**Воропай А. В.**

к.т.н., доцент

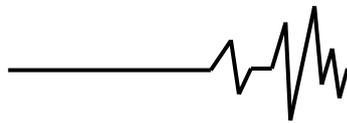
**Национальный  
технический  
университет  
«Харьковский  
политехнический  
институт»****Voropaу A.**National Technical University  
"Kharkov Polytechnic  
Institute"**УДК 539.3****DOI: 10.37128/2306-8744-2019-3-11****ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРНОГО  
МЕТОДА И ПРЕБРАЗОВАНИЯ  
ЭФРОСА ДЛЯ УЧЕТА  
ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
КОНСТРУКЦИЙ**

На основе операторного метода и преобразования Эфроса предложен подход, позволяющий на базе решений, полученных в рамках теории упругости, для деформируемых элементов конструкции учитывать их диссипативные свойства и в частности внутреннее трение в материале. Указанный подход может быть применен для аналитических решений, которые могут быть представлены в виде интегралов типа свёртки. Для операторного уравнения выполняется прямое преобразование Лапласа. В работе показано, что в пространстве изображений можно перейти от соотношений, учитывающих диссипацию энергии, к соотношениям для упругой пластины сделав замену переменной Лапласа. Для выполнения обратного преобразования Лапласа сложной функции используется теорема Эфроса. Задача сводится к нахождению неизвестной трансформирующей функции. Численные расчеты показали, что в рассматриваемой задаче (для малых величин переменной времени) закон изменения этой функции очень близок к закону нормального распределения (Гаусса) с переменной дисперсией.

Так как при вычислениях интегралов выполняется дискретизация, то вместо преобразования Эфроса можно воспользоваться предложенной в работе модификацией ядер согласно теореме Эфроса, причем эта модификация осуществляется за счет умножения дискретных аналогов исходных ядер на матрицы, полученные специальным образом на базе интеграла Гаусса.

Приведен пример расчета прогиба упругой и вязкоупругой пластины, а также показаны ядра интегралов свёртки для «упруго» решения и с учетом диссипации энергии (внутреннего трения в материале пластины). Рассмотрено поперечное импульсное нагружение прямоугольной изотропной пластины средней толщины. Предполагалось, что пластина имеет шарнирное опирание по всему контуру. Деформирование пластины моделировалось в рамках уточненной теории С. П. Тимошенко. Имеется возможность относительно быстрого пересчета прогибов и деформаций пластины с учетом внутреннего трения для разных значений коэффициентов диссипации.

**Ключевые слова:** вязкоупругая пластина средней толщины, нестационарное деформирование, диссипативные свойства, внутреннее трение, преобразование Лапласа, теорема Эфроса.



**Введение и постановка задачи.** К настоящему моменту в теории упругости получено значительное количество аналитических решений для задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций [1]. Существует несколько общепринятых аналитических методов решения указанных задач. Один из основных методов получения аналитического решения нестационарных задач – это использование интегрального преобразования Лапласа. Многие решения могут быть представлены в виде свёрточных интегралов с ядрами Коши, например в монографии [2] представлено несколько решений для упругого деформирования различных элементов конструкции следующего вида:

$$u(t) = \int_0^t K(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau \quad (1)$$

где  $u(t)$  – перемещения исследуемого объекта в некоторой точке,  $P(\tau)$  – внешняя нестационарная нагрузка, вызывающая колебания,  $K(t)$  – ядро интеграла, несущее, по существу, всю информацию об упруго деформируемом объекте.

При деформировании большинства реальных элементов конструкций происходит не чисто упругое, а вязкоупругое деформирование. В случае, когда вязкие (пластические) деформации малы – ими естественно пренебрегают. Однако, в ряде случаев, диссипацию энергии при механических колебаниях необходимо учитывать. В работе [3] в общем виде описано применение операторного метода расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы, а также изложенный способ использован при разработке методики динамического расчета цилиндрических пружин (для модели тонкого винтового бруса). Более подробно решение задачи для винтового бруса приведено в [4].

Если взглянуть на выражение (1), то видно, что явление диссипации может быть учтено только следующими методами:

1) разделяют перемещения или деформации на упругие или пластические, и каждое из них определяют отдельно;

2) модификация ядер интегралов  $K(t - \tau)$  на новые, учитывающие диссипативные свойства элементов конструкции  $K_D(t, \tau)$ , которые могут быть значительно сложнее;

3) путем введения дополнительных слагаемых, учитывающих диссипацию энергии (например, в некоторых численно-аналитических методах в соответствующие матричные соотношения вводят дополнительные матрицы диссипации.

Рассмотрим в настоящей работе более подробно второй метод и обоснуем аналитически возможность его использования.

#### **Обоснование и решение.**

Перемещения в упругодеформируемых телах можно представить в виде следующего соотношения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = L[\mathbf{u}], \quad (2)$$

где  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]$  – вектор перемещения в некоторой точке упруго тела (стержня, балки, пластины или оболочки),  $L[\mathbf{u}]$  – оператор, соответствующий дифференциальным уравнениям в частных производных для упругого деформирования исследуемого объекта.

При наличии внешнего сопротивления нестационарному деформированию выражение (1) может быть дополнено слагаемым, соответствующим внешнему трению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = L[\mathbf{u}], \quad (3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент диссипации при внешнем трении,  $1/c$ .

Для учёта внутреннего трения, выражение (2) может быть модифицировано следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = L \left[ \mathbf{u} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right], \quad (4)$$

где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения, с.

В случае, когда имеется и внутреннее трение и внешнее сопротивление, выражение (2), примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = L \left[ \mathbf{u} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right], \quad (5)$$

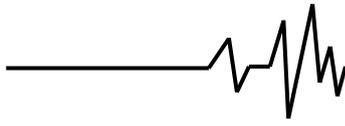
После выполнения преобразования Лапласа выражение (5) в пространстве изображений можно записать:

$$s^2 \mathbf{u}_S + \alpha \cdot s \cdot \mathbf{u}_S = L^S [\mathbf{u}_S + \eta \cdot s \cdot \mathbf{u}_S], \quad (6)$$

которое может быть преобразовано к следующему:

$$s^2 \mathbf{u}_S + \alpha \cdot s \cdot \mathbf{u}_S = L^S [\mathbf{u}_S] \cdot (1 + \eta \cdot s). \quad (7)$$

Из выражения (7) можно выразить оператор  $L^S [\mathbf{u}_S]$ :



$$L^S[\mathbf{u}_S] = \frac{s^2 + \alpha \cdot s}{1 + \eta \cdot s} \mathbf{u}_S. \quad (8)$$

Введя следующую замену:

$$\frac{s^2 + \alpha \cdot s}{1 + \eta \cdot s} = p^2, \text{ откуда } p = \sqrt{\frac{s^2 + \alpha \cdot s}{1 + \eta \cdot s}}$$

выражение (8) можно переписать в виде:

$$p^2 \mathbf{u}_P = L^P[\mathbf{u}_P]. \quad (9)$$

То есть по сути можно сформулировать главный вывод, что для искомых функций, изображения которых могут быть найдены аналитически в упругой постановке, нужно сделать обратное преобразование не по переменной Лапласа  $s$ , а по её функции  $p(s)$ . Причем в случае, когда имеется

внешнее сопротивление  $p(s) = \sqrt{s^2 + \alpha \cdot s}$ , при наличии только внутреннего трения

$$p(s) = \sqrt{\frac{s^2}{1 + \eta \cdot s}}, \text{ а для общего случая } p(s) = \sqrt{\frac{s^2 + \alpha \cdot s}{1 + \eta \cdot s}}.$$

Для выполнения обратного преобразования Лапласа можно воспользоваться теоремой Эфроса или известным в операционном исчислении преобразованием Эфроса [5].

$$F[q(p)] = q(p) \int_0^{\infty} \psi(\xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad \psi(\xi, t) = e^{-\xi \cdot q(p)} \quad (10)$$

В учебнике [6] для функций вида  $p(s) = \sqrt{s}$  приведено следующее соотношение:

$$\frac{F[\sqrt{s}]}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau. \quad (10)$$

Возвращаясь к выражению (1), можно записать:

$$u(t) = \int_0^t K_D(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $K_D(t)$  – ядро, учитывающее внутреннее трение.

Модифицированное ядро с учетом диссипации согласно преобразованию Эфроса может быть найдено как:

$$K_D(t) = \int_0^{\infty} \psi(t, \tau) \cdot K(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Заметим, что если рассмотреть предельный случай, когда  $p(s) = s$  функция  $\psi(t, \tau)$  будет являться дельта-функцией Дирака:  $\psi(t, \tau) = \delta(t - \tau)$ , тогда

$$K_D(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) \cdot K(\tau) d\tau = K(t) \text{ (для}$$

сравнения см. на рис.1), а выражение

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = H(t - \tau) \text{ (интеграл дельта-}$$

функции Дирака) – как известно, функция Хевисайда (для сравнения см. на рис.2).

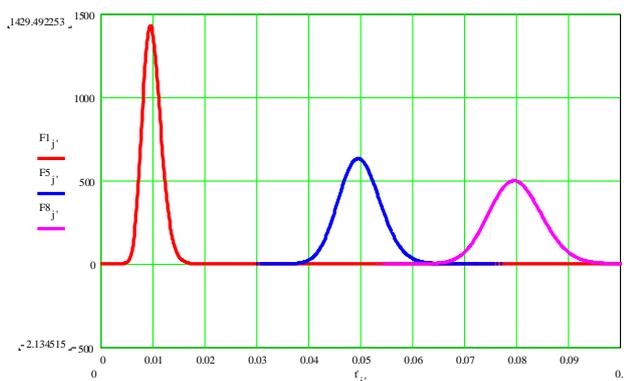


Рис. 1. Численное определение функции  $\psi(t, \tau)$

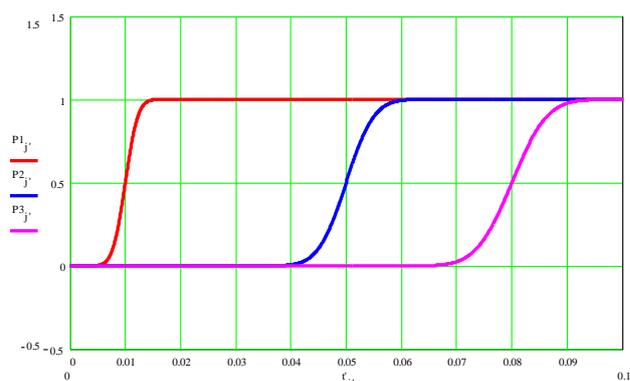
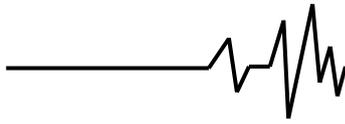


Рис. 2. Изменение функции вероятности



Аналитически функцию  $\Psi(t, \tau)$  для случая внутреннего трения и общего случая получить довольно сложно, и так как в дальнейшем для выражений (1) или (11) будет выполняться дискретизация, то функция  $\Psi(t, \tau)$  определялась численно. Расчеты показали, что в случае внутреннего трения эта функция практически совпадает с интегралом Гаусса:

$$\Psi_G(t, \tau) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(\tau-t)^2}{2\cdot\sigma^2}} d\tau. \quad (13)$$

где  $\sigma^2 = \eta t$  – дисперсия (см. рис. 1), а переменная времени  $t$  – будет влиять как математическое ожидание.

Вид дельта-функции Дирака хорошо известен и представляет собой импульс бесконечно малой ширины и бесконечно большой высоты, площадь которого равна единице, имеет четкое математическое обоснование. Однако имеется ряд вопросов с его физическим обоснованием и реализацией. В случае учёта диссипации энергии дельта-функция заменяется на дельта-образующую последовательность (для случая вязкого трения на основе интеграла Гаусса – см. рис. 1) и картина становится более реалистичной, то есть у нас имеются амплитуды конечной высоты и конечной ширины  $b\sigma$  (т.к.  $t \pm 3\sigma$ ). Причем в зависимости от момента времени и коэффициента диссипации ширина будет меняться при постоянстве площади. Это

подтверждается современными исследованиями упругих материалов при нагружении: в большинстве случаев вязкоупругие или пластические деформации всё же появляются, но они пренебрежимо малы.

Использование интеграла Гаусса при выполнении преобразования Эфроса для ядра позволяет заменить пределы интегрирования в выражении (12) от 0 до  $\infty$  на  $t - 3\sigma$  и  $t + 3\sigma$  соответственно:

$$K_D(t) = \int_{t-3\sigma}^{t+3\sigma} \Psi_G(t, \tau) \cdot K(\tau) d\tau. \quad (14)$$

После дискретизации выражение (14) эквивалентно следующему матричному соотношению:

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{A}_G \mathbf{K}, \quad (15)$$

где вектор  $\mathbf{K}$  соответствует «упругому» ядру Коши  $K(t)$  в выражении (1), вектор  $\mathbf{K}_D$  – ядру  $K_D(t)$  для вязкоупругого случая в выражении (11), а матрица  $\mathbf{A}_G$  – является по сути весовой Гауссовой матрицей, соответствующей  $\Psi_G(t, \tau)$ , причем ее элементы получены как с использованием интеграла Гаусса, так и с функцией вероятности этого интеграла (рис. 2), в случае, если при дискретизации выражения (11) использовать частичное интегрирование:

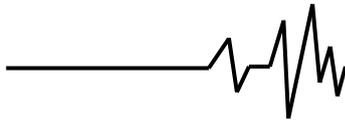
$$K_D(t_j) = \sum_{i=J1}^{J2} K(t_i) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \Psi_G(t_j, \tau) \cdot d\tau, \quad (16)$$

где  $t_j = j \cdot \Delta t$  – дискретное время,  $J1$  и  $J2$  – числа соответствующие моментам времени  $t_j - 3\sigma_j$  и  $t_j + 3\sigma_j$ .

Напомним, что для предельного случая, когда  $p(s) = s$ , вместо функции вероятности (рис. 2), в формулу (18) войдет функция Хевисайда. Таким образом, можно сказать, что вязкоупругая модель (учитывающая диссипацию) сглаживает фронт изменений, причем большим значениям коэффициента  $\eta$  будет соответствовать более сильное сглаживание скачка и его наклона (более плавный переход от нуля к единице).

Укажем, что для получения дискретного вектора  $\mathbf{K}_D$  с  $J$ -элементами необходимо иметь исходный вектор  $\mathbf{K}$ , для которого будет известно  $J_\sigma = J + 3 \cdot \sigma_j / \Delta t$  значений, а также рассчитать элементы весовой матрицы  $\mathbf{A}_G$  размером  $J * J_\sigma$ .

Таким образом, для перехода от упругой модели к вязкоупругой, согласно матричному выражению (15) необходимо получить один раз для конкретной задачи весовую матрицу  $\mathbf{A}_G$ . Затем модифицировать все упругие ядра  $\mathbf{K}$  в  $\mathbf{K}_D$ , при этом длина вязкоупругих ядер



станет короче, то есть потеряется небольшая часть информации в конце исследуемого промежутка времени, так как дисперсия для  $\Psi_G(t, \tau)$  зависит от  $\Delta t$  и величины коэффициента диссипации:  $\sigma_J = f(\eta, \Delta t)$ .

**Пример для вязкоупругой пластины.** Выражение для прогиба пластины в случае, когда на неё действует нестационарная поперечная нагрузка  $P(t)$ , приведено, например в [7], имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Omega_{1kn} \cdot \sin \omega_{1kn}(t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin \omega_{2kn}(t) \right] \times \left[ \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right) \right], \quad (18)$$

где  $\omega_{1kn}$  и  $\omega_{2kn}$  – собственные частоты колебаний пластины;  $l$  и  $m$  – длина и ширина пластины;  $(x_0, y_0)$  – координаты точки, в которой прикладывается нагрузка, а  $(x_S, y_S)$  – это координаты точки, в которой определяется изменение прогиба во времени.

На рис. 3. представлен вид ядер в свёрточных интегралах: кривая 1

где  $w(x, y, t)$  – изменение прогиба пластины во времени;  $K_i(x, y, t)$  – упругое разностное ядро интеграла типа свертки в точке пластины с координатами  $(x, y)$ .

Методы получения ядер и их вид описаны в [6].

Если считать, что возмущающая сила является сосредоточенной нагрузкой, то соответствующее ядро Коши  $K(t)$  в интегралах свертки для шарнирно-опертой пластины средней толщины типа С. П. Тимошенко будет иметь вид:

соответствует исходному упругому ядру (18), а кривые 2, 3 и 4 соответствуют модифицированным ядрам согласно описанной выше теореме Эфроса (15) с относительными коэффициентами диссипации  $\eta' = 1\%$ ,  $\eta' = 2\%$  и  $\eta' = 10\%$ .

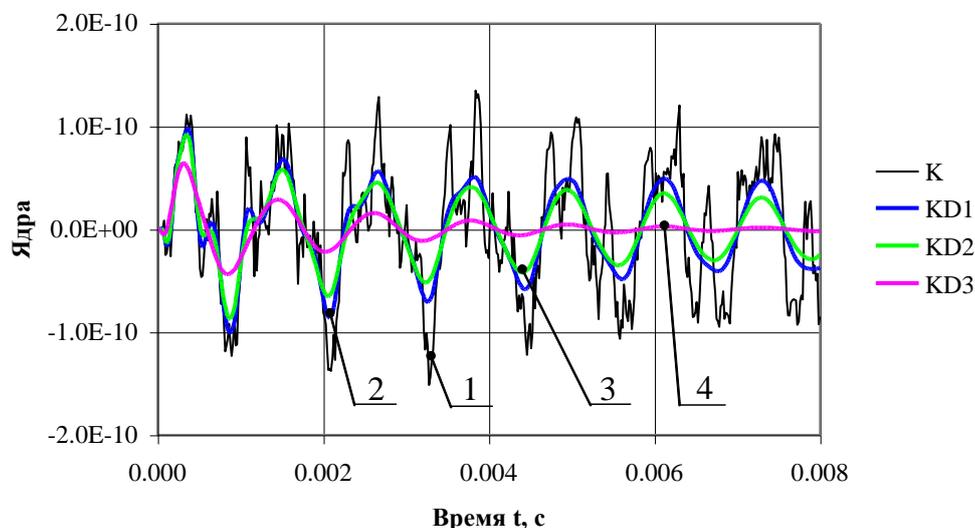
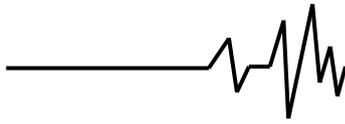


Рис. 3. Вид исходных и модифицированных ядер Коши



Отметим, что после применения процедуры модификации на основе теоремы Эфроса (процедуры Эфроса) согласно выражению (15) влияние вязкости проявляется в так называемом выглаживании ядер, поэтому при численных расчетах упругих ядер необходимо учитывать значительно меньшее число членов в соответствующих двойных рядах Фурье. В принципе это подтверждается известным свойством вязкого трения поглощать все высокие частоты и косвенно может указывать на правильность полученных в настоящей работе соотношений.

Для использования полученных дискретных модифицированных ядер выполнена дискретизация выражения (17), то есть на малых дискретных участках времени ( $\Delta t = T / J$ , где  $T$  – исследуемый промежуток, а  $J$  – число шагов дискретизации) сила  $P(t) = P(j \cdot \Delta t) = P_j$ , ядра  $K_D(t) = K_D(j \Delta t)$  а также значения прогиба  $w(t) = w_j$  считались постоянными. В результате можно записать следующее матричное соотношение:

$$w = A_D \cdot P, \quad (19)$$

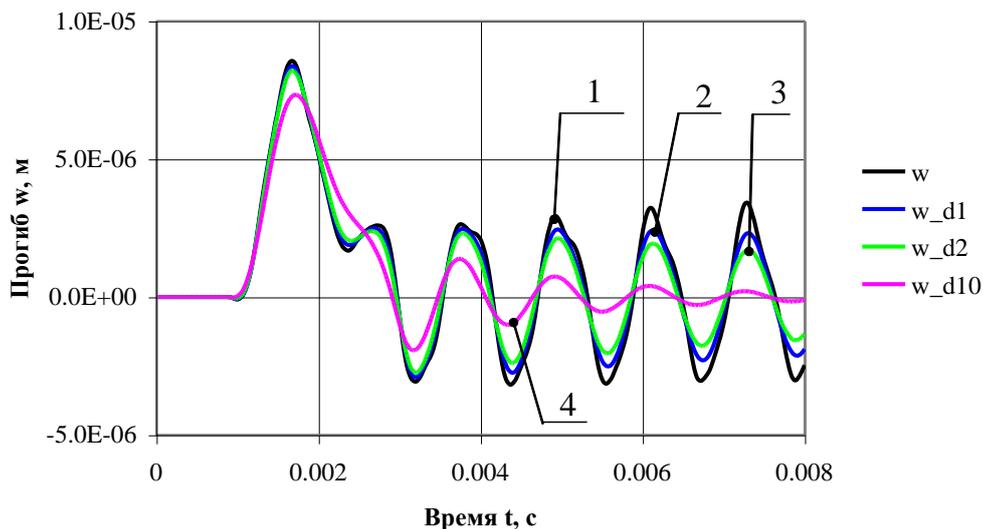


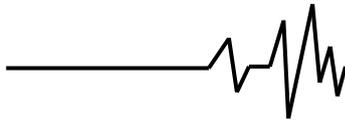
Рис. 4 – Изменения прогиба упругой и вязкоупругой пластины

**Выводы.** В работе описан подход, при котором становится возможным на базе аналитического решения в упругой постановке производить расчеты для деформирования элементов конструкции с учетом диссипативных свойств, например, внутреннего трения в материале. Предложенный подход применим практически для любых упругих моделей, в которых решение может быть получено с использованием операционного исчисления, когда итоговые соотношения могут

где матрица  $A_D$  соответствуют модифицированному ядру  $K_D$ .

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров:  $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu=0.3$ ;  $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $h=0.04 \text{ м}$ ;  $l=0.6 \text{ м}$ ,  $m=0.4 \text{ м}$ . Координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения:  $x_0=0.4 \text{ м}$ ,  $y_0=0.3 \text{ м}$ . Координаты точки, в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины:  $x_s=0.25 \text{ м}$ ,  $y_s=0.1 \text{ м}$ ; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье  $20 \times 20$ .

Результаты расчетов упругого и вязкоупругого прогиба приведены на рис. 4: кривой 1 отвечает упругое изменение прогиба во времени в произвольной точке пластины, а кривым 2, 3 и 4 – прогибы с учетом внутреннего трения при коэффициентах  $\eta' = 1\%$ ,  $\eta' = 2\%$  и  $\eta' = 10\%$  соответственно.



выражению (15), необходимо получить один раз для конкретной задачи весовую матрицу  $A_G$ , а затем модифицировать все упругие ядра  $K$  в  $K_D$  с учетом внутреннего трения в материале.

Описанный подход базируется на основе операторного метода и преобразования Эфроса. Представлены упругие и вязкоупругие ядра демонстрирующие процедуру модификации, а также приведены графики прогибов, показывающие влияние диссипации в процессе деформирования.

#### Список использованных источников

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

2. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С.: Монография. – Харьков ХНАДУ, 2004. – 392 с.

3. Григорьев А. Л., Молдавский Э. А., Тартаковский И. И. Операторный метод расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы. / Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции 18-21 сентября 1991 г. Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов. Харьковский ордена Ленина авиационный институт им. Н. Е. Жуковского. Харьков. Типография ХВВКИУРВ – 1991, С. 78.

4. Грунауэр А. А., Тартаковский И. И., Григорьев А. Л. О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985. – Вып. 39. с. 7-22.

5. Интегральные преобразования и операционное исчисление В. А. Диткин, А. П. Прудников. Государственное издательство физико-математической литературы. М. – 1961, 524 с.

6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

7. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Прикл. Механика. 2003. 39. №10. С. 97-102.

#### References

1. Filippov A. P. Kolebaniya deformiruyemykh sistem. - M. : Mashinostroyeniye, 1970. - 734 s.

2. Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsiy / Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. : Monografiya. - Kharkov KHNADU, 2004. - 392 s.

3. Grigoriev A. L., Moldavskiy E. A., Tartakovskiy I. I. Operatornyy metod rascheta vynuždennykh kolebaniy vyazkouprugoy mekhanicheskoy sistemy. / Tezisy dokladov IV Vsesoyuznoy konferentsii 18-21 sentyabrya 1991 g. Sovremennyye problemy stroitel'noy mekhaniki i vysokikh letatel'nykh apparatov. Khar'kovskiy ordena Lenina aviatsionnyy institut im. N. Ye. Zhukovskogo. Khar'kov. Tipografiya KHVVKIURV - 1991, s. 78.

4. Grunauer A. A., Tartakovskiy I. I., Grigoriev A. L. O teorii sil i mekhanizmov: Resp. mezhdved. nauch.-tekhn. sb. - KH. : Vishcha shk. Izd-vo pri Khar'k. un-te, 1985. - Vyp. 39. s. 7-22.

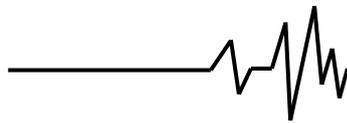
5. Integral'nyye preobrazovaniya i operatsionnoye ischisleniye V. A. Ditkin, A. P. Prudnikov. Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury. M. - 1961, 524 s.

6. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoye ischisleniye. Teoriya ustoychivosti: Uchebnoye posobiye, 2-ye izd., Pererab. I dop. - M. : Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1981.

7. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V. Identifikatsiya impul'snogo nagruzheniya uprugoy pryamougol'noy plastiny. // Prikl. Mekhanika. 2003. 39. №10. S. 97-102.

## ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДУ І ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕФРОСА ДЛЯ УРАХУВАННЯ ДИСИПАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕФОРМІВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На основі операторного методу і перетворення Ефроса запропонований підхід, що дозволяє на базі розв'язків, отриманих в рамках теорії пружності, для деформівних елементів конструкції враховувати їх дисипативні властивості і зокрема внутрішню тертя в матеріалі. Зазначений підхід може бути застосований для аналітичних розв'язань, які можуть бути представлені у вигляді інтегралів типу згортки. Для операторного рівняння виконується пряме перетворення Лапласа. В роботі показано, що в просторі зображень можна перейти від співвідношень, що враховують дисипації енергії, до співвідношень для пружної пластины зробивши заміну змінної Лапласа. Для виконання оберненого



перетворення Лапласа складної функції використовується теорема Ефроса. Задача зводиться до знаходження невідомої функції трансформації. Числові розрахунки показали, що в розглянутій задачі (для малих величин змінної часу) закон зміни цієї функції дуже близький до закону нормального розподілу (Гаусса) зі змінною дисперсією.

Так як при обчисленнях інтегралів виконується дискретизація, то замість перетворення Ефроса можна скористатися запропонованою в роботі модифікацією ядер відповідно до теореми Ефроса, причому ця модифікація здійснюється множенням дискретних аналогів вихідних ядер на спеціальним чином отримані на базі інтеграла Гаусса матриці.

Наведено приклад розрахунку прогину пружної і в'язкопружної пластини, а також показані ядра інтегралів згортки для «пружного» рішення та з урахуванням дисипації енергії (внутрішнього тертя в матеріалі пластини). Розглянуто поперечне імпульсне навантаження прямокутної ізотропної пластини середньої товщини. Вважалось, що пластинка має шарнірне обпирання по всьому контуру. Деформування пластини моделювалось в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Мається можливість швидкого перерахунку прогинів і деформацій пластини з урахуванням внутрішнього тертя для різних значень коефіцієнтів дисипації.

**Ключові слова:** в'язкопружна пластинка середньої товщини, нестационарне деформування, дисипативні властивості, внутрішнє тертя, перетворення Лапласа, теорема Ефроса.

## USING OPERATOR METHOD AND EFROS TRANSFORM FOR TAKING INTO ACCOUNT DISSIPATIVE PROPERTIES OF DEFORMABLE STRUCTURAL ELEMENTS

**Abstract:** An approach for taking into account the dissipative properties of deformable structural elements (and in particular internal friction in the material) is proposed. This approach, based on the operator method and Efos transformation, is applied to analytical solutions obtained in the framework of elasticity theory, which can be represented as integrals of convolution type. The direct Laplace transform is applied to the operator equation. It is shown in the paper that changing to the Laplace variable enables one to pass from the relations taking into account dissipation energy to those for an elastic plate in the image space. The Efos theorem is used to perform the inverse Laplace transform of the complex function obtained. The posed problem is reduced to finding an unknown transforming function. Numerical calculations showed that in the problem considered (for small values of the time variable) the law of this function variation is very close to the law of normal distribution (Gaussian) with variable dispersion.

Since the integral equations are discretized the kernel numerical modification is proposed by the Efos theorem. This modification is carried out by multiplying the discrete analogs of the original kernels by the special matrix obtained on the basis of the Gauss integral.

The example of computing elastic and viscoelastic plate deflection is given, kernels of convolution integrals are presented for the "elastic" solution taking into account dissipation energy (internal friction in the material of the plate). Transversal impulse action on rectangular isotropic plates of medium thickness is considered. The plates are assumed to be hinged along the whole boundary. The plate deforming is simulated by the Timoshenko's refined theory. It is possible to relatively quickly recalculate the deflections and deformations of the plate, taking into account internal friction for different values of the dissipation coefficients.

**Keywords:** medium-thickness viscoelastic plate, nonstationary deforming, dissipative properties, internal friction, Laplace transformation, Efos theorem.

### Сведения об авторах

**Воропай Алексей Валериевич** – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; т.: 050-5249254; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Воропай Олексій Валерійович** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Voropay Alexey Valerievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.