

**Солона О.В.**

к.т.н., доцент

**Ковбаса В.П.**

д.т.н., професор

*Вінницький національний  
аграрний університет***Solona O.****Kovbasa V.***Vinnitsia National  
Agrarian  
University***УДК 531.42: 531.211:534.13****DOI:10.37128/2306-8744-2019-1-2****СТАТИКА ТА ДИНАМІКА  
ВЗАЄМОДІЇ АБСОЛЮТНО  
ТВЕРДИХ КОНКРЕЦІЙ ІЗ  
СИПУЧИМ СЕРЕДОВИЩЕМ**

Дана частина статті є продовженням першої частини однойменної статті. У цій частині виведені рівняння граничних умов, у якості яких виступають прикладені до стінок контейнера переміщення. Отримано систему гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Вона дозволяє спільно з наведеними в частині 1 статичними рівняннями отримати значення компонент швидкостей переміщень сипучого середовища в контейнері, а також зміни її щільності в залежності від механічних властивостей середовища і кінематичних режимів прикладених переміщень [8].

Чисельне розв'язання даної системи рівнянь дозволяє послідовно вирішити виведені в статті рівняння щодо визначення компонент напружень як в пристінкових шарах, так і в умовах відсутності впливу стінок контейнера.

На підставі отриманих таким чином рішень наведені рівняння, які дозволяють визначити можливі лінійні і кутові переміщення конкрецій у пристінкових шарах при контактній взаємодії конкреції зі стінкою, а також в умовах відсутності контактних взаємодій з урахуванням динамічного впливу рухомої сипучого середовища. Ці функції отримані для найбільш загальних випадків, які передбачають врахування механічних властивостей сипучого середовища, геометричних розмірів, форм і механічних властивостей конкрецій і стінок контейнера, а також кінематичних режимів впливів, прикладених до стінок контейнера [2].

Отримані рівняння є вихідними для чисельного рішення задач про переміщення, зміни щільності сипучого середовища, а також можливих лінійних і кутових переміщень конкрецій, які знаходяться в середовищі.

Використовуючи методи кінцевих елементів (FEM) або кінцевих обсягів (DEM), можна отримати остаточні рішення отриманих рівнянь. Ці рівняння дозволяють визначити кінематичні режими додаткових кінематичних впливів з метою отримання необхідних змін щільності і можливих переміщень обсягів сипучого середовища, а також необхідних переміщень і швидкостей цих переміщень конкрецій, які знаходяться в рухомому сипучому середовищі [5].

**Ключові слова:** сипуче дискретна середовище, контейнер, лінійні і кутові переміщення, компоненти швидкостей переміщень, компоненти динамічних напружень, силові дії.

**Постановка проблеми.** Актуальність даних досліджень наведена в першій частині цієї публікації. У зв'язку з обмеженнями за обсягом публікації, дана частина є продовженням першої частини статті, в якій

отримані рівняння статичного сипучого середовища, умови рівноваги в ньому конкрецій і умови можливих їх переміщень без прикладення будь-яких збурень до контейнера.



**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Основоположними в даному напрямку є результати досліджень І. І. Блехмана [1,6], в яких розглядаються умови переміщень конкрецій з урахуванням їх геометричних властивостей і механічних властивостей у середовищах, які моделюються з використанням законів гідромеханіки, що не може в повному обсязі відповідати реальній картині, оскільки механіка сипучих середовищ має суттєві відмінності від механіки рідини.

У дослідженнях інших авторів (Вайсберг Л. А., Демидов І. В., Іванов К. С.) [18] наводяться загальні методи побудови рівнянь вібраційного руху сипучих середовищ і зміни їх агрегатного стану. Однак в статті відсутні кінцеві рівняння, які б дозволили скласти системи рівнянь для кінцевого чисельного рішення. Крім того, у наведеній публікації не розглядається рішення задачі про рух абсолютно твердих конкрецій у рухомому сипучому середовищі.

