**Ольшанський В.П.**

д.ф.-м.н., професор

**Ольшанський С.В.**

к.ф.-м.н., доцент

**Харківський  
національний технічний  
університет сільського  
господарства  
ім. П. Василенка****Olshanskii V.****Olshanskii S.****Kharkiv Petro Vasilenko  
National Technical  
University of Agriculture****УДК 534.1:539.3****ПРО ЕФЕКТ НЕСИМЕТРІЇ  
СИЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ  
МЕХАНІЧНОМУ УДАРІ**

Розглянуто особливості руху механічної системи з одним ступенем вільності, у випадку несиметрії її характеристики пружності, при вертикальному ударі падаючим твердим тілом. Показано, що внаслідок несиметрії характеристики, максимальні переміщення системи вниз, у напрямі швидкості удару, можуть бути менші за максимальні переміщення системи вгору. Визначено умови, коли має місце вказана нерівність. Умови залежать не тільки від власних параметрів коливальної системи, а також від маси і швидкості тіла, що вдаряє. Дослідження виконано з припущенням, що механічний удар абсолютно непружний, коли після миттєвого зіткнення твердих тіл вони рухаються разом з однаковою швидкістю і однаковим прискоренням.

**Ключові слова:** динамічний ефект несиметрії, коливальна система, кусково-лінійна характеристика пружності, механічний удар.

**Постановка проблеми.** Коливальні системи з несиметричною силовою характеристикою поширені в техніці. Це системи, де поряд з основним пружним несучим елементом встановлюють додатковий пружний елемент підсилювач жорсткості або обмежувач руху. Зокрема в підвісках транспортних засобів такими є підресорник і буфер. Питання про вільні та вимушені періодичні коливання таких систем розглядали в [1-3] та інших публікаціях. Тут іде мова про ударне навантаження. Саме короткочасні ударні або імпульсні навантаження можуть призвести до руйнування або передчасного виходу з ладу пружних елементів конструкцій. Тому вивченню динаміки пружних систем при механічному ударі присвячено багато публікацій, із яких виділимо монографічні видання [4-8] та підручник [9]. Але нестационарні коливання нелінійних систем, спричинені ударом, вивчені недостатньо, що послужило мотивом цієї статті.

**Формування мети дослідження.**

Метою статті є встановлення умов, за яких проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики, коли переміщення системи у напрямі дії динамічного навантаження менші, ніж переміщення її у

протилежному напрямі.

**Виклад основного матеріалу**

**дослідження.** Як це прийнято в технічній теорії, удар вважаємо миттєвим, причому зіткнення тіл відбувається в момент часу  $t = 0$ . Тоді післяударний рух системи, з силовою характеристикою у вигляді відрізків двох прямих, описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x))x = m_0 g, \quad (1)$$

у якому  $M = m + m_0$ ;  $m$  – маса коливальної системи до удару;  $c_1, c_2$  – характеристики її пружності;  $m_0$  – маса тіла, що вдаряє;  $g$  – прискорення вільного падіння; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

Рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 = m_0 V_0 / M. \quad (2)$$

Тут  $V_0$  – швидкість зіткнення тіл.

Поділимо післяударний рух механічної системи на два етапи. Перший  $t \in (0; t_*)$  стосується переміщень системи вниз, коли  $x(t) > 0$ . Розв'язок рівняння (1) при початкових умовах (2), подається виразом:

$$x(t) = x_{CT} + A \sin(\omega t - \alpha), \quad (3)$$

$$\text{у якому } x_{CT} = \frac{m_0 g}{c_1 + c_2}; \quad A = \sqrt{x_{CT}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_{CT} \cdot \omega}{v_0}.$$



Згідно з (3), максимальне відхилення системи вниз  $a_0$  дорівнює:

$$a_0 = x_{CT} + \sqrt{x_{CT}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (4)$$

і досягається воно, коли:

$$t = t_0 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right).$$

Залежність (4) відома в технічній теорії удару як формула Кокса [3, 5]. Її можна вивести також із енергетичних міркувань, не розв'язуючи диференціального рівняння (1). Так у опорі матеріалів [9] традиційно

$$\frac{1}{2}(c_1 + c_2)a_0^2 - m_0g(a_0 + a_1) = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)a_1^2. \quad (6)$$

