості збіжності рядів по m в формулах (7), (8) обчислювали їх часткові суми з m_* членів. Результати розрахунку згинальних моментів на опорах $M(t)$ і прогинів середини балки при $t_1 = 0,025 \text{ с}$ записано відповідно в табл. 1. і табл. 2. Проміжок часу $[0; t_1]$ розбивали на $K = 4000$ ділянок.

Таблиця 1.

Значення $M(t)$ при різних m_*

$10^2 t, \text{ с}$	$m_* = 10$	$m_* = 50$	$m_* = 100$	$m_* = 200$	$m_* = 300$
	Значення $10^{-3} M(t)$, Нм				
0,5	3,516	2,200	2,173	2,160	2,155
1,0	5,450	5,615	5,593	5,585	5,582
1,5	5,679	6,765	6,782	6,782	6,782
2,0	3,991	4,013	4,110	4,150	4,166
2,5	0,678	0,693	0,748	0,785	0,792

Таблиця 2.

Значення $y(0,5l; t)$ при різних m_*

$10^2 t, \text{ с}$	$m_* = 10$	$m_* = 50$	$m_* = 100$	$m_* = 200$	$m_* = 300$
	Значення $10^3 y(0,5l; t)$, м				
0,5	2,304	2,321	2,323	2,324	2,324
1,0	6,332	6,559	6,584	6,597	6,601
1,5	7,117	7,785	7,862	7,899	7,913
2,0	3,656	4,565	4,675	4,730	4,749
2,5	0,261	0,640	0,693	0,720	0,729

Спостерігається повільна збіжність рядів по m в формулах (7) і (8), але це не суттєво при комп'ютерних розрахунках.

Про вплив тривалості дії навантаження t_1 на зміну прогинів балки і крайових моментів у часі надана інформація на рис. 2. - рис. 4. Цифрами 1, 2, 3 позначені графіки, одержані відповідно при $t_1 = 0,01; 0,025; 0,04 \text{ с}$. Графіки прогинів на рис.

2 отримано для $x = l/2$, а на рис. 3 – для $x = l/4$. На графіках, позначених цифрою 1, амплітудні відхилення у напрямі дії навантаження менші ніж у протилежному напрямі, тобто спостерігається динамічний ефект несиметрії пружної характеристики балки. Такої нерівності немає на графіках, позначених цифрою 2. Отже названий ефект відсутній при $t_1 = 0,025 \text{ с}$.



Графіки 2 і 3 згинального моменту на опорі, подані на рис. 4, мають спільний максимум, що виникає під час дії імпульсів різної тривалості. У випадку $t_1 = 0,04$ с згинальний момент на опорі має два максимуми.

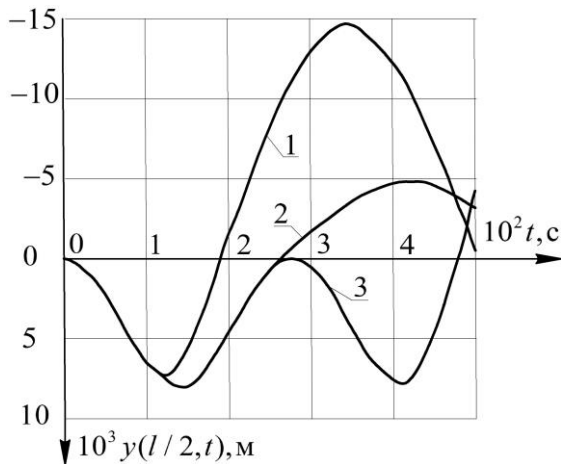


Рис. 2. Графіки прогинів середини балки: 1 – $t=0,01$ с; 2 – $t=0,025$ с; 3 – $t=0,04$ с

Дослідження показало, що динамічний ефект несиметрії пружної характеристики найбільш чітко виражений, коли тривалість дії навантаження близька до значення:

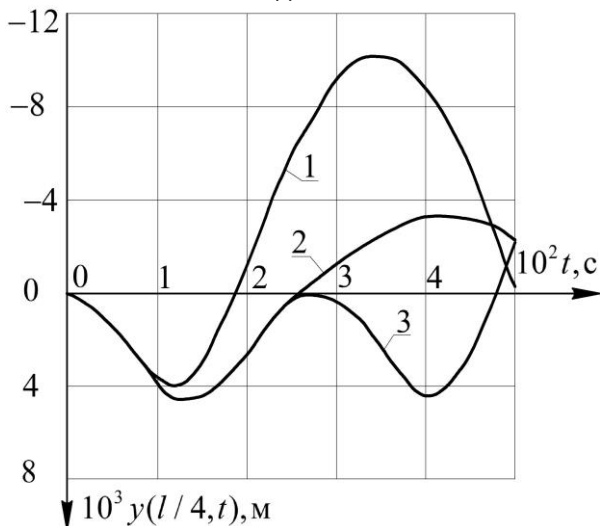


Рис. 3. Прогини балки при $x=l/4$; 1 – $t=0,01$ с; 2 – $t=0,025$ с; 3 – $t=0,04$ с

Дослідження показало, що динамічний ефект несиметрії пружної характеристики найбільш чітко виражений, коли тривалість дії навантаження близька до значення:

$$(2n-1) \frac{\pi l^2}{22,3729} \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}},$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Якщо тривалість імпульсу близька до значення:

$$2n \frac{\pi l^2}{22,3729} \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}},$$

то згаданий ефект відсутній. Саме такий випадок відповідає графікам, позначеним цифрою 2 на рис. 2 і рис. 3.