**Мета досліджень.** Виведення рівнянь зв'язку збуджуючих коливальних навантажень зі змінами щільності сипучого середовища, компонентами швидкостей її переміщень, змін напружень у ній і дію цих величин на можливі переміщення конкрецій, що знаходяться у контейнері з сипучим середовищем. У зв'язку з цим необхідно вирішити такі завдання:

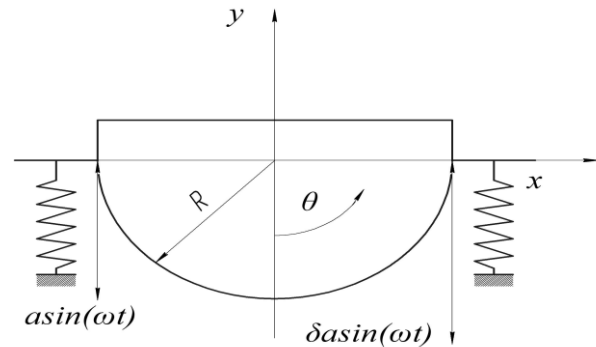
– вивести кінематичні рівняння збуджуючих впливів на контейнер;

– отримати рівняння для визначення компонент швидкостей переміщень елементарних обсягів сипучого середовища;

– отримати рівняння змін компонент напружень в елементарних обсягах сипучого середовища;

вивести рівняння можливих швидкостей переміщень конкрецій при різних їх початкових положеннях: у зоні контакту зі стінкою контейнера і в зонах, вільних від такого контакту.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для розуміння найбільш загальних кінематичних умов на поверхні контейнера можна скористатися схемою, представленою на рис.2.1.



**Рис. 2.1.** Схематичне уявлення приведення контейнера в коливальний рух

Контейнер із сипучим середовищем має форму циліндра радіусу  $R$ , вісь якого нахилена до горизонтальної осі  $z$  під кутом  $\alpha$ . До периферійних зон циліндра прикладені зосереджені сили з переміщеннями, які викликають коливання. Для забезпечення повної свободи для найбільш загальних випадків збуджуючі дії прикладені під кутом  $\beta$  до вертикалі в площині  $xz$ . Ці переміщення представлені на схемі функціями з урахуванням нахилу  $\beta$ ):

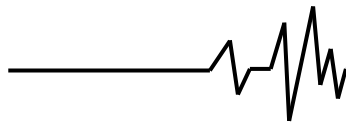
$$a \sin \omega t \cos \beta ; \delta a \sin \omega t \cos \beta , \quad (2.1)$$

де  $a$  – амплітуда коливань,  $\delta$  – коефіцієнт, який враховує різницю амплітуд коливань двох протилежних країв контейнера,  $\omega$  – кутова частота коливань,  $t$  – час.

При різниці амплітуд коливань, пропорційної коефіцієнту  $\delta$ , виникають кутові коливання контейнера (навколо осі симетрії):

$$\theta = \arctg \delta / (2R) \sin \omega t \cos \beta , \quad (2.2).$$

З метою отримання рівнянь компонент швидкостей переміщень сипучого середовища можна скористатися (1.1), (1.3), (1.6), які наведені в першій частині статті. При цьому, друга група геометричних рівнянь (1.3), підставляється у фізичні рівняння зв'язку компонент напружень зі швидкостями деформацій (1.6), а отримані величини компонент напружень підставляються у рівняння динаміки середовища (1.1). У кінцевому вигляді такі рівняння приймуть найбільш загальний вигляд:



$$\begin{aligned} & \rho(x, y, z, t) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \dot{w} \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) = \\ & -X + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2\eta(x, y, z)}{(-1+2\nu)} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \eta \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \right); \\ & \rho(x, y, z, t) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \dot{w} \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) = \\ & = Y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2\eta(x, y, z)}{(-1+2\nu)} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \right); \end{aligned} \quad (2.3)$$
$$\begin{aligned} & \rho(x, y, z, t) \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \dot{w} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) = \\ & = Z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2\eta}{(-1+2\nu)} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \eta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

Ці рівняння повинні бути доповнені рівнянням нерозривності, заснованим на (1.5), яке, у свою чергу, повинно бути перетворено з використанням рівнянь розподілу напружень у статичному стані (1.18), (1.19), на підставі яких вводиться функція розподілу щільності з (1.20) [3].

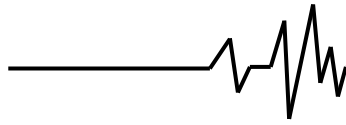
Далі, при використанні граничних умов (2.1), (2.2) можна визначити компоненти швидкостей переміщень і змін щільності сипучого середовища при прикладенні збурених рухів до стінок контейнера. Рішення цих рівнянь може бути отримано лише з використанням чисельних методів кінцевих елементів (FEM) або кінцевих обсягів (DEM), оскільки ці рівняння відносяться до гіперболічного типу з геометричною і фізичною нелінійністю.

