Водка А. А.
к.т.н., доцент

Суханова О. И.
магистрант

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Vodka O.

Sukhanova O.

National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»

УДК 534.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ДОМРЫ НА ОСНОВЕ ПОДРОБНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Статья посвящена исследованию собственных колебаний домры. В данной работе важное значение имели методы математического моделирования динамических процессов, основным методом которых являлся метод конечных элементов (МКЭ). Представленное исследование проводилось с помощью системы конечно-элементного моделирования. В работе для моделирования музыкального инструмента использовалась система геометрического моделирования. В исследовании была поставлена задача выполнить расчет собственных частот и форм колебаний корпуса и струн музыкального инструмента. Полученные в работе результаты дали наглядное представление о состоянии модели при заданной нагрузке и граничных условиях. Кроме того, выполненный в исследовании анализ показал состояние корпуса и струн домры. В статье приведены полученные частоты, которые были использованы для трансформации математических значений в определенные музыкальные ноты.

Ключевые слова: *домра, струны, динамика, колебания, система геометрического моделирования, система конечно-элементного моделирования.*

Постановка проблемы. В данной работе исследуются собственные частоты и формы колебаний музыкального инструмента домры. Под домрой понимают русский, украинский и белорусский струнный щипковый музыкальный инструмент, корпус которого имеет полусферическую форму. Звук струн производится при помощи медиатора. Домра используется для сольного исполнительства (домра малая, прима) и в составе ансамблей и оркестров русских и украинских народных инструментов [1]. Существуют два вида домр: трёхструнная (русская) домра с квартовым строем, традиционно использующаяся в России, и четырёхструнная домра с квинтовым строем, получившая наибольшее распространение в Украине и Белоруссии [2].

В настоящее время исследование музыкальных инструментов является актуальной темой, так как эмоциональный мир человека невозможно представить без музыки. Глубина воздействия музыки зависит не только от исполнительского мастерства, но и от качества звучания музыкальных инструментов, их функциональных возможностей. Октавная система — способ группировки и обозначения музыкальных звуков на основе их октавного сходства. Музыкальные звуки, частота которых отличается в два раза, воспринимаются на слух как очень похожие, как повторение одного звука на разной высоте. Это явление называется октавным сходством звуков. На основе этого весь диапазон частот, используемых в музыке звуков, делится на участки, называемые октавами. При этом частота звуков в каждой последующей октаве будет в два раза выше, чем в предыдущей, а схожие звуки получают одинаковые названия ступеней. Расположение частотных границ октав условно и выбрано таким образом, чтобы каждая октава начиналась с первой ступени («До») равномерно темперированного двенадцати звукового строя и при этом частота 6-й ступени («Ля») одной из октав (называемой «первой») составляла бы 440 Гц. Музыкальная октава делится на 12 равных интервалов (полутонов), частота каждого последующего звука приблизительно в 1,059 раза больше частоты предыдущего [3].

Основным методом исследования работы является метод конечных элементов (МКЭ), лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов. МКЭ допускает ясную геометрическую, конструктивную и физическую интерпретацию.

Исследование проводится с помощью системы конечно-элементного моделирования. Для построения музыкального инструмента используется система геометрического моделирования.

Постановка задачи. В данной работе нужно было исследовать колебания струн и корпуса домры методом конечных элементов с помощью системы конечно-элементного моделирования.

Были поставлены следующие задачи:

1) построить модель домры в системе геометрического моделирования;

2) перенести модель в систему конечно-элементного моделирования;

3) выполнить разбиение на конечно-элементную сетку и задать граничные условия;

4) провести расчет частот и форм колебаний;

5) выполнить анализ частот и форм колебаний домры;

6) сделать выводы.

Цель работы. Нахождение частот и форм колебаний струн и корпуса домры с помощью системы конечно-элементного моделирования.

Изложение основного материала. Постановка задачи колебаний струн музыкального инструмента восходит к фундаментальным работам Джона Уильяма Рэлея, в частности к его классической книге «Теория звука» [4], в которой подробно обсуждаются различные виды возбуждения колебаний в натянутых струнах музыкальных инструментов, таких как щипковый музыкальный инструмент – гитара, смычковые – скрипка, виолончель, клавишные музыкальные инструменты.

Уравнения поперечно-продольных колебаний гибкой предварительно натянутой струны, полученные в работе [5], таковы:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right], \quad (2)$$

где b, a — скорости поперечных и продольных волн, e_0 — первоначальная деформация струны.

Первое уравнение представляет собой традиционное уравнение поперечных колебаний. Второе — уравнение продольных колебаний. Это уравнение неоднородно, наличие в правой части второго члена говорит, что роль вынуждающей силы для продольных колебаний играют поперечные составляющие. Значит, решение второго уравнения представляет собой суперпозицию продольных колебаний на собственных частотах и вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных, при этом возможны резонансные явления, когда амплитуда продольных колебаний резко возрастает.

Формулы (1) и (2) не учитывают колебаний деки и грифа музыкального инструмента. Поэтому моделирование рационально проводить с помощью МКЭ.

Основными параметрами задачи были физические константы материала, которые представлены в таблице 1. На рисунке 1 изображена модель домры.

Таблица 1

Характеристики материала детали

Материал	Плотность, ρ, кг/м^3	Модуль Юнга, E, Па	Коэффициент Пуассона, ν
Сталь	7850	$2\cdot10^{11}$	0,3
Явор	623	$1{,}2618\cdot10^{10}$	0,4

Рис. 1. Домра

Одним из универсальных методов для определения частот и форм собственных колебаний является метод конечных элементов (МКЭ).

Аппроксимация перемещений точек конечного элемента:

$$A^e = [N^e][a^e]q \,, \tag{3}$$

где q – глобальный вектор узловых перемещений;

$[a^e]$ – матрица кинематических связей (матрица индексов) конечных элементов;

$[N^e]$ – матрица функций форм (аппроксимирующих функций), которая выглядит так:

$$[N^e] = \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \tag{4}$$

Функции форм $N_i(\xi, \eta, \varsigma)$ для восьми узлового КЭ в криволинейных координатах ξ, η, ς определяются такой зависимостью:

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\varsigma\varsigma_i), i = 1 \div 8 \tag{5}$$

Для одного КЭ:

$$\begin{aligned} &\delta\{\omega^2 q^T \iiint_{V_e} [N^e]^T \rho [N^e] dVq - \\ &q^T \iiint_{V_e} [N^e]^T [D^T][H][D][N^e] dVq\} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Сделаем следующие обозначения: $[M]$, $[M^e]$ – матрицы масс, глобальная и элемента, $[K]$, $[K^e]$ – матрицы жесткости глобальная и элемента:

$$\begin{aligned} &[M^e] = \iiint_{V_e} [N^e]^T \rho [N^e] dV \\ &[M] = \sum\nolimits_e ([a^e])^T [M^e][a^e] \end{aligned} \,, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &[K^e] = \iiint_{V_e} [N^e]^T [D^T][H][D][N^e] dV \\ &[K] = \sum\nolimits_e ([a^e])^T [K^e][a^e] \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая введенные обозначения и проведя варьирование относительно вектора *q* в уравнении (6) получим:

$$([K] - \omega^2 [M])q = 0 \,. \tag{9}$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (9), необходимо, чтоб определитель системы равнялся нулю

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \,. \tag{10}$$

Таким образом, с уравнения (10) определяются собственные частоты системы ω, которые после подстановки в (9) позволяют определить с точностью до произвольного множителя форму колебаний *q* [6, 7, 8].

Построение модели. Для построения геометрической модели была использована система геометрического моделирования.

