

**I. ТЕОРІЯ ПРОЦЕСІВ ТА МАШИН****Драч І.В.**

к.т.н., доцент

**Хмельницький
національний
університет****Drach I.****Khmelnytsky National
University****УДК 62-752****ВИЗНАЧЕННЯ ФОРМИ ВІЛЬНОЇ
ПОВЕРХНІ РІДИНИ, ЩО
ОБЕРТАЄТЬСЯ У ЗАМКНУТІЙ
ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ
КАМЕРИ АВТОБАЛАНСУЮЧОГО
ПРИСТРОЮ**

Стаття містить математичні моделі стаціонарного руху у жорстких опорах жорсткого ротора з циліндричною камерою, частково заповненою рідиною. Розглянуті випадки обмеженої зверху камери, ексцентрично і симетрично розташованої на валу. У кожному з випадків на основі інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги рідини установлені закони розподілу тиску в рідині і визначені форми поверхонь рівного тиску. Розглянуті випадки моделюють поведінку рідини в автобалансири без врахування зовнішнього демпфування. Встановлено, що рідина розташовується симетрично відносно осі обертання системи. При цьому основна її маса концентрується з боку ексцентриситету (при ексцентричному розташуванні камери). Одержанні результати проаналізовано за допомогою 3-D моделювання у середовищі MatLab. Аналіз побудованих моделей вказує на те, що автоматично збалансувати жорсткий ротор у жорстких опорах рідиною неможливо. Це підтверджують результати експериментальних досліджень, одержані методом динамічної фотозйомки, яка реалізується на сучасній комп'ютерній і відеотехніці та дає можливість наочно перевірити теоретичні результати.

Ключові слова: ротор, незрівноваженість ротора, жорсткий ротор, ексцентриситет, автоматичне балансування, рідинний автобалансуючий пристрій (АБП).

Постановка проблеми. У сучасних машинах важливе значення має питання про зниження їх вібрацій, що викликаються, в першу чергу, незрівноваженістю ротора. Високі робочі швидкості машин призводять до того, що навіть невелика незрівноваженість викликає появу значних динамічних навантажень і пов'язаних із цим підвищених вібрацій ротора й агрегату в цілому, що погіршують роботу агрегату і можуть викликати поломку машини або руйнацію фундаменту.

Демпфування коливань у машинах за допомогою пружних підвісок не усуває повністю шкідливого впливу вібрацій. Зменшення динамічних навантажень на фундамент досягається тільки на певних швидкостях, на інших швидкостях ці навантаження можуть навіть зростати. При застосуванні пружних підвісок ротор залишається незрівноваженим.

Тому напруги в ньому і навантаження на опори не усуваються. У області критичної швидкості прогини ротора, напруги в ньому і навантаження на опори різко зростають і можуть викликати руйнацію ротора або опор [1].

Більш ефективним засобом усунення вібрацій є зрівноважування роторів, виконуване при їхньому виготовленні та монтажі. Якщо при цьому врахована гнучкість ротора і незрівноваженість усунута для усіх форм, що визначають коливання ротора на відповідних критичних швидкостях, то агрегат спокійно працює на усіх швидкостях за умови, що його незрівноваженість не змінюється в процесі роботи.

Проте внаслідок зсуву і зносу елементів ротора, його нагрівання, а також інших причин початкова незрівноваженість ротора може порушитися в процесі експлуатації. Крім того, у



деяких машинах, таких як центрифуги, металоріжучі верстати та інші, зміна початкової незрівноваженості викликається самим робочим процесом машини. Цим визначається постановка задачі про автоматичне зрівноважування роторів на ходу у процесі експлуатації машини на додаток до початкового зрівноважування, виконаного при виготовленні та монтажі [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Історія автоматичного балансування починається з 1872 року, коли німецький інженер Альберт Феска запропонував зрівноважити вал центрифуги трьома вільно насадженими на нього кільцями. Прототипом рідинних і кулькових АБП можна вважати пристрій, запропонований німецьким інженером Емілем Розе, на який він 01.12.1885 одержав патент США № 331450. Рідинні автобалансиючі пристрої вперше були запропоновані і описані Лебланом, Дункан і Сирлем. Вони мають вигляд порожнистої камери з рідкими робочими тілами.

Рідинні АБП є стандартною функцією у більшості побутових пральних машин, але також використовуються у важких промислових обертових машинах. До прикладу, для пральних машин використовуються рідинні стабілізатори, які складаються з порожнистого кільця, зазвичай, з прямокутним перерізом, що містить невелику кількість рідини. Кільце, як правило, кріпиться над барабаном [3, 4]. Рідина у кільці вільно переміщується і прагне поєднати головну центральну вісь інерції ротора з його віссю обертання.

Огляд літератури з конструкцій пасивних автобалансирів показує, що описані типи пасивних автобалансирів виникли першими і найбільш розповсюджені, мають відносну конструктивну простоту, є пасивними регуляторами прямої дії, що не потребують підведення енергії і системи керування для переміщення коригувальних мас [5].

Найчастіше для пояснення роботи корегуючих мас використовують властивість пружного або пружноопертого ротора обертатись на закритичних швидкостях «легким боком назовні» [6, 7]. У існуючих наукових працях, присвячених аналізу роботи рідинних АБП, рівняння руху механічної системи складалось без врахування гідродинамічних властивостей рідини. В основу теоретичних досліджень було покладено принцип Даламбера для твердих тіл.

Таким чином, розробка математичних моделей поведінки робочих тіл в АБП, розробка методик і засобів дослідження роботи АБП є актуальними науково-технічними

задачами.