Розв'язавши це квадратичне рівняння, отримуємо:

$$a_1 = -\frac{m_0g}{c_1 - c_2} + \sqrt{\left(\frac{m_0g}{c_1 - c_2}\right)^2 + \frac{(c_1 + c_2)a_0^2 - 2m_0ga_0}{c_1 - c_2}}. \quad (7)$$

Але при цьому залишається невизначеним час  $t = t_1$ , коли досягається відхилення  $a_1$ . Щоб знайти його доводиться розв'язувати диференціальне рівняння:

$$M \ddot{x} + (c_1 - c_2)x = m_0g, \quad (8)$$

з початковими умовами:

$$x(2t_0) = 0; \quad \dot{x}(2t_0) = -v_0.$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$x(t) = \frac{m_0g}{c_1 - c_2} - B \sin[\omega_1(t - 2t_0) + \beta], \quad (9)$$

де  $B = \sqrt{\left(\frac{m_0g}{c_1 - c_2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_1}\right)^2}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{M}};$

$$\beta = \arctg \frac{m_0g \cdot \omega_1}{(c_1 - c_2)v_0}.$$

Тому час максимального відхилення системи вгору становить:

$$t_1 = 2t_0 + \frac{1}{\omega_1} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right).$$

Із (9) також випливає, що:

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{m_0g}{c_1 - c_2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_1}\right)^2} - \frac{m_0g}{c_1 - c_2}. \quad (10)$$

Формулі (7) легко надати вигляд (10), якщо використати залежність (5). Отже розв'язок диференціального рівняння (8) і енергетичне співвідношення (6) дають однакові значення  $a_1$ .

Маючи вирази для обчислення  $a_0$  і  $a_1$ , порівняємо їх значення.

Динамічний ефект несиметрії силової характеристики полягає в тому, що:

використовують закон збереження механічної енергії:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + m_0ga_0 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)a_0^2, \quad (5)$$

звідки і випливає формула (4), але при цьому залишається невизначеним час  $t_0$ .

У подальшому русі, при  $t > t_0$ , осцилятор повертається у вихідне положення  $x = 0$  в момент часу  $t = t_* = 2t_0$ . Далі він рухається вгору і його амплітудне відхилення в цьому напрямі  $a_1$  можна обчислювати із енергетичного співвідношення:

$$a_1 > a_0. \quad (11)$$

З'ясуємо умови, коли виконується ця нерівність. Для цього, підставивши вираз (7) в (11), одержуємо:

$$\sqrt{\left(\frac{m_0g}{c_1 - c_2}\right)^2 + \frac{(c_1 + c_2)a_0^2 - 2m_0ga_0}{c_1 - c_2}} > \frac{m_0g}{c_1 - c_2} + a_0$$

Після піднесення до квадрату, цій нерівності надаємо компактний вигляд:

$$a_0 > \frac{2m_0g}{c_2}.$$

З урахуванням (4) вона зводиться до:

$$v_0^2 > 4\omega^2 \frac{m_0g}{c_2} \left( \frac{m_0g}{c_2} - x_{CT} \right) = 4 \frac{c_1}{c_2^2} \frac{(m_0g)^2}{M}$$

Тоді, згідно з (2):

$$V_0^2 > 4M \frac{c_1}{c_2^2} g^2.$$

Звідки одержуємо мінімальне значення швидкості удару, коли проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики, тобто виконується нерівність (11):

$$V_0 > V_{\min} = \frac{2g}{c_2} \sqrt{Mc_1}. \quad (12)$$

Якщо  $c_2 \rightarrow 0$ , то силова характеристика стає симетричною і вказаний ефект не проявляється. У випадку, коли не враховується дія ваги тіла, що вдаряє ( $g = 0$ ), ефект має місце при любых швидкостях удару.



Приклад. Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 1400$  кг;  $c_1 = 183 \cdot 10^3$  Н/м;  $c_2 = 33 \cdot 10^3$  Н/м;  $m_0 = 100$  кг і різні швидкості удару. Прийнятим вихідним даним

відповідає:  $M = 1500$  кг;  $\omega = 12$  с<sup>-1</sup>;  $x_{CT} \approx 0,00454$  м;  $V_{\min} = 9,8505$  м/с. Обчисленні амплітуди переміщень і їх відношення записано в табл. 1.

Таблиця 1

Значення  $a_0$  і  $a_1$  для різних  $V_0$

$V_0$ , м/с	5	9	10	15	20
$100a_0$ , м	3,269	5,475	6,028	8,800	11,575
$100a_1$ , м	2,743	5,382	6,045	9,367	12,695
$a_1/a_0$	0,839	0,983	1,003	1,064	1,097

Вказані в табл. 1 числові результати підтверджують, що динамічний ефект несиметрії характеристики проявляється лише для швидкостей удару  $V_0 > V_{\min}$ , тобто коли

виконується нерівність (12).

Значення часу, коли досягається вказані вище амплітуди переміщень, записано в табл. 2.

Таблиця 2

Значення  $t_0$  і  $t_1$  при різних  $V_0$

$V_0$ , м/с	5	9	10	15	20
$10t_0$ , с	1,444	1,384	1,377	1,354	1,343
$10t_1$ , с	4,265	4,230	4,227	4,211	4,208

Тут зі збільшенням  $V_0$  відбувається незначне зменшення  $t_0$  і  $t_1$ .

З метою перевірки аналітичних розв'язків, проведено числове інтегрування рівняння (1) на комп'ютері. Одержані при  $V_0 = 9$  м/с і  $V_0 = 15$  м/с графіки  $x(t)$

подано на рисунку. На першому графіку  $a_0 > a_1$ , на другому –  $a_0 < a_1$ . Порівняння підтверджує узгодженість графічних результатів на рисунку з числовими результатами в таблицях.

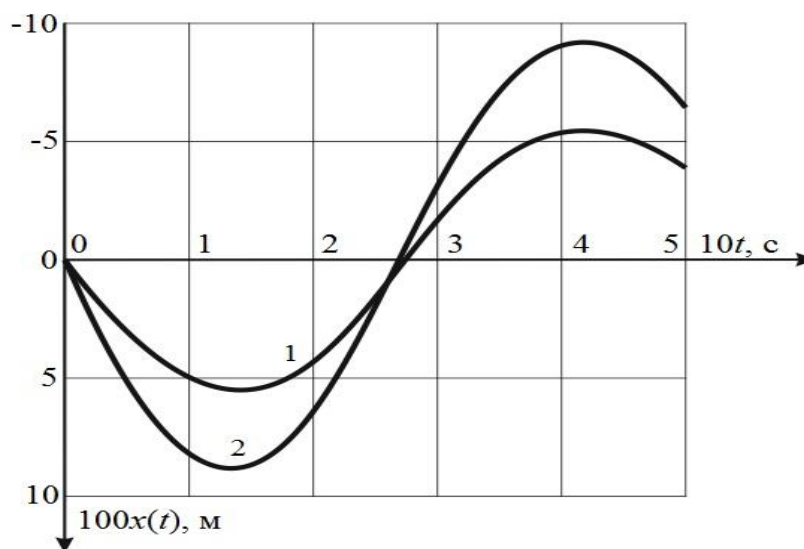


Рис. 1. Графіки  $x(t)$ : 1 –  $V_0 = 9$  м/с; 2 –  $V_0 = 15$  м/с

**Висновки.** Дослідження показало, що при виконанні встановлених вище умов, внаслідок несиметрії силової характеристики системи, її максимальні переміщення в напрямі

швидкості удару можуть бути меншими, ніж максимальні переміщення у протилежному напрямі. Саме в цьому полягає сутність ефекту, що аналізувався в роботі.

**Список використаних джерел**

1. Вибрации в технике. Колебания нелинейных механических систем. [в 6-х т.]. Под общей ред. И.И. Блехмана – М.: Машиностроение. –1972. – Т.2. – 351 с.
2. Аврамов К.В. Модели нелинейной механики в прикладных задачах энергетического машиностроения / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин, Ю.А. Ищук// Харьков: НТУ«ХПИ» –2006.– 142 с.
3. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А.А. Ларин// Севастополь : Вебер. – 2013. – 403 с.
4. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит//М. : Госстройиздат–1965. – 447 с.
5. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел / Н. А. Кильчевский//К. : Наукова думка. – 1969. – 247 с.
6. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов// М.: Машиностроение. – 1970. – 734 с.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара /Я. Г. Пановко // М.: Наука, – 1977. – 232 с.
8. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский // Харьков : Міськдрук, –2012. – 320 с.
9. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський // К.: Вища школа. – 2004. – 655 с.