Этапы построения модели:

1) Дека с кнопками, внутренними прожилками и кантом (рис. 2).

2) Панцирь навесной (рис. 3).

3) Подставка (рис. 4).

4) Гриф с ладами, пяткой и верхним порожком (рис. 5).

5) Головка с колковыми валиками (рис. 6).

6) Клепки (рис. 7).

7) Получилась сборка (рис 8).

8) Струны Ми, Ля, Ре, Соль внешне выглядят одинаково, отличаются диаметрами (рис 9).

9) Общий вид домры со струнами (рис 10).

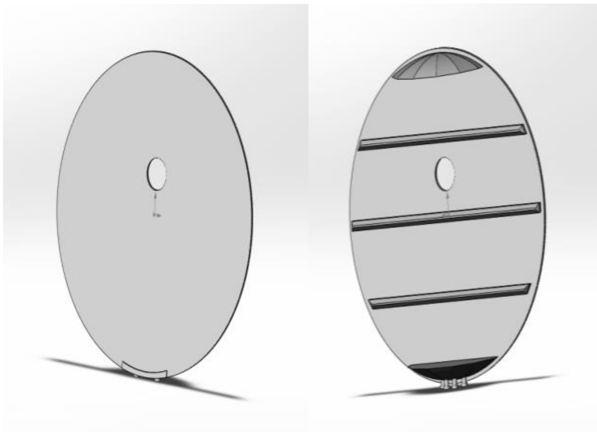


Рис. 2. Дека

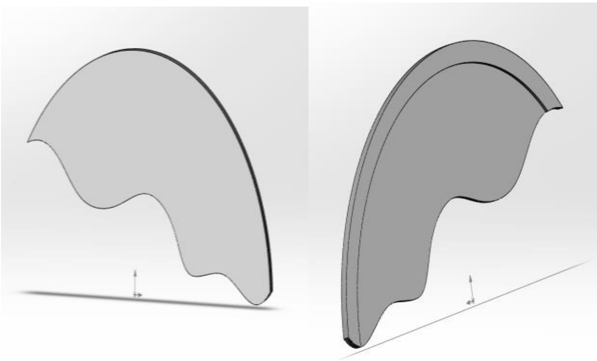


Рис. 3. Панцирь

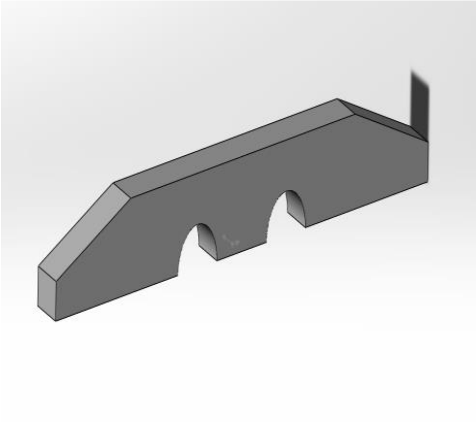


Рис. 4. Подставка

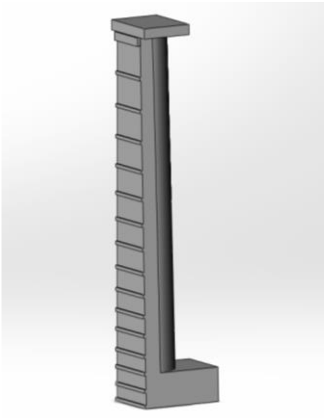


Рис. 5. Гриф

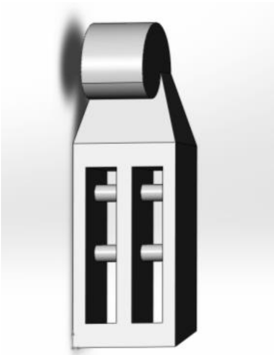


Рис. 6. Головка

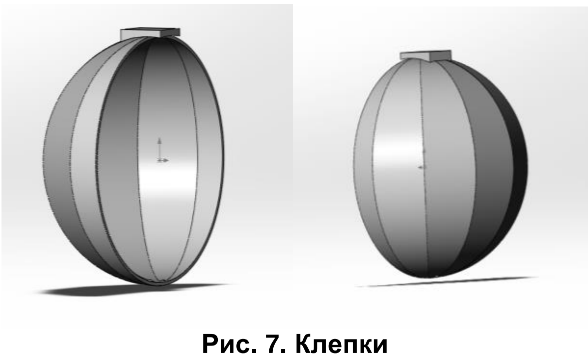


Рис. 7. Клепки

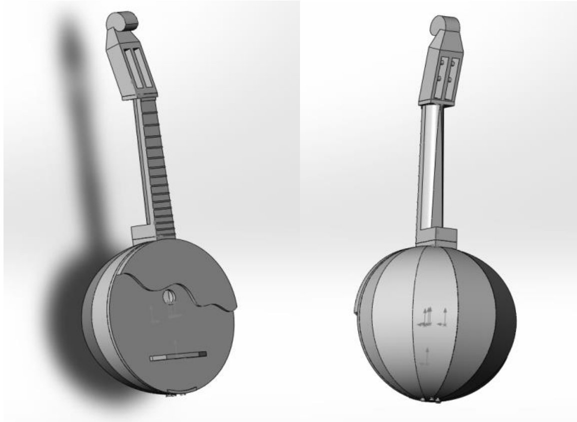


Рис. 8. Общий вид домры без струн

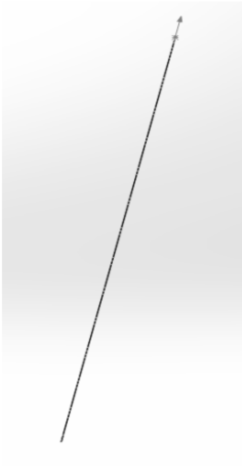


Рис. 9. Струна

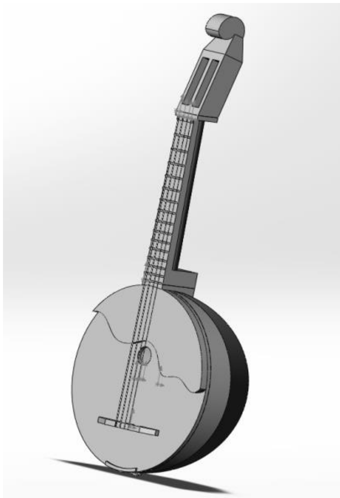
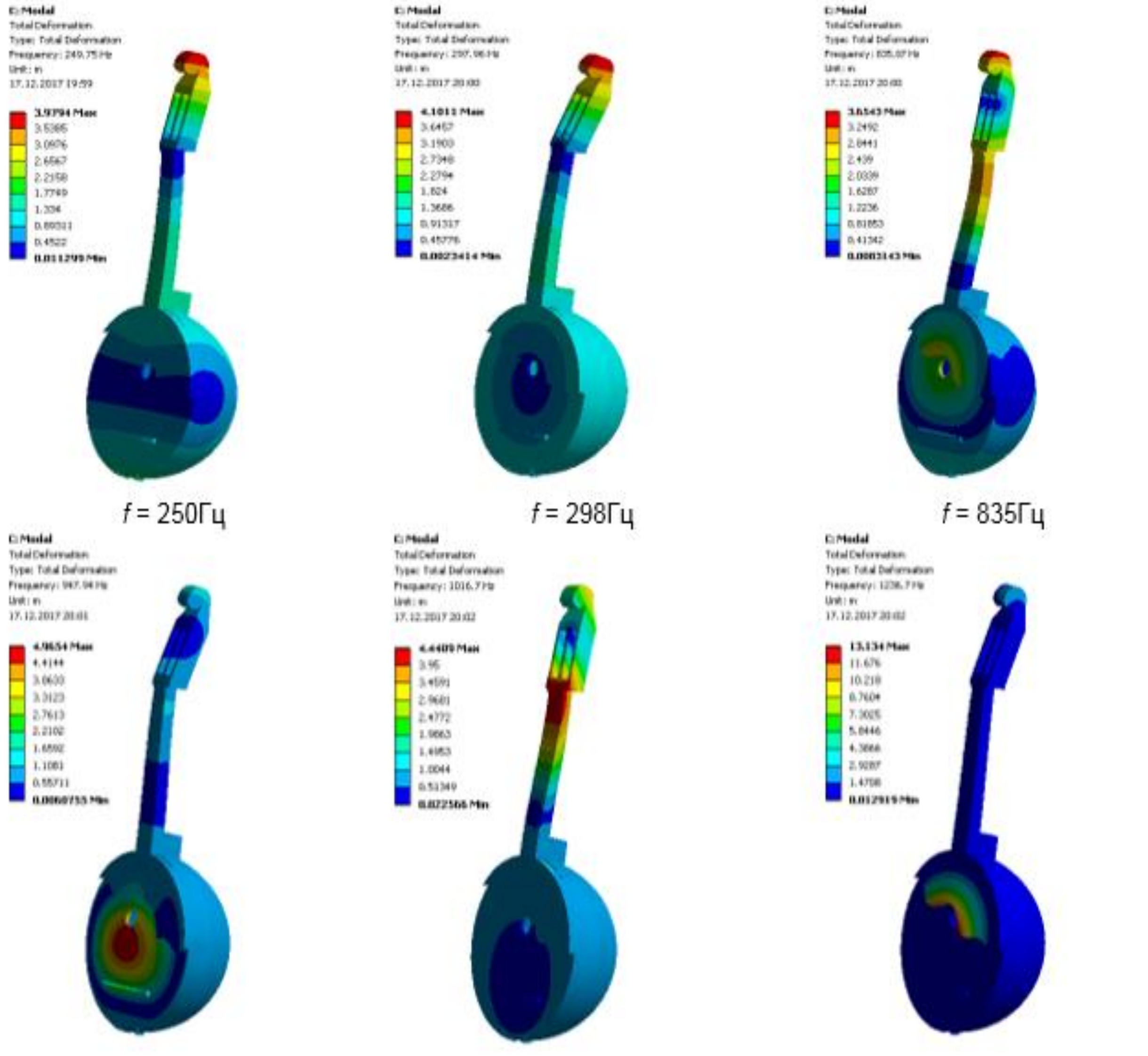


Рис. 10. Общий вид домры со струнами

Расчет частот и форм колебаний. Для расчета частот и форм колебаний была использована система конечно-элементного моделирования [9, 10]. Построенная модель была перемещена из системы геометрического моделирования в систему конечно-элементного моделирования и заданы свойства материала для корпуса домры – явор и струн – сталь (табл. 1).

В начале была рассмотрена модель домры без струн и выполнен анализ расчета собственных частот и форм колебаний. Также была создана конечно-элементная сетка. Условием, которое накладывалось на инструмент, было упругое основание в месте нахождения клепок домры. Выполненное решение дало такие результаты (рис.11).



f = 948Гц *f* = 1017Гц *f* = 1237Гц

Рис. 11. Частоты и формы колебаний домры без струн

Далее была рассмотрена модель со струнами. Был выполнен анализ расчета собственных частот и форм колебаний, создана конечно-элементная сетка. Условием, которое накладывалось на инструмент, было упругое основание в месте нахождения клепок домры. Для четырех струн было создано натяжение, указанное в таблице 2.

Таблица 2

Натяжение струн

Струна	Натяжение, *T*, Н
Соль	142
Ре	163
Ля	113
Ми	129

Выполненный модальный анализ дал возможность получить собственные частоты и формы колебаний струн и корпуса домры (рис. 12). Соответствие полученных частот нотам показано в таблице 3. Из результатов расчетов видно, что частоты колебаний корпуса частично совпадают с частотами нот, что приводит к усилению звучания струн элементами корпуса на определенных нотах благодаря эффекту резонанса. В левой колонке показана собственная частота определенной ноты, указанной в правой колонке. В центральной колонке рассчитано количество полутонов по формуле относительно *n*:

$$f = 440 \times \sqrt[12]{2^n}, \quad (11)$$

$$n = 12 \log_2 \frac{f}{440}, \quad (12)$$

где *f* – частота, а *n* – количество полутонов относительно ноты «ля» первой октавы.

Таблица 3

Частоты струн в соответствии с нотами

Частота	Лад	Нота
196.23	-13.9795	соль
196.62	-13.9451	соль
252.54	-9.6119	си неточно
292.55	-7.06584	ре
293.41	-7.01503	ре
299.74	-6.6455	ми неточно
394.73	-1.87965	соль
395.76	-1.83453	соль
440.18	0.007081	ля
440.27	0.01062	ля
586.32	4.970217	ре
587.2	4.996181	ре
598.96	5.339474	ре неточно
600.46	5.382775	ре неточно
658.9	6.990672	ми
659.04	6.99435	ми
811.45	10.59598	соль неточно
813.17	10.63264	соль неточно
865.33	11.70896	ля
879.81	11.99626	ля
880.99	12.01947	ля
881.41	12.02772	ля
886.91	12.13541	ля
1022.1	14.59153	си неточно
1036.3	14.8304	до
1044.7	14.97016	до
1069.8	15.38119	до
1180.4	17.0844	ре
1181.8	17.10493	ре
1271.5	18.37147	ре неточно

Продовження табл. 3

1275.2	18.42178	ре неточно
1294.2	18.67782	ми неточно
1318.4	18.99855	ми
1319.2	19.00905	ми
1321.5	19.03921	ми
1322.4	19.051	ми
1398.3	20.01718	фа

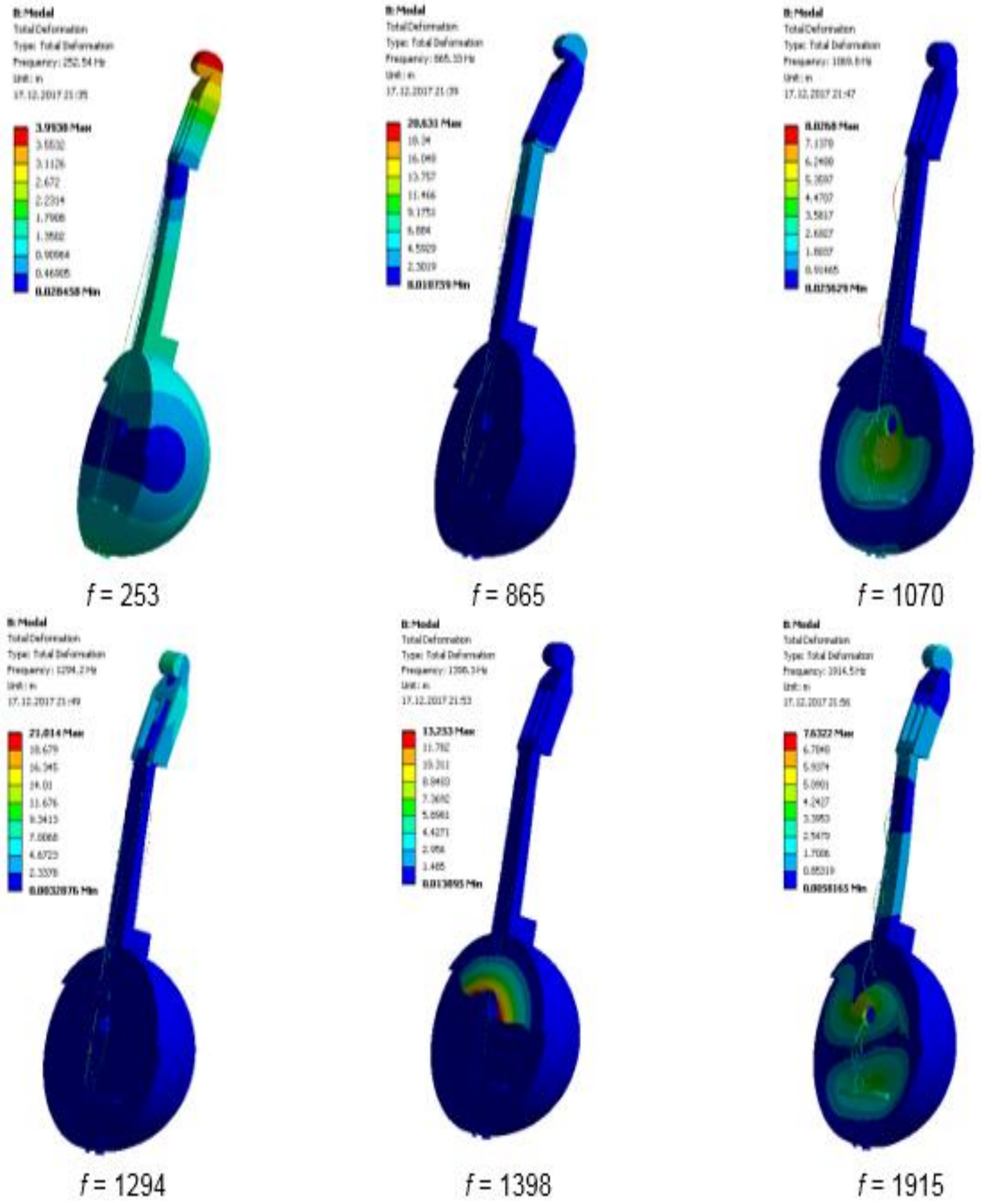


Рис. 12. Частоты и формы колебаний корпуса домры

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод, что в работе построена детальная геометрическая модель домры. На ее основании создано конечно-элементную модель, позволяющую определить собственные частоты колебаний корпуса и струн домры. По результатам расчетов видно, что частоты колебаний корпуса частично совпадают с частотами нот, что приводит к усилению звучания струн элементами корпуса на определенных нотах благодаря эффекту резонанса. Следовательно, поставленные в исследовании задачи были решены.

Список литературы

1. Прокопенко Н. Устройство, хранение и ремонт народных музыкальных инструментов / Н. Прокопенко – М.: Музыка, 1977. – 104 с.
2. Чунин В.С. Русская домра – проводник в мир музыки / В.С. Чунин. – М.: РАМ им. Гнесиных, 2011. – 368 с.
3. Блюм Д. Краткий курс инструментоведения / Д. Блюм – М: Музгиз, 1947.
4. Baron Rayleigh. The theory of sound/ Rayleigh Baron. – 1926; Рэлей. Теория звука. – Л.; М., 1940., Т. 1. – С. 187–257.
5. Демьянов Ю.А. К уточнению теории колебаний музыкальных струн / Ю.А. Демьянов // Докл. РАН, 1999. – Т. 369. № 4. – С. 461-465.
6. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич – М.: Мир, 1975. – 543 с.
7. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. – М.: Высшая школа, 1985. – 240 с.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд – М.: Мир, 1979. – 392с.
9. Каплун А.Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Орефьева. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
10. Чигарев А.В. ANSYS для инженеров: справочное пособие / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с.

References

1. Prokopenko, N. (1977). Ustroistvo, khranenie i remont narodnyih muzyikalnyikh instrumentov [Construction, storage and repair of folk musical instruments] [in Russian].
2. Chunin, V.S. (2011). Russkaia domra – provodnik v mir muzyiki [Russian Domra is a guide to the world of music] [in Russian].
3. Blium, D. (1947). Kratkii kurs instrumentovedeniia [Short course of instrumentology] [in Russian].
4. Baron, R. (1940). The theory of sound [in English].
5. Demianov, Yu. A. (1999). K utochneniiu teorii kolebanii muzyikalnyikh strun [To clarify the theory vibration of musical strings] [in Russian].
6. Zenkevich, O.K. (1975). Metod konechnyih elementov v tekhnike [Finite element method in engineering] [in Russian].
7. Obraztsov, I.F. (1985). Metod konechnyih elementov v zadachah stroitelnoi mekhaniki letatelnyih apparatov [Finite element method in tasks structural mechanics of aircraft] [in Russian].
8. Segerlind, L. (1979). Primenenie metoda konechnyih elementov [Application of finite element method] [in Russian].
9. Kaplun, A.B. (2004). ANSYS v rukakh inzhenera: prakticheskoe rukovodstvo [ANSYS in the hands of an engineer: a practical guide] [in Russian].
10. Chigarev, A.V. (2004). ANSYS dlia inzhenerov: spravochnoe posobie [ANSYS for engineers: a handbook] [in Russian].

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ КОЛИВАНЬ ДОМРИ НА ОСНОВІ ДЕТАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ

Статтю присвячено дослідженню власних коливань домри. У даній роботі важливе значення мали методи математичного моделювання динамічних процесів, основним методом з яких є метод скінчених елементів (МСЕ). Представлене дослідження проводилося за допомогою системи скінчено-елементного моделювання. У роботі для моделювання музичного інструменту використовувалася система геометричного моделювання. У дослідженні було поставлено задачу виконати розрахунок власних частот і форм коливань корпусу та струн музичного інструменту. Отримані в роботі результати дали наглядне уявлення про стан моделі при заданому навантаженні і граничних умовах. Крім того, виконаний у дослідженні аналіз показав стан корпусу та струн домри. У статті наведено отримані частоти, які було використано для трансформації математичних значень у відповідні музичні ноти.

Ключові слова: *домра, струни, динаміка, коливання, система геометричного*

моделювання, система скінчено-елементного моделювання.

DEFINITION OF FREQUENCIES AND VIBRATION FORMS OF DOMRA BASED ON DETAILED GEOMETRIC MODEL

The article is devoted to investigation natural vibrations of musical instrument on the example of Domra. The main method of the work is the finite element method. For modeling musical instrument was used geometrical modeling system which is a handy program that ensures the development products of any complexity and purpose. The aim of the research is the study of dynamic processes occurring in the Domra, finding the frequency and forms vibrations of strings and shell of model using the finite element modeling system modules.

Keywords: *Domra, strings, dynamics, vibration, geometrical modeling system, finite element modeling system.*

Сведения об авторах

Водка Алексей Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры динамики и прочности машин Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: oleksii.vodka@gmail.com).

Суханова Ольга Игоревна – студентка 6 курса магистратуры учебно-научного инженерно-физического института Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: olechka.sukh@gmail.com).

Водка Олексій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент кафедри динаміки та міцності машин Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: oleksii.vodka@gmail.com).

Суханова Ольга Ігорівна – студентка 6 курсу магістратури учбово-наукового інженерно-фізичного інституту Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: olechka.sukh@gmail.com).

Vodka Oleksii – Assistant Professor of Dynamics and Strength of Machines Department, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute" (2, Kyrpychova Str., Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: oleksii.vodka@gmail.com).

Sukhanova Olha – Student of 6th course, Master’s Degree of the Educational and Scientific Engineering-physical Institute, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute" (2, Kyrpychova Str., Kharkiv, Ukraine, 61002, e-mail: olechka.sukh@gmail.com).