Аналіз сучасного стану теорії і практики рідинного автоматичного балансування дозволяє виявити такі основні положення:

– при теоретичних дослідженнях руху рідких робочих тіл в автобалансирі не враховуються специфічні властивості рідини;

– з точки зору динаміки при вивченні стійкості руху рідинних автобалансирів авторів, головним чином, цікавить поведінка оболонки, а характер течії рідини у порожнині для них має другорядне значення. Однак обидва рухи взаємодіють один з одним, тому рівняння руху повинні враховувати наявність і оболонки, і рідини;

– для системи ротор-рідинний АБП переважно розглядалась плоска модель і при цьому, як правило, не враховувались сили ваги при визначенні ефективності зрівноваження вертикального ротора ;

– теорія автоматичного балансування обмежує роботу автобалансиючого пристрою тільки закритичною зоною обертання ротора, хоча практичний досвід [8] свідчить, що АБП можуть знижувати вібрації не тільки на зарезонансних частотах обертання, але і на дорезонансних і резонансних частотах.

Це протиріччя поставило вимогу проаналізувати роботу АБП з рідиною.

Для побудови математичної моделі поведінки рідини в АБП скористаємось такими властивостями рідин:

– будь-який об'єм рідини здатний довільно змінювати свою форму під дією будь-яких малих сил;

– сили в'язкості враховуються тільки при розгляді досить швидких рухів, коли зрушення в рідині змінюються з досить великою швидкістю.

Формулювання мети досліджень.

Розглянемо найпростіший випадок стаціонарного руху жорсткого ротора в жорстких опорах (тобто, коли відсутня різниця фаз між напрямком сили від дисбалансу і прогином ротора або переміщенням ротора) з циліндричною камерою, частково заповненою рідиною.

Побудуємо і проаналізуємо математичні моделі стаціонарного руху. Розглянемо випадки обмеженої зверху камери, ексцентрично і симетрично розташованої на валу. У кожному із випадків на основі інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги рідини установимо закони розподілу тиску в рідині та визначимо форму поверхонь рівного тиску. Розглянуті випадки моделюють поведінку рідини в автобалансирі без врахування зовнішнього демпфірування.

Виклад основного матеріалу дослідження. Теоретичне дослідження форми вільної поверхні рідини, що



обертається у замкнутій циліндричній порожнині без ексцентриситету.

Розглянемо жорсткий ротор на двох жорстких опорах з циліндричною камерою. Рідина об'ємом V міститься у замкнутій зверху циліндричній порожнині радіуса R і висотою h , яка закріплена на вертикальній осі обертання без ексцентриситету (симетрично відносно осі циліндра). Розглянемо поведінку рідини в замкненій камері, що обертається зі сталою швидкістю ω . Поки рідина не підніметься до кришки будуть виконуватись умови задачі відкритої порожнини [9]. З ростом кутової швидкості рідина біля бокових стінок порожнини почне вpirатися в кришку, створюючи гідростатичний тиск на кришку порожнини.

На рис. 1 а) показана замкнута зверху порожнина, що обертається навколо вертикальної осі та містить рідину з вільною поверхнею.

Побудуємо осі координат x, y, z з початком у точці O , розташованій в геометричному центрі дна порожнини. Вважаємо, що рідина має об'єм V менший за об'єм порожнини.

У кожній точці рідини рух відбувається по колах, центр яких лежить на осі Oz . Колова швидкість частинки рідини спрямована по дотичній до відповідного кола і по величині дорівнює $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

З числа масових сил на кожен частинку при обертанні буде діяти сила ваги mg і відцентрова сила інерції $m\omega^2 \vec{r}$, причому рівнодіюча цих сил повинна бути нормальною до поверхні рідини. Позначимо через X, Y, Z проекції всіх масових сил.

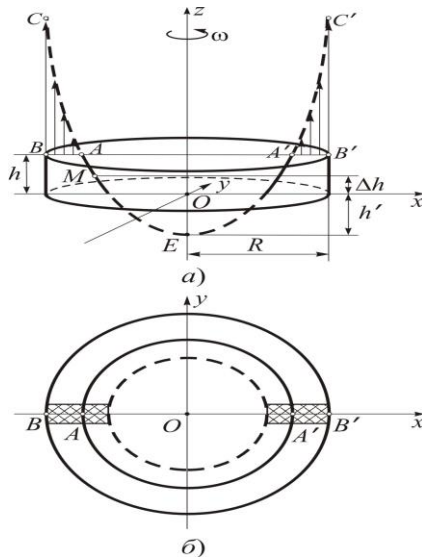


Рис. 1 Визначення поверхонь рівного тиску в рідині, що обертається у замкнутій циліндричній порожнині:
а) загальний вигляд, б) горизонтальний переріз.

Проекції відцентрової сили, віднесені до одиниці маси, на осі x, y, z відповідно дорівнюють: $F_x = \omega^2 r \cos(r, x); F_y = \omega^2 r \cos(r, y); F_z = 0$.

Оскільки косинус кута між напрямком радіуса обертання і віссю $x: \cos(r, x) = x/r$, а для осі y – відповідно $\cos(r, y) = y/r$, тому

$$\begin{cases} F_x = \frac{\omega^2 r x}{r} = \omega^2 x, \\ F_y = \frac{\omega^2 r y}{r} = \omega^2 y, \\ F_z = 0. \end{cases}$$

Проекції сили ваги на осі x, y рівні 0. Проекція сили ваги на вісь z , віднесена до одиниці маси, дорівнює $Z = -g$, тому що вісь z має напрямок, протилежний напрямку сили ваги.

Отже, проекції всіх масових сил, віднесених до одиниці маси, будуть подані такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} X = \omega^2 x, \\ Y = \omega^2 y, \\ Z = -g. \end{cases}$$

Підставивши отримані дані в рівняння Ейлера стаціонарного руху ідеальної рідини [10]

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0,$$

будемо мати

$$\left. \begin{cases} \omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \right\} \quad (1)$$

У нестисливій рідині питома маса рідини ρ є деяка стала величина, що є фізичною константою даного виду рідини [10]. Вважаємо її відомою.

При почленному множенні рівнянь системи (1) на dx, dy, dz і додаванні одержимо для dp вираз:

$$dp = \omega^2 \rho (x dx + y dy) - \rho g dz$$

або

$$dp = d \left[\frac{1}{2} \omega^2 \rho (x^2 + y^2) - \rho g z \right]$$

і після інтегрування:



$$p = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (x^2 + y^2) - g\rho z - C_0. \quad (2)$$

Одержане рівняння (2) є рівнянням сім'ї параболоїдів обертання, зміщених вздовж вертикальної осі z , перетин яких вертикальною площиною дає параболу, а горизонтальною площиною – кола.

Таким чином, при відносному русі рідини під впливом відцентрової сили і сили ваги вільна поверхня рідини, а також усі поверхні рівного тиску набувають форми поверхні параболоїда обертання. Формула (2) дає змогу визначити тиск у довільній точці рідини, на яку діють масові сили: сила ваги mg і відцентрова сила інерції $m\omega^2 \vec{r}$, що мають потенціал. Поверхня, вздовж якої потенціальна функція зберігає постійне значення, називається еквіпотенціальною поверхнею. До числа еквіпотенціальних поверхонь у гідравліці належать поверхні рівного тиску. Поверхні рівного тиску не можуть перетинатися, тому що це означатиме, що в одній точці простору діють два різні тиски.

Для розв'язку задачі повинні виконуватися граничні умови для гідродинамічного тиску на вільній поверхні рідини $p=p_0=const$. Підставивши граничну умову у вираз (2), одержуємо наступне рівняння вільної поверхні при стаціонарному русі

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - g\rho z - p_0 = C_0. \quad (3)$$

$$V_{оберт} = \iiint_{\tau} d\tau = \iiint_{\tau} dx dy dz = \iint_{\tau_{xy}} dx dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \iint_{\tau_{xy}} (z_2 - z_1) dx dy \quad (4)$$

де область τ обмежена поверхнями z_1, z_2 ; τ_{xy} – проекція τ на площину xOy .

$$\text{Уведемо позначення: } \beta = \frac{\omega^2}{2g};$$

$C = \frac{C_0 + p_0}{\rho}$. Тоді (4) запишеться у вигляді:

$$z = \beta(x^2 + y^2) - C. \quad (5)$$

Просторова область, яка зайнята рідиною, має форму, показану на рис. 1. Об'єм цієї області знаходимо як різницю об'ємів циліндра і частини параболоїда обертання (5), розміщеної між площинами $z=0$ і $z=h$.

Об'єм частини параболоїда знаходимо як різницю об'ємів просторових областей D_1 і D_2 , утворених параболоїдом обертання (5) і відповідними площинами $z=h$ і $z=0$. При цьому проекціями відповідних областей на площину xOy будуть кола D_{1xy} : $x^2 + y^2 \leq \frac{h+C}{\beta}$ і D_{2xy} :

При цьому без врахування тертя рідини об кришку тиск на площині xOy (рис. 1) буде визначатися висотою стовпа рідини. Тиск на площину $z = h$ (на кришку порожнини) також буде визначатися висотою стовпа рідини, однак, вказана висота стовпа рідини Δh , яка визначає гідростатичний тиск на кришку порожнини, є умовною. Таким чином, у точці B , де $r = R$, підняття Δh буде максимальним і дорівнюватиме $\Delta h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$, що визначить величину гідростатичного тиску на кришку порожнини в точці B залежністю:

$$P_B = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Загальний характер розподілу тиску на кришку порожнини зображується на рис. 1 а) кривими AC і $A'C'$.

Дослідимо форму вільної поверхні рідини в циліндричній порожнині в залежності від заповнення порожнини. Оскільки величина сталої C_0 у правій частині (3) визначається кількістю рідини у порожнині, то визначимо значення константи C_0 . Для цього використаємо умову збереження об'єму залитої рідини в стані спокою (при $\omega=0$) і при обертанні.

Обчислимо об'єм рідини при обертанні за допомогою потрібного інтеграла. Об'єм просторової області τ , зайнятої рідиною, будемо знаходити за формулою:

$$x^2 + y^2 \leq \frac{C}{\beta}; \quad (\text{рівняння кіл } x^2 + y^2 = \frac{h+C}{\beta} \text{ і}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{C}{\beta} \text{ отримані шляхом виключення } z \text{ з}$$

рівнянь параболоїда (5) і відповідних площин).

Щоб спростити обчислення подвійних інтегралів перейдемо до полярних координат. При цьому змінні x і y замінюються за формулами $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$, добуток $dx dy$ замінюється добутком

$$r d\varphi \cdot dr \quad (6)$$

і подвійний інтеграл перетвориться до простого виду.

Область D_1 обмежена поверхнями:

$$z_1 = \beta(x^2 + y^2) - C \text{ і } z_2 = h.$$

Після чого $z_2 - z_1 = h + C - \beta(x^2 + y^2)$.



Перейшовши до полярної системи координат за формулами (6), маємо:

$$z_2 - z_1 = h + C - \beta(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) = h + C - \beta r^2.$$

$$D_{1xy}: 0 \leq \varphi \leq 2\pi; r \leq \sqrt{\frac{h+C}{\beta}}, \text{ тоді}$$

$$\begin{aligned} V_{D_1} &= \iiint_{D_1} d\tau = \iiint_{D_1} dx dy dz = \iint_{D_{1xy}} (z_2 - z_1) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{h+C}{\beta}}} (h + C - \beta r^2) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left((h+C) \frac{r^2}{2} - \beta \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{\frac{h+C}{\beta}}} d\varphi = \left(\frac{(h+C)^2}{2\beta} - \frac{(h+C)^2}{4\beta} \right) 2\pi = \frac{(h+C)^2}{2\beta} \pi. \end{aligned}$$

Область D_2 обмежена поверхнями: $z_1 = \beta(x^2 + y^2) - C$ і $z_2 = 0$. Тоді $z_2 - z_1 = C - \beta(x^2 + y^2)$.

Перейшовши до полярної системи координат за формулами (6), маємо:

$$z_2 - z_1 = C - \beta(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) = C - \beta r^2.$$

$$D_{2xy}: 0 \leq \varphi \leq 2\pi; r \leq \sqrt{\frac{C}{\beta}}, \text{ тоді}$$

$$V_{D_2} = \iiint_{D_2} d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{C}{\beta}}} (C - \beta r^2) r dr = \int_0^{2\pi} \left(C \frac{r^2}{2} - \beta \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{\frac{C}{\beta}}} d\varphi = \left(\frac{C^2}{2\beta} - \frac{C^2}{4\beta} \right) 2\pi = \frac{C^2}{2\beta} \pi.$$

Об'єм частини параболоїда обертання (5), розміщеної між площинами $z=0$ і $z=h$ V_D буде

$$V_D = V_{D_1} - V_{D_2} = \frac{(h+C)^2}{2\beta} \pi - \frac{C^2}{2\beta} \pi = \frac{h(h+2C)}{2\beta} \pi.$$

Об'єм рідини при обертанні знайдемо як різницю об'ємів циліндра і V_D

$$V_{\text{оберт}} = \pi R^2 h - \frac{h(h+2C)}{2\beta} \pi = \frac{h\pi}{2\beta} (2\beta R^2 - h - 2C)$$

За умовою задачі об'єм рідини у спокої дорівнює V . Тоді, виходячи з рівності заданого і знайденого $V_{\text{оберт}}$ об'ємів, одержимо рівняння щодо змінної C .

$$\frac{h\pi}{2\beta} (2\beta R^2 - h - 2C) = V,$$

з якого

$$C = \beta R^2 - \frac{\beta V}{\pi h} - \frac{h}{2}. \quad (7)$$

Отже, вільна поверхня важкої рідини, що обертається навколо вертикальної осі Oz описується рівнянням:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) - \left(\frac{\omega^2}{2g} R^2 - \frac{\omega^2 V}{2\pi g h} - \frac{h}{2} \right). \quad (8)$$

Вільна поверхня має форму параболоїда обертання з параметром $\frac{2g}{\omega^2}$, що залежить від кутової швидкості обертання рідини; з ростом

кутової швидкості обертання параметр убиває і параболоїд мало чим відрізняється від поверхні кругового циліндра: $r^2 = x^2 + y^2 = b^2$ і в границі, при $\frac{2g}{\omega^2} \rightarrow 0$, збігається з останньою.

При зміні швидкості обертання змінюється форма вільної поверхні рідини. При чому зміна форми параболоїда обертання відбувається рівномірно (як за законом сполучних посудин). Розглянувши горизонтальний переріз (рис. 1 б), можна зробити висновок, що рідина встановлюється концентричними колами з центрами на осі обертання. Таке положення рідини не суперечить закону Паскаля, оскільки тиск буде однаковим по всьому об'єму, зайнятому рідиною, тобто у всіх точках шару притисненого до стінки порожнини, тиск буде однаковим, а в точках шару вільної поверхні рідини тиск також буде однаковим і рівним p_0 .

Теоретичне дослідження форми вільної поверхні рідини, що обертається у замкнутій циліндричній порожнині з ексцентриситетом.

Розглянемо жорсткий ротор на двох жорстких опорах з циліндричною камерою. Нехай циліндрична порожнина радіуса R і висотою h , закріплена на вертикальній осі обертання з ексцентриситетом e , або e – e відхилення центра мас порожнини від осі обертання. Розглянемо поведінку рідини в



замкненій камері, що обертається з сталою швидкістю ω . Застосуємо математичний апарат, що використовувався у попередній задачі.

На рис. 2 а) показана замкнута зверху порожнина, що обертається навколо ексцентрично зміщеної вертикальної осі і містить рідину з вільною поверхнею. Побудуємо осі координат x, y, z з початком у точці O , розташованій в геометричному центрі дна порожнини. Вважаємо, що рідина має об'єм V менший за об'єм порожнини. У кожній точці рідини рух відбувається по колах з центром на осі O_1z_1 .

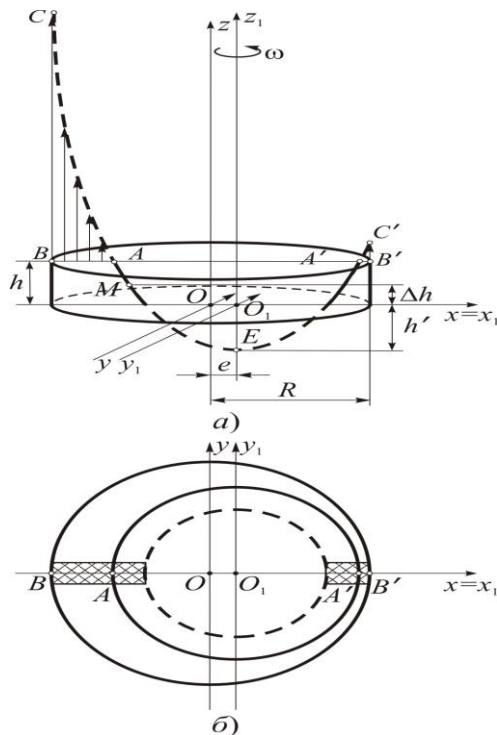


Рис. 2. Визначення поверхонь рівного тиску в рідині, що обертається у замкнутій циліндричній порожнині з ексцентриситетом e :

а) загальний вигляд, б) горизонтальний переріз.

Позначимо через X, Y, Z проекції масових сил: сили ваги mg і відцентрової сили інерції $m\omega^2 \vec{r}$.

Проекції відцентрової сили, віднесені до одиниці маси, на осі x, y, z відповідно дорівнюють:

$$\begin{cases} F_x = \frac{\omega^2 r(x-e)}{r} = \omega^2(x-e), \\ F_y = \frac{\omega^2 ry}{r} = \omega^2 y, \\ F_z = 0. \end{cases}$$

Проекції сили ваги на осі x, y рівні 0. Проекція сили ваги на вісь z , віднесена до одиниці маси, дорівнює $Z=-g$.

Отже, проекції всіх масових сил, віднесених до одиниці маси, будуть подані такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} X = \omega^2(x-e), \\ Y = \omega^2 y, \\ Z = -g. \end{cases}$$

Підставивши отримані дані в рівняння Ейлера стаціонарного руху ідеальної рідини будемо мати:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2(x-e) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \omega^2 y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При почленному множенні рівнянь системи (9) на dx, dy, dz і додаванні одержимо для dp вираз:

$$dp = d \left[\frac{1}{2} \omega^2 \rho ((x-e)^2 + y^2) - g \rho z \right]$$

і після інтегрування:

$$p = \frac{1}{2} \omega^2 \rho ((x-e)^2 + y^2) - g \rho z - C_0. \quad (10)$$

Одержане рівняння (10) є рівнянням сім'ї параболоїдів обертання, зміщених вздовж вертикальної осі z_1 , перетин яких вертикальною площиною дає параболу, горизонтальний – кола з центром на осі Oz_1 .

Таким чином, при відносному русі рідини під впливом відцентрової сили і сили ваги вільна поверхня рідини, а також усі поверхні рівного тиску набувають форми поверхні параболоїда обертання. Формула (10) дає змогу визначити тиск у довільній точці рідини, на яку діють масові сили: сила ваги mg і відцентрова сила інерції $m\omega^2 \vec{r}$, що мають потенціал. Поверхні рівного тиску не можуть перетинатися, тому що це означатиме, що в одній точці простору діють два різні тиски.

Для розв'язку задачі повинні виконуватися граничні умови для гідродинамічного тиску на вільній поверхні рідини $p=p_0=const$. Підставивши граничну умову у вираз (10), одержуємо наступне рівняння вільної поверхні при стаціонарному русі:

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 ((x-e)^2 + y^2) - g \rho z - p_0 = C_0. \quad (11)$$



При цьому тиск на площині xOy буде визначатися висотою стовпа рідини, що визначається залежністю (10). Тиск на площині $z = h$ (по кришці порожнини) також буде визначатися висотою стовпа рідини, що визначається залежністю (10). Однак, вказана висота стовпа рідини Δh , яка визначає гідростатичний тиск на кришку порожнини, є умовною. Таким чином, в точці B , де $r = R$, підняття Δh буде максимальним і дорівнюватиме $\Delta h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$, що визначить величину гідростатичного тиску на кришку порожнини в точці B залежністю $p_B = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{2g}$.

Загальний характер розподілу тиску на кришку порожнини зображується на рис. 2 а) кривими AC і $A'C'$.

Розглянувши горизонтальний переріз (рис. 2 б), можна зробити висновок, що рідина встановлюється концентричними колами з центрами на осі обертання. Маса рідини сконцентрована з боку дисбалансу.

Моделювання у середовищі MatLab зміни вільної поверхні рідини у циліндричних камерах пристроїв

автоматичного балансування під час обертання жорсткого ротора.

Щоб наочно побачити, як відбувається зміна поверхні рідини у залежності від геометричних параметрів камери, величини ексцентриситету і швидкості обертання ротора, побудуємо 3D-моделі розподілу рідини у камерах АБП. У матеріалах сучасних публікацій більшість авторів використовують нові технології комп'ютерного моделювання для аналізу динаміки АБП. Серед них слід відмітити роботи К. Гріна і А. Р. Чампнейса [11], в яких досліджуються усталені режими, граничні цикли і хаотичний рух. Найпоширенішим є програмне забезпечення: SolidWorks, Компас 3D, FluidFlow, MatLab тощо.

Для експериментального дослідження у середовищі MatLab побудовано такі моделі розподілу рідини у камері АБП: із відкритою циліндричною порожниною; відкритою циліндричною порожниною з ексцентриситетом; закритою циліндричною порожниною; закритою циліндричною порожниною із ексцентриситетом; закритою двоциліндричною порожниною.

Проміжні результати побудови 3D-моделей у середовищі MatLab містяться на рисунку 3.

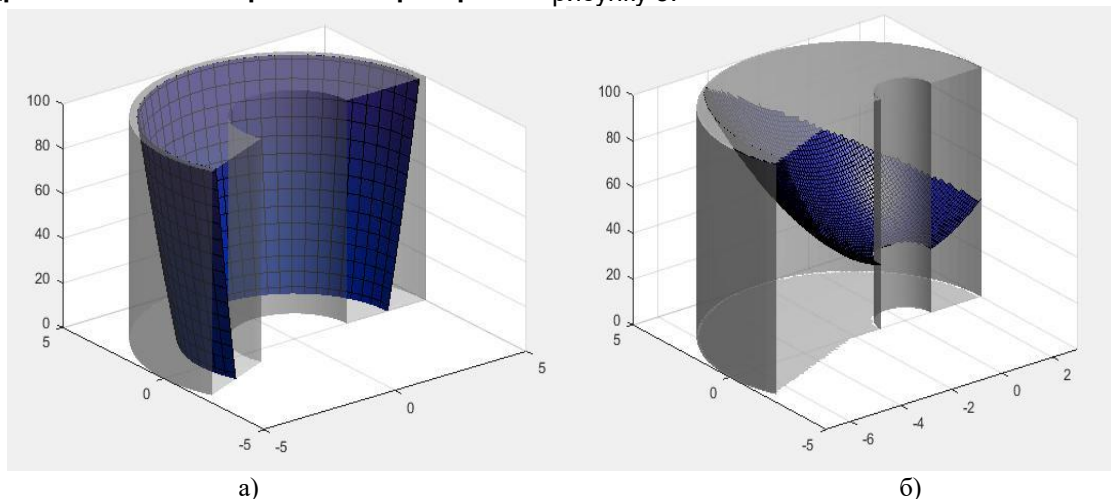


Рис. 3. Розподіл вільної поверхні рідини у випадках:

а) циліндричній закритій камері без ексцентриситету, б) циліндричній закритій камері з ексцентриситетом.