**Список джерел у транслітерації**

1. Blehman I.I. (1972) *Vibratsii v tehnikе. Kolebaniya nelineynyih mehanicheskikh sistem. [Vibrations in technology. Oscillations of nonlinear mechanical systems].* (Vols. 4). – Moscow: Mechanical Engineering [in Russian].
2. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V., Ischuk Yu. A. *Modeli nelinejnoj mekhaniki v prikladnyh zadachah ehnergeticheskogo mashinostroeniya [Models of nonlinear mechanics in applied problems of power engineering].* Kharkov : NTU «KhPI [in Russian].
3. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebanij [Essays history of development theory of mechanical oscillations].* Sevastopol: Weber, [in Russian].
4. Goldsmith B. *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemyh tel [Strike. Theory and physical properties of collapsed bodies].* Moscow : Gosstroizdat [in Russian].
5. Kilchevsky N. A. *Teoriya soudareniya tverdyh tel [The theory of collision of solids].* Kyiv : Scientific Opinion [in Russian].
6. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemyh sistem [Oscillations of deformable systems].*

Moscow : Mechanical Engineering [in Russian].

7. Panovko Y. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara [Introduction to the theory of mechanical shock].* – Moscow: Nauka [in Russian].

8. Olshanskii V. P., Olshanskii S. V., Tishchenko L. M. *Kolebaniya sterzhnej i plastin pri mekhanicheskom udare [Oscillations of rods and plates during a mechanical shock].* Kharkov : Miskdruk [in Russian].

9. Pisarenko G. S., Kvitka A. L., Umansky E. S. *Opir materialiv [Materials Resistance].* Kyiv : Higher school [in Ukrainian].

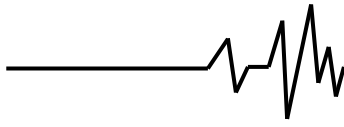
**ОБ ЭФФЕКТЕ НЕСИММЕТРИИ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ УДАРЕ**

*Рассмотрены особенности движения механической системы с одной степенью свободы, в случае несимметрии ее характеристики упругости, при ударе падающим твердым телом. Показано, что вследствие несимметрии характеристики, максимальные перемещения системы вниз, в направлении скорости удара, могут быть меньшими максимальных перемещений системы вверх. Определены условия, когда имеет место указанное неравенство. Условия зависят не только от собственных параметров колебательной системы, а также от массы и скорости ударяющего тела. Исследование выполнено в предположении, что механический удар абсолютно неупругий, когда после мгновенного столкновения твердых тел они движутся вместе с одинаковыми скоростями и ускорением.*

**Ключевые слова:** динамический эффект несимметрии, колебательная система, кусочно-линейная характеристика упругости, механический удар.

**ON THE EFFECT OF NON-SYMMETRY OF THE POWERFUL CHARACTERISTICS OF THE VIBRATION SYSTEM IN MECHANICAL IMPACT**

*The features of the motion of a mechanical system with one degree of freedom are considered, in the case of asymmetry of its elasticity characteristics, with a vertical impact by a falling solid. It is shown that as a result of asymmetry of the characteristics, the maximum movements of the system downward in the direction of the impact velocity may be less than the maximum displacement of the system upward. Conditions are defined when this inequality holds. The conditions depend not only on the proper parameters of the oscillatory system, but also on*



the mass and velocity of the impacted body. The investigation was carried out on the assumption that the mechanical impact is absolutely inelastic, when after an instantaneous collision of solids they move together with the same speed and the

same acceleration.

**Keywords:** dynamic effect of asymmetry, oscillatory system, piecewise linear characteristic of elasticity, mechanical impact.

#### **Відомості про авторів**

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка (вул. Алчевських 44, кафедра фізики і теоретичної механіки, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com).

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка (e-mail: stasolsh77@gmail.com).

**Ольшанский Василий Павлович** – д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики и деталей машин Харьковского национального университета сельского хозяйства.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – к.ф.-м.н., доцент, Харьковский национальный университет сельского хозяйства (E-mail: stasolsh77@gmail.com).

**Olshansky Vasily Pavlovich** – Professor of the Department of Theoretical Mechanics and Machine Parts, Kharkiv National University of Agriculture, Dr. Sci. (Phys.-Math).

**Olshansky Stanislav Vasilyevich** – Candidate . Sci. (Phys.-Math), (E-mail: stasolsh77@gmail.com).