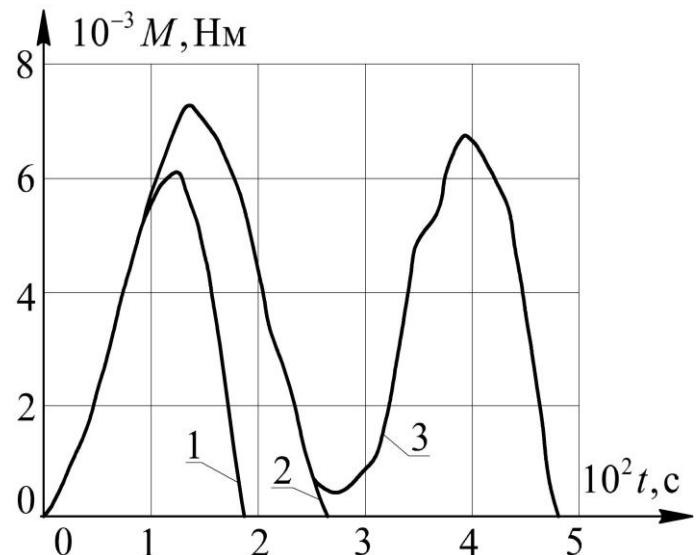


Рис. 4. Графіки згинальних моментів на опорах: 1 – $t=0,01$ с; 2 – $t=0,025$ с; 3 – $t=0,04$ с

Висновки. Виражені в тригонометричних рядах розв'язки динамічної задачі мають повільну збіжність. Для одержання високої точності розрахунку доводиться на комп'ютері обчислювати сотні членів в часткових сумах рядів. Розрахунки показали, що існують такі тривалості імпульсного навантаження балки з бінарним закріпленням країв, коли її прогини у напрямі прикладеного імпульсу менші за прогини у зворотному напрямі, що властиво системам з несиметричною характеристикою пружності.

Список використаних джерел

1. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. Киев: Наукова думка, 1978. 183 с.
2. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок / С Кохманюк С. С. и др. Киев: Наукова думка, 1989. 304 с.
3. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные



нагружения трехслойных элементов конструкций. Гомель: Бел.ГУТ, 2003. 367 с.

4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання балки з бінарним закріпленням країв при імпульсному навантаженні. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2018. № 27 (1303). С. 68-73.

5. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е. Г. и др. Харьков: ХНАДУ, 2004. 392 с.

6. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков: Міськдрук, 2011. 376 с.

7. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. Харьков: Міськдрук, 2012. 320 с.

8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Деформування імпульсом балки, однобічно підкріплену пружною опорою *Механіка та машинобудування*. 2018. № 1. С. 37-46.

Список джерел у транслітерації

1. Filippov, A. P., Kohmanyuk, S. S. & Yanyutin, E. G. (1978). *Deformirovanie elementov konstruktsiy pod deystviem udarnykh i impulsnykh nagruzok*. Naukova dumka..

2. Kohmanyuk S. S., et al. (1989). *Dinamika konstruktsiy pri vozdeystvii kratkovremennykh nagruzok*. Naukova dumka.

3. Starovoytov, E. I., Yarovaya, A. V. & Leonenko D. V. (2003). *Lokalnyie i impulsnyie nagruzheniya trehsloynnykh elementov konstruktsiy*. Bel.GUT.

4. Olshanskiy, V. P. & Olshanskiy, S. V. (2018) Kolyvannia balky z binarnym zakriplenniam kraiv pry impulsnomu navantazhenni. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnye modelivannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*, No 27 (1303), 68-73.

5. Yanyutin, E. G., et al. (2004). *Zadachi impulsnogo deformirovaniya elementov konstruktsiy*. HNADU.

6. Smetankina, N. V. (2011) *Nestatsionarnye deformirovanie, termouprugost i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek*. Miskdruk.

7. Olshanskiy, V. P., Tischenko, L. N. & Olshanskiy, S. V. (2012). *Kolebaniya stержney i plastin pri mehanicheskom udare*. Miskdruk.

8. Olshanskiy, V. P., & Olshanskiy, S. V. (2018) Deformuvannia impulsom balky, odnobichno pidkriplenoї pruzhnoju oporoju. *Mekhanika ta mashynobuduvannia*, No 1, 37-46.

В статье проведено теоретическое исследование движения балки с бинарными краевыми условиями при кратковременном импульсном нагружении. Рассмотрены нестационарные колебания балки, вызванные кратковременным силовым нагружением, равномерно распределенным по ее длине. Движение балки рассмотрено на двух этапах. Предполагается, что условия закрепления концов балки связаны с ожидаемым направлением (знаком) их поворота при изгибе балки. Принято, что при действии нагрузки края балки жестко защемлены, то есть углы их поворота равны нулю, а после разгрузки и изменения знака кривизны балки они становятся шарнирно опертыми в цилиндрических шарнирах. При вторых граничных условиях проходит свободное колебание балки. Благодаря использованию метода компенсирующих нагрузок аналитическая часть решения выражена в рядах синусов. Поскольку система имеет несимметричную упругую характеристику относительно положения статического равновесия, для достижения поставленной цели использован метод добавления решений. В итоге расчет сведено к численному решению интегрального уравнения типа Вольтерра на компьютере. Кроме того предложено аппроксимацию, которая дает более простые расчетные формулы, чем кусочно-линейная аппроксимация. Предложенная аппроксимация позволяет вычислить значение краевых моментов и получить формулу прогибов балки. Численный анализ показал, что при определенных продолжительностях силового нагружения амплитуда прогиба балки с защемленными краями в направлении внешнего импульса меньше амплитуды прогиба в противоположную сторону при движении разгруженной балки с шарнирно опертыми краями. Этот динамический эффект свойственен системам с несимметричной характеристикой упругости, которая имеет место при бинарном закреплении краев балки или при подкреплении ее односторонними упругими опорами. Выведены формулы, по которым можно вычислить время, когда эффект несимметрии будет наиболее четко выражен, а также в каком случае он будет отсутствовать. Приведены числовые результаты, подтверждающие адекватность предложенных зависимостей.

Ключевые слова: силовой импульс, изгиб балки, бинарные граничные условия, интегральное уравнение, ряд синусов, динамический эффект.

PULSE BENDED BEAM WITH BINARY BOUNDARY CONDITIONS

ІМПУЛЬСНИЙ ИЗГИБ БАЛКИ С БИНАРНИМИ КРАЕВИМИ УМОВИЯМИ



A theoretical study of the movement of a beam with binary boundary conditions at a short-term pulsed load is carried out in the article. The non-stationary oscillations of the beam, caused by short-term force loading, are evenly distributed along its length. Beam movement is considered in two stages. It is assumed that the conditions for fixing the ends of the beam are associated with the direction (sign) of their rotation when the beam is bending. It is assumed that under the action of the load, the edges of the beam are rigidly clamped, that is, the angles of their rotation are equal to zero, and after unloading and changing the sign of the curvature of the beam they become pivotally supported in cylindrical hinges. According to the second boundary conditions, the free oscillation of the beam passes. Due to the use of the method of compensating loads, the analytical part of the isolation is expressed in rows of sines. Since the system has an asymmetric elastic characteristic with respect to the position of static equilibrium, the method of adding solutions is used to achieve this goal. As a result, the calculation is reduced to the numerical solution of the Volterra type integral equation on a computer. In addition, an approximation is proposed, which gives simpler calculation formulas than a

piecewise linear approximation. The proposed approximation allows us to calculate the value of the boundary moments and obtain the formula for the beam deflections. Numerical analysis showed that for certain durations of force loading, the beam deflection amplitude with pinched edges in the direction of the external impulse is less than the deflection amplitude in the opposite direction during the movement of the unloaded beam with hinged edges. This dynamic effect is characteristic of systems with an asymmetric characteristic of elasticity, which occurs when a binary fixing of the edges of the beam or when it is supported by unilateral elastic supports. Formulas are derived by which it is possible to calculate the time when the effect of asymmetry will be most clearly expressed, and also in which case it will be absent. Numerical results confirming the adequacy of the proposed dependencies are presented.

Keywords: force pulse, beam bending, binary boundary conditions, integral equation, sine series, dynamic effect.

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (вул. Алчевський, 44, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Ольшанский Василий Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики і теоретической механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (ул. Алчевский, 44, г. Харков, Украина, 61002, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Olshanskiy Vasyi Pavlovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Physics and Theoretical Mechanics, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture (44, Alchevskiy str., Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

Бурлака Володимир Васильович – кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики і теоретической механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (вул. Алчевський, 44, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: Burlaka2V@ukr.net).

Бурлака Владимир Васильевич – кандидат техніческих наук, доцент кафедри фізики і теоретической механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (ул. Алчевский, 44, г. Харков, Украина, 61002, e-mail: Burlaka2V@ukr.net).

Burlaka Volodymyr Vasilovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor of the Department of Physics and Theoretical Mechanics, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture (44, Alchevskiy str., Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: Burlaka2V@ukr.net).

Сліпченко Максим Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики і теоретической механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (вул. Алчевський, 44, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: Slipchenko_M@ukr.net).

Слипченко Максим Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедри фізики і теоретической механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка (ул. Алчевский, 44, г. Харков, Украина, 61002, e-mail: Slipchenko_M@ukr.net).



Slipchenko Maksym Volodymyrovych Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor of the Department of Physics and Theoretical Mechanics, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture (44, Alchevskiy str., Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: Slipchenko_M@ukr.net).