Одержані моделі наочно демонструють процес розподілу рідини у циліндричних камерах АБП. Дані моделі наочно підтверджують висновок, який зроблено вище – вільна поверхня рідини є параболоїдом обертання з віссю симетрії, що збігається з віссю обертання циліндричної камери. При ексцентричному розміщенні камери на роторі найбільша маса рідини концентрується зі сторони ексцентриситету (рис. 3 б)).

Результати експериментальних досліджень поведінки рідини в циліндричній

камері, встановленій на жорсткому роторі у жорстких опорах, одержані методом динамічної фотозйомки.

Для проведення експериментальних досліджень поведінки рідини в циліндричній камері, встановленій на жорсткому роторі у жорстких опорах, запропоновано метод динамічної фотозйомки руху робочих тіл за допомогою сучасної комп'ютерної та фототехніки.

Дослідження проводились на установці, вертикальний вал якої є жорстким і підшипники



якого жорстко закріплені з основою. Визначено поведінку рідини в циліндричній порожнині з параметрами: радіус 100 мм, висота 25 мм, встановлений з ексцентриситетом на кільцеподібному торці ротора.

Динамічну фотозйомку поведінки робочої рідини в циліндричній закритій зверху камері проводилося на спеціально розробленому стенді, що містить таку апаратуру:

- цифрова фотокамера OLYMPUS C-55 ZOOM Panasonic 9000;
- персональний комп'ютер.

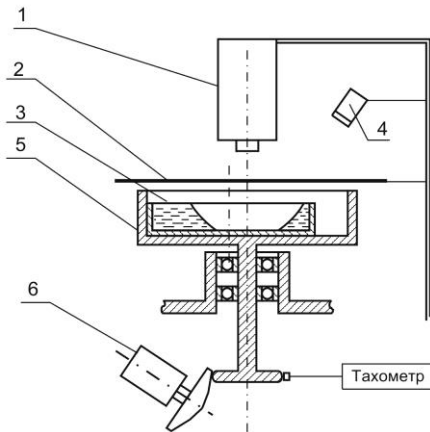


Рис. 4. Блок-схема підключення апаратури:

- 1 – цифрова фотокамера OLYMPUS C-55 ZOOM;
- 2 – прозора пластина з нанесеною координатною сіткою;
- 3 – циліндрична камера закрита зверху з оптично прозорого матеріалу (акріла прозорого), що кріпиться на вертикальному валу установки;
- 4 – освітлювальна лампа;
- 5 – вал;
- 6 – двигун.

Динамічну фотозйомку поведінки рідини здійснювали на швидкостях обертання в діапазоні від 0 до 21 рад/с (200 об/хв).

На рис. 6 зображені приклади кадрів розташування рідини масою 50 г в камері АБП, що відповідають кутовій швидкості обертання

7 рад/с (65 об/хв) (рис. 5 а)) і 16 рад/с (150 об/хв) (рис. 5 б)). На рисунках показано точку O – геометричний центр порожнини, точку O' – проекцією осі обертання системи, $O'O = e$ – ексцентриситет.

Стінки циліндричної камери, яка обертається, приводять в обертальний рух найближчі до стінок шари рідини, а потім, унаслідок в'язкості рідини – і всю її масу. Рідина поступово здобуває ту саму кутову швидкість, що і циліндрична камера, а вільна поверхня її видозмінюється: біля точки O' рівень рідини знижується, біля стінок – підвищується й уся вільна поверхня рідини стає деякою криволінійною поверхнею обертання.

З представлених фотокадрів (рис. 5) видно, що рідина розташовується навколо осі обертання, про що свідчать: світла пляма з центром в точці O' , контур якої (коло меншого діаметра з центром у точці O') на рисунку зображений штриховою лінією і відображає вільну поверхню рідини на дні камери, а також темні тони підфарбованої рідини біля бокових стінок циліндричної камери. Вільна поверхня рідини на кришці камери зображена білою штриховою лінією і є частиною кола більшого діаметра з центром у точці O' . Можна припустити, що вільна поверхня рідини є частиною параболоїда обертання, обмеженою дном і кришкою камери, вісь якого співпадає з віссю обертання системи. Порівнюючи рисунки 5 а) і 5 б)), які відображають положення рідини при кутових швидкостях обертання (5 а) – при 7 рад/с; 5 б) – при 16 рад/с, можна зробити висновок, що із збільшенням швидкості вільна поверхня рідини видовжується вздовж осі обертання. Про це свідчить збільшення радіуса кола, яке відображає вільну поверхню рідини на дні камери, і зменшення радіуса кола, що відображає вільну поверхню рідини на кришці, при збільшенні швидкості обертання.

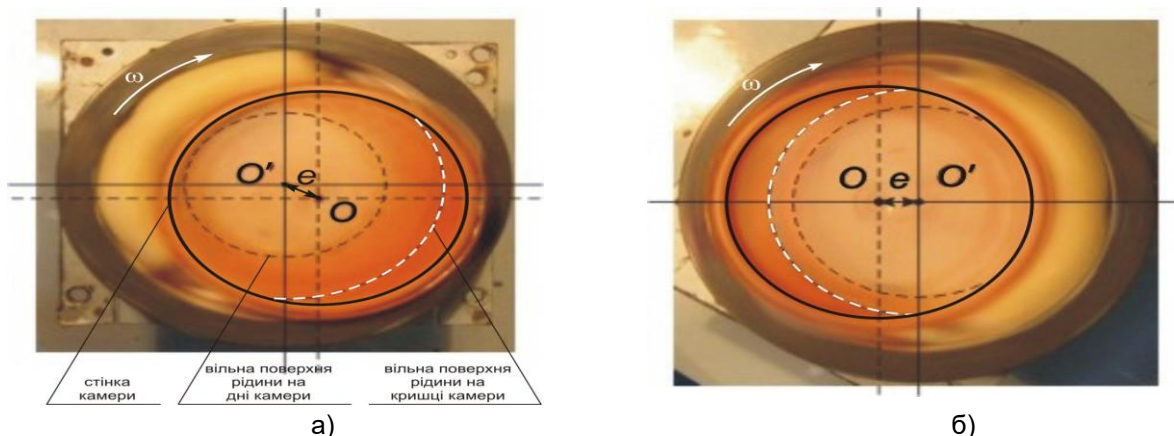


Рис. 5. Розташування рідини в циліндричній камері закритій зверху, встановленій на жорсткому роторі у жорстких опорах:

- а) – при кутовій швидкості обертання 7 рад/с, б) – при кутовій швидкості обертання 16 рад/с.



Як видно з представлених кадрів (рис. 5), найбільша товщина шару рідини розташована зі сторони ексцентриситету, про що говорять більш темні тони підфарбованої рідини зі сторони зміщення геометричного центра камери від осі обертання системи, і більш світлі тони з боку, протилежного ексцентриситету. Комп'ютерна обробка отриманих знімків показала, що рідина на всьому досліджуваному діапазоні частот обертання ротора обертається навколо осі обертання системи, встановлюється зі сторони ексцентриситету (у найвіддаленішому від осі обертання місці), не бере участі у зрівноважуванні системи і створює додатковий дисбаланс.

Отже, при відсутності прогину, при русі вертикального ротора, рідинне автоматичне балансування є неможливим. Рідина збільшує дисбаланс, а не усуває його. Даний висновок підтверджує результати теоретичних досліджень, наведених вище.

Висновки. Характерною особливістю руху жорстких роторів у жорстких опорах є відсутність, як правило, прямої прецесії. Саме випадок наявності такого руху розглянуто у статті. Головним чином нас цікавить рух системи ротор – рідинний АБП як обертальний рух твердого тіла з порожниною, частково заповненою рідиною. Обмеження ідеальним випадком твердого тіла і рідини дозволяє вивчати поведінку системи за допомогою простих математичних засобів.

Стаття містить математичні моделі стаціонарного руху в жорстких опорах жорсткого ротора з циліндричною камерою, частково заповненою рідиною. Розглянуті випадки: обмеженої зверху камери, ексцентрично і симетрично розташованої на валу – моделюють поведінку рідини в автобалансири без врахування зовнішнього демпфування. У кожному з випадків на основі інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги рідини установлені закони розподілу тиску в рідині і визначені форми поверхонь рівного тиску. Встановлено, що рідина розташовується симетрично відносно осі обертання системи. При цьому основна її маса концентрується з боку ексцентриситету (при ексцентричному розташуванні камери). Одержанні результати проаналізовано за допомогою 3-D моделювання у середовищі MatLab при зміні параметрів системи: геометричних параметрів камери, величини ексцентриситету і швидкості обертання. Аналіз побудованих моделей вказує на те, що автоматично збалансувати жорсткий ротор у жорстких опорах рідиною неможливо. Цей висновок підтверджують результати

експериментальних досліджень, одержані методом динамічної фотозйомки, яка реалізується на сучасній комп'ютерній та відеотехніці.

Список використаних джерел

1. Genta G. Dynamics of Rotating Systems / G. Genta – Springer, 2005. – 658 p.
2. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: автореф. дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: спец. 05.02.18 `Теория механизмов и машин` / Владимир Петрович Нестеренко; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1990. – 34 с.
3. Majewski T. Fluid balancer for a washing machine / T. Majewski // In Proceedings of the XVI International Congress 22-24 September, 2010 – Monterrey, Nuevo Leon, Mexico, 2010. – Pages 1-10. SOMIM (Society of Mechanical Engineers of Mexico).
4. Urbiola-Soto, L. Dynamic performance of the Leblanc balancer for automatic washing machines / L. Urbiola-Soto, M. Lopez-Parra // J. Vibr. Acoust. – 2011. Vol. – 133. doi: 10.1115/1.4003597.
5. Никифоров А.Н. Состояние проблемы уравнивания роторов / А.Н. Никифоров // Вестник научно-технического развития. – 2013. – №4 (68). – С. 20-28.
6. Marlon Wesley Machado Cunico Characterization and Modelling of LeBlanc Hydrodynamic Stabilizer: A Novel Approach for Steady and Transient State Models / M. W. M. Cunico // Modelling and Simulation in Engineering. – 2015. – Vol. – 2015, Article ID 729582, 11 pages.
7. Pashkov E. Efficiency of Balancing by Liquid-Type Automatic Balancing Devices / E.N. Pashkov, N.V. Martyushev, A.V. Ponomarev // Advanced Materials Research : Scientific Journal. – 2014. – Vol. 1040 : High Technology: Research and Applications 2014 (HTRA 2014). – P. 858-863.
8. Improving theory for automatic balancing of rotating rotors with liquid self balancers / V. Royzman, I. Drach // Mechanika. – 2005. – № 4 (54). – P. 38-44. ISSN 1392 - 1207. MECHANIKA. 2005. Nr.4(54)
9. Альтшуль А.Д. Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости): уч. пособие для вузов / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисельов – М.: Стройиздат, 1975. – С. 24-25.
10. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 1. – 584 с.



11. Green K. Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors / K. Green, A. R. Champneys, N. J. Lieven // *Journal of Sound and Vibration* – 2006 – Vol. 291(3-5). P. 861-881.

Список джерел у транслітерації

1. Genta, G. (2005). *Dynamics of Rotating Systems*.– Springer.– 658 p.
2. Nesterenko, V.P. (1990). *Teoriya y praktyka ustroystv avtomaticheskoi balansirovki rotorov* [Theory and practice of devices for automatic balancing of rotors]. *Doctor's thesis*. – Novosybyrsk. NTU [in Russia].
3. Majewski, T. (2010). Fluid balancer for a washing machine. – *In Proceedings of the XVI International Congress SOMIM 22 24 September – Monterrey, Nuevo Leon, Mexico*, Pages 1-10.
4. Urbiola-Soto, L. (2011). Dynamic performance of the Leblanc balancer for automatic washing machines. – *J. Vibr. Acoust.* – Vol. – 133. doi: 10.1115/1.4003597.
5. Nykyforov, A.N. (2013). *Sostoianye problemy uravnoveshivaniya rotorov* [Status of balancing rotors problems]. – *Vestnyk nauchno-tekhnicheskoho razvytyia*. – №4 (68). – P. 20-28 [in Russia].
6. Marlon Wesley Machado Cunico. (2015). Characterization and Modelling of LeBlanc Hydrodynamic Stabilizer: A Novel Approach for Steady and Transient State Models. – *Modelling and Simulation in Engineering*. Article ID 729582, 11 pages.
7. Pashkov, E.N., Martyushev, N.V., Ponomarev, A.V. (2014). Efficiency of Balancing by Liquid-Type Automatic Balancing Devices. – *Advanced Materials Research: Scientific Journal*. – Vol. 1040: *High Technology: Research and Applications 2014 (HTRA 2014)*. – P. 858-863.
8. Royzman, V., Drach I. (2005). Improving theory for automatic balancing of rotating rotors with liquid self balancers. – *Mechanika*. – № 4 (54). – P. 38-44.
9. Altshul, A.D., Kyselov, P.H. (1975). *Hydravlika y aerodynamika (Osnovy mekhanyky zhydkosty)* [Hydraulics and aerodynamics (Fundamentals of fluid mechanics)]. – *Moskov.: Stroiyzdat*. – P. 24-25 [in Russia].
10. Kochyn, N.E., Kybel, Y.A., Roze, N.V. (1963). *Teoreticheskaia hydromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. – *Moskov.: Fyzmatyuz.* – Ch. 1. – 584 P. [in Russia].
11. Green, K., Champneys, A. R., Lieven, N. J. (2006). Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors – *Journal of Sound and Vibration* – Vol. 291(3-5). P. 861-881.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ АВТОБАЛАНСИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

У статье рассматривается случай стационарного движения жесткого ротора в жестких опорах (когда отсутствует разность фаз между направлением силы от дисбаланса и прогибом ротора или перемещением ротора) с цилиндрической камерой, частично заполненной жидкостью. Построены и проанализированы математические модели ограниченной сверху камеры, эксцентрично и симметрично расположенной на валу. В каждом из случаев на основе интегрирования дифференциальных уравнений равновесия жидкости установлены законы распределения давления в жидкости и определена форма поверхностей равного давления. Рассмотренные случаи моделируют поведение жидкости в автобалансирующей без учета внешнего демпфирования. Анализ построенных моделей указывает на то, что автоматически сбалансировать жесткий ротор в жестких опорах жидкостью невозможно. Для экспериментального исследования процесса автоматической балансировки и последующего анализа теоретических и практических результатов использовался метод динамической фотосъемки поведения рабочих тел.

Ключевые слова: ротор, неуравновешенность ротора, жесткий ротор, эксцентриситет, автоматическая балансировка, жидкостное автобалансирующее устройство (АБУ).

THE SHAPE DETERMINATION OF THE FREE SURFACE OF A FLUID ROTATING IN A CLOSED CYLINDRICAL CAVITY OF THE CHAMBER OF THE AUTO-BALANCING DEVICE

The article deals with the case of stationary motion of a rigid rotor in rigid supports with a cylindrical chamber partially filled with liquid in the absence of a phase difference between the direction of force from the imbalance and the deflection of the rotor or the displacement of the rotor. The mathematical models of the upper bound of the chamber, eccentrically and symmetrically located on the shaft, are constructed and analyzed. In each case, on the basis of the integration of differential equations of equilibrium of a fluid, the laws of the distribution of pressure in a liquid are established and the shape of surfaces of equal pressure is determined. The cases studied model the behavior of the fluid in the auto-



balancer without taking into account the external damping. The analysis of the constructed models indicates that it is impossible to automatically balance the hard rotor in the rigid supports with the liquid. For the experimental study of the process of automatic balancing and the subsequent analysis of theoretical and practical results, the method of

dynamic photo-shooting of the behavior of working bodies was used.

Keywords: rotor, unbalanced rotor, hard rotor, eccentricity, automatic balancing (self-balancing), auto-balancing units, fluid self-balancing device (SBD).

Відомості про автора

Драч Ілона Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Хмельницького національного університету (вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, Україна, 280016, e-mail: cogitare410@gmail.com).

Драч Ілона Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры инженерии программного обеспечения Хмельницкого национального университета (ул. Институтская, 11, г. Хмельницкий, Украина, 280016, e-mail: cogitare410@gmail.com).

Drach Iona – PhD, Associate Professor of the Software Engineering Department of the Khmelnytskyi National University (Institutska 11, Khmelnytsky, 280016, Ukraine, e-mail: cogitare410@gmail.com).