Для опису можливих рухів конкрецій, які знаходяться в сипучому середовищі, необхідно розглянути два випадки. Перший випадок відноситься до конкрецій, що знаходяться в контакті зі стінкою контейнера, а другий випадок – до конкрецій, що знаходяться в

сипучому середовищі без контакту зі стінкою. При цьому перший випадок слід брати до уваги лише до можливого контактного навантаження стінкою, а далі розглядається лише другий випадок.

У разі контактної взаємодії (перший випадок) повинні бути використані рівняння типу (1.23), (1.24). При цьому в них повинні бути внесені доповнення у вигляді інерційних сил з боку рухомої поверхні контейнера і доповнення у вигляді сил опору середовища, що рухається з використанням рівнянь рівноваги на поверхні (1.2), в яких компоненти напружень повинні бути визначені з рівнянь (1.6) [3].

Інерційні складові визначаються прискореннями (лінійними і кутовими) у проєкціях на нормаль і дотичну до стінки контейнера у функціях обурення і координат стінки контейнера, і заходами інертності конкрецій у залежності від виду переміщень лінійних (маса) або кутових (момент інерції мас). Виходячи з (2.1), (2.2) і схем (рис.1.1 (частина 1) [3] і рис.2.1 (частина 2)), зміщення стінок контейнера в напрямку осі  $ou$  будуть мати вигляд:



$v_c = (a + \delta(R - x)) \cos[\omega t] \cos[\beta]$ ; кутове  $\dot{v} = -(a + (R - x)\delta)\omega \cos[\beta] \sin[\omega t]$ ;  
переміщення:  $\theta = \arctg \delta/2R \cos[\beta]$ ; їх  $\dot{\theta} = \omega \arctg \delta/2R \cos[\beta] \cos[\omega t]$ , (2.4)  
перші похідні за часом (лінійна і кутові швидкості): а другі похідні за часом (лінійне і кутове прискорення) (рис. 2.2):

$$\ddot{v} = -(a + (R - x)\delta)\omega^2 \cos[\beta] \cos[\omega t]; \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \arctg \delta/2R \cos[\beta] \sin[\omega t]. \quad (2.5)$$

В цьому випадку проекція вертикальних інерційних сил, які діють з боку стінки приведеного в рух контейнера в проекції на нормаль до поверхні, на нормаль до стінки набуде вигляду:

$$F_{kin} = M_k \ddot{v} m_c = -M_k (a + (R - x)\delta)\omega^2 \cos[\beta] \cos[\omega t] m_c, \quad (2.6)$$

де  $M_k, m_c$  – маса конкреції і косинус кута нахилу нормалі до осі  $Oy$ , визначаються з рівнянь (1.21), (1.16). які наведені в частині 1 статті. Та ж інерційна сила в проекції на дотичну до стінки визначиться залежністю:

$$F_{kik} = M_k \ddot{v} \sin[\arccos[m_c]] = -M_k (a + (R - x)\delta)\omega^2 \cos[\beta] \cos[\omega t] \sin[\arccos[m_c]]. \quad (2.7)$$

У такому випадку можуть бути складені рівняння можливих переміщень конкрецій, які знаходяться в контакт з стінками контейнера при його русі, які визначають умови руху конкрецій (ковзання, відрив від стінки або кочення по стінці).

Перша умова – умова ковзання конкреції по поверхні стінки при додатку динамічних дій до контейнера. При цьому сума проекцій всіх сил, спрямованих по дотичній до поверхні стінки контейнера, що діють на конкреції, з

урахуванням інерційних, представиться у вигляді  $S_{TFd} < S_{Fkd}$ , тобто сума проекцій всіх сил на дотичну до стінки  $S_{Fkd}$  перевищує силу тертя  $S_{TFd}$  від дії всіх сил. Складові цих сил матимуть вигляд (інтегральні вираження являють собою поверхневі інтеграли першого роду):

$$S_{Fkd} = \sin[m_c] \left( \begin{aligned} & M_k \ddot{v} \pm M_k g \pm \\ & \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\xi d\zeta \right) + \\ & + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k - \delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\xi d\zeta \right) \pm \\ & \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k \Big|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\xi d\zeta \right) \text{tg } \varphi_3 \pm \\ & \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \left( \tau_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k \right) \Big|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\xi d\zeta \right) \text{tg } \varphi_3 \end{aligned} \right); \quad (2.8)$$

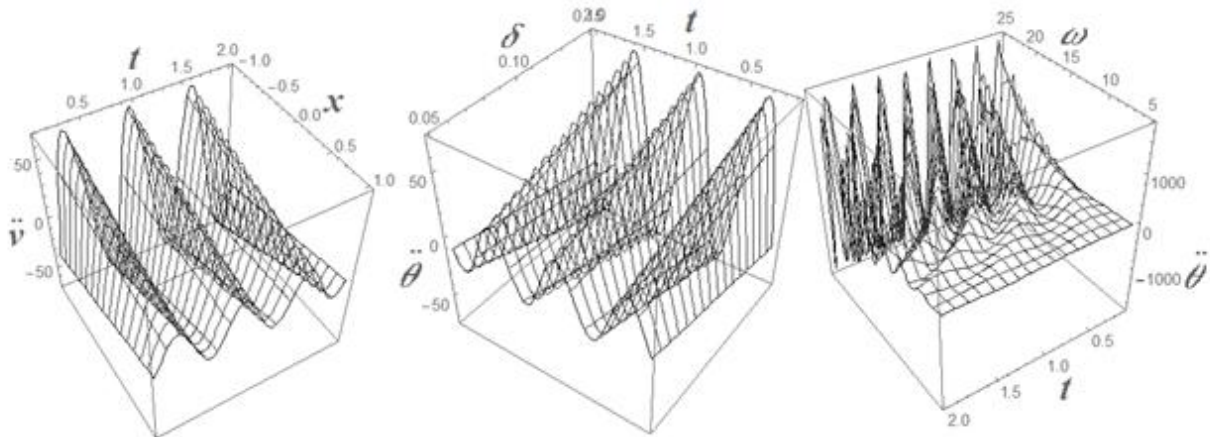


$$S_{TFd} = tg[\varphi_2] \left( \begin{array}{l} M_k \ddot{v} m_c \pm M_k g m_c \pm \\ \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd} |_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) m_c + \\ + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{vd} |_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) m_c \\ \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k \right)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \left. \right) tg \varphi_3 \pm \\ \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\tau_{zdn} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k) \right)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \left. \right) tg \varphi_3 \end{array} \right) \quad (2.9)$$

де  $\sigma_{vd} = \sigma_{xd} + \sigma_{yd} + \sigma_{zd} / 3$ ,

$\sigma_{xd}, \sigma_{yd}, \sigma_{zd}, \tau_{xyd}, \tau_{yzd}, \tau_{xzd}$  – компоненти нормальних і дотичних напружень на поверхні

конкреції, які повинні бути визначені з рівнянь (1.4) частини 1 [3],  $\varphi_3$  – коефіцієнт зовнішнього тертя середовища при конкреції.



**Рис. 2.2. Графіки віброприскорень збуджують динамічний вплив на контейнер**

Компоненти нормальних і дотичних напружень на поверхні конкреції визначаються з фізичних рівнянь, які засновані на (1.6) з урахуванням того, що при швидких рухах середовища величиною, яка характеризує опір руху, залишається в'язкий опір:

$$\sigma_{xd} = 3\mu_0 \dot{\epsilon}_0 + \frac{\mu}{(1+\nu)} (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_0); \quad \sigma_{yd} = 3\mu_0 \dot{\epsilon}_0 + \frac{\mu}{(1+\nu)} (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_0);$$

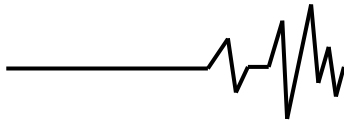
$$\sigma_{zd} = 3\mu_0 \dot{\epsilon}_0 + \frac{\mu}{(1+\nu)} (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_0) \quad (2.10)$$

$$\tau_{xyd} = \eta \dot{\gamma}_{xy}; \quad \tau_{xzd} = \eta \dot{\gamma}_{xz}; \quad \tau_{yzd} = \eta \dot{\gamma}_{yz}.$$

Компоненти швидкостей деформацій, що входять в останні рівняння, визначаються шляхом диференціювання компонент швидкостей переміщень, отриманих у результаті рішення (2.3) відповідно до (1.3) [3].

Друга умова – це умова кочення конкреції по стінці контейнера, яке виникає у

разі, коли сумарний момент сил, з урахуванням динамічної складової  $SM_{kdh}$  (щодо миттєвого центру обертання  $O_r$ ) перевищує момент сил відносно того ж центру, що діють в іншому напрямку  $SM_{kdf}$ . При цьому, необхідно



дотримуватися додаткової умови відсутності ковзання:  $S_{TFd} \triangleright S_{Fkd}$ . У цьому випадку, крутний момент визначиться різницею

$SM_{kdh} - SM_{kdf}$ . Вирази для сумарних моментів візьмуть вигляд:

$$SM_{kdh} = \ddot{\theta} J_{kO_r} \pm r_k \left[ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd} |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \geq 0} d\zeta d\xi \right) m_c + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k - \delta_c} \sigma_{vd} |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \geq 0} d\zeta d\xi \right) m_c \right] \pm \left[ \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \left( \sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k \right) |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \geq 0} d\zeta d\xi \right] tg \varphi_3 \pm \left[ \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \left( \tau_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k \right) |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \geq 0} d\zeta d\xi \right] tg \varphi_3$$

$$SM_{kdf} = \ddot{\theta} J_{kO_r} \pm r_k \left[ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd} |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \leq 0} d\zeta d\xi \right) m_c + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k - \delta_c} \sigma_{vd} |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \leq 0} d\zeta d\xi \right) m_c \right] \pm \left[ \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \left( \sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k \right) |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \leq 0} d\zeta d\xi \right] tg \varphi_3 \pm \left[ \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \left( \tau_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k \right) |_{\eta=f_k(\xi, \zeta) / \eta \leq 0} d\zeta d\xi \right] tg \varphi_3, (2.11)$$

де  $J_{kO_r}$  – момент інерції маси конкреції щодо миттєвого центру обертання  $O_r$ .

У більш загальному випадку момент інерції маси конкреції щодо миттєвого центру обертання визначиться наступним чином:

$$J_{kO_r} = \iiint_{V_k} r \rho_k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \text{ де, } r -$$

відстань від центру мас до миттєвого центру обертання;  $r = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2}$ , а величини

$\xi_k, \eta_k, \zeta_k$  – координати центру мас конкреції по відношенню до миттєвого центру обертання:

$$\xi_k = \left( \iiint_{V_k} \xi \rho_k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right) / M_k;$$

$$\eta_k = \left( \iiint_{V_k} \eta \rho_k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right) / M_k;$$

$$\zeta_k = \left( \iiint_{V_k} \zeta \rho_k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right) / M_k.$$

У тому випадку, якщо проекція на нормаль до стінки контейнера інерційних сил впливу стінки контейнера, і сил, що діють з боку рухомого сипучого середовища  $S_{Fnd}$ , перевищить проекцію на ту ж нормаль масових сил  $S_{Fnm}$ ,  $S_{Fnd} \triangleright S_{Fnm}$ , відбудеться відрив



конкреції від стінки контейнера, і тоді можна розглядати поведінку конкреції в умовах безконтактного руху в сипучому середовищі.

Вирази проєкцій цих сил на нормаль мають вигляд:  $S_{Fnm} = M_k g m_c$ ;

$$S_{Fnd} = \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)}} d\zeta d\xi \right) m_c + \\ & \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{vd|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)}} d\zeta d\xi \right) m_c \end{aligned} \right] \pm$$

$$\pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k \Big|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) tg \varphi_3 \pm. (2.12)$$

$$\pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k \Big|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) tg \varphi_3$$

Для випадку виконання умови, описаної вище, і якщо конкреція в статичному режимі перебувала у вільному від контактної взаємодії стані, необхідно розглянути умови можливих її переміщень на підставі аналізу сил, які будуть діяти на неї з боку рухомого сипучого середовища.

Так, з боку рухомого сипучого середовища будуть діяти сили, обумовлені компонентами напружень на поверхні контакту відповідно до рівнянь рівноваги на поверхні (1.2) в яких компоненти напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  повинні бути замінені

$$\sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k = \bar{X}; \sigma_{yd} m_k + \tau_{yzd} n_k + \tau_{xyd} l_k = \bar{Y}; \sigma_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k = \bar{Z}. (2.13)$$

З огляду на вищевикладене, можна скласти рівняння сил, що діють на конкреції з урахуванням сил тяжкості, в наступному вигляді для кожного з можливих напрямків:

на  $\sigma_{xd}, \sigma_{yd}, \sigma_{zd}, \tau_{xyd}, \tau_{xzd}, \tau_{yzd}$  із рівняння (2.10), а величиною  $l, m, n$  – на  $l_k, m_k, n_k$  із рівняння (1.17) [3]. Крім того, конкреція буде схильна до дії сил сухого тертя рухомого сипучого середовища і дії масових сил. У цьому випадку можливі напрямки переміщень конкрецій будуть визначатися співвідношенням величин  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  для певного положення конкреції в ємності в системі координат  $x_{yz}$  (рівняння рівноваги на поверхні контакту конкреції із середовищем):

– в напрямку осі  $ox$  рушійна сила визначиться наступним чином (інтегральні вислови є поверхневі інтеграли першого роду):

$$FM_{dx} = \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\xi \leq 0} d\eta d\zeta + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\xi \leq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\xi \leq 0} d\eta d\xi + M_k g \right) tg[\varphi_3] \right) -$$

$$- \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\xi \geq 0} d\eta d\zeta + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\xi \geq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\xi \geq 0} d\eta d\xi + M_k g \right) tg[\varphi_3] \right) (2.14)$$

в напрямку осі  $oy$ :

$$FM_{dy} = \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\eta \leq 0} d\xi d\zeta + M_k g + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\eta \leq 0} d\eta d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\eta \leq 0} d\eta d\xi \right) tg[\varphi_3] \right) -$$

$$- \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\eta \geq 0} d\xi d\zeta + M_k g + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\eta \geq 0} d\eta d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\eta \geq 0} d\eta d\xi \right) tg[\varphi_3] \right) (2.15)$$

в напрямку осі  $oz$ :



$$FM_{dz} = \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\zeta \leq 0} d\eta d\xi + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\zeta \leq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\zeta \leq 0} d\eta d\zeta + M_k g \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \right) - \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\zeta \geq 0} d\eta d\xi + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\zeta \geq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\zeta \geq 0} d\eta d\zeta + M_k g \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \right) \quad (2.16)$$

Таким чином, рівняння (2.14), (2.15), (2.16) з урахуванням (2.13) визначають можливі переміщення конкреції у сипучому середовищі, яка знаходиться у контейнері при додатку до контейнера збурень у вигляді кінематичних збурень, у залежності від режимів прикладених збурень, геометричних форм і розмірів контейнера, форми, розмірів і властивостей конкреції, а також механічних властивостей сипучого середовища.

**Висновки.** На підставі висновку рівнянь статички сипучого середовища та конкрецій, які в ній знаходяться, як функцій механічних властивостей конкреції і сипучого середовища, геометричних розмірів контейнера і конкреції, а також доданих до контейнера збурень у вигляді кінематичних величин як лінійних, так і кутових, отримані:

- рівняння для визначення компонентів швидкостей переміщень обсягів сипучого середовища для довільної точки обсягу контейнера;

- рівняння для визначення змін щільності сипучого середовища для довільної точки обсягу контейнера;

- рівняння для визначення можливих лінійних і кутових переміщень у довільних точках обсягу контейнера і у пристінкових шарах сипучого середовища, тобто при наявності початкової контактної взаємодії конкреція - стінка контейнера.

Отримані рівняння вимагають застосування чисельних методів їх вирішення із застосуванням методів кінцевих елементів (FEM) або кінцевих обсягів (DEM).

### Список використаних джерел

1. Blekhman L.I. Surface and volumetric effects in a fluid subjected to high-frequency vibration / L.I. Blekhman, L.I. Blekhman, V.S. Sorokin, V.B. Vasilkov, K.S. Yakimova // Journal of Mechanical Engineering Science. – London, 2012. – vol. 226 (№8). PP. 2028-2043. doi: 10.1177/0954406211433260.

2. Ярошевич Н.П. К вопросу о динамической синхронизации агрегатированных вибровозбудителей в трёхмассной четырёхвibratorной вибративной мельнице / Н.П. Ярошевич, Е.В.

Солоная, П.Д. Денисов // Вибрации в технике и технологиях. – 2003. – №6(32). – С. 77-81.

3. Солоня О.В. Статика взаємодії абсолютно твердих тіл із сипучим середовищем / О.В. Солоня // Вибрації у техніці та технологіях. – №3 (90). – 2018. – С. 105-116.

4. Вайсберг Л.А. Механика сыпучих сред при вибрационных воздействиях: методы описания и математического моделирования / Л.А. Вайсберг, И.В. Демидов, К.С. Иванов // Обогащение руд. Санкт-Петербург, 2015. – №4. – С. 21-31.

5. Солоня О.В. Про спрощення критерію вигляду напружено-деформованого стану суцільного середовища / О.В. Солоня, В.П. Ковбаса, О.В. Цуркан, А.В. Спірін Всеукраїнський науково-технічний журнал «Техніка, енергетика, транспорт АПК. – №1(100) Том 1. – 2018. – С. 44-49

6. Блехман Л.И. Вибрационное взвешивание твердых тел в жидкости и сыпучей среде / Л.И. Блехман // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь, Россия, 2013. – №2. – С.52-83. doi: 10.15593/pern.mech.

7. Науменко Ю.В. Рекомендації до розрахунку, проектування та експлуатації барабанних млинів багатостадійного подрібнення / Ю.В. Науменко. – Рівне: СПВ Зелент О.І., 2009. – 88 с.

8. Ковбаса В.П. Розподіл напружень у сипкому середовищі, обмеженому стінками споруди силосного типу / В.П. Ковбаса, В.В. Ярошенко // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – Кіровоград, 2010. – вип. 40.– ч. 1. – С. 314-324.

9. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.: Изд.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 244 с. 6. Дженике Э.В. Складирование и выпуск сыпучих материалов / Э.В. Дженике. – М.: Изд. Мир, 1968. – 164 с.

10. Ковбаса В.П. До визначення фізичних рівнянь пружно в'язко-пластичного середовища з умовою руйнування за модифікованим критерієм Кулона-Мора // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип.11. – т.2. – С.





161-174.

www.nbu.gov.ua/portal/Chem\_Biol/Ptdau/2011\_1\_1\_2/index.html

11. Ярошенко Л.В. Керований дебалансний вібробудувач для автоматизованих вібраційних машин / Л.В. Ярошенко, Р.В. Чубик, Н.В. Зрайло // Техніка енергетика транспорт АПК. – 2017. – № 2 (97). – С. 123-128.

12. Yanovich, V.P. Theoretical studies of energy parameters of vibration-disk crusher starch containing substance / V.P. Yanovich, I.M. Kupchuk, O.S. Kovalchuk // S World Journal. – 2016. – vol. 1. – P. 17-25.

13. Ковбаса В.П. Механіка сільськогосподарських матеріалів і середовищ: навч. посібник / В.П. Ковбаса, В.М. Швайко, О.П. Гуцол. – Київ-Ніжин, 2015. – 536 с.

14. Кулен А. Современная земледельческая механика / А. Кулен, Х. Куиперс. – М.: Агропромиздат, 1986. – 349 с.

15. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел / Г.К. Клейн. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с. 13. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов / Р.Л. Зенков. – М.: Гос. НТИ машиностроительной литературы, 1952. – 217 с.

16. Кушнарєв А.С. Механико-технологические основы процесса воздействия рабочих органов почвообрабатывающих машин и орудий на почву: дис. докт. техн. наук : спец. 05.20.01 / Артур Сергеевич Кушнарєв. – Мелитополь, 1980. – 329 с.

17. Калетнік Г.М. Складові розвитку сільських територій та моделі аграрного підприємництва і кооперації / Г.М. Калетнік, І.В. Гончарук// Розвиток малого і середнього підприємництва та кооперації на селі. Проблеми та перспективи: зб. матеріалів наук. конф. І навч.-практ. Семінару. – Вінниця, 2015. – С. 5-17.

18. Солоня О.В. Вібраційні млини з просторово-циркуляційним рухом завантаження для тонкого помолу сипучих матеріалів. Монографія – Вінниця: РВВ ВДАУ, 2008 – 133 с

### References

1. Blekhman, I.I., Blekhman L.I., Sorokin, V.S., Vasilkov, V.B., & Yakimova K.S. (2012) Surface and volumetric effects in a fluid subjected to high-frequency vibration. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8, 2028-2043 [in English].

2. Yaroshevych N.P., Solonaya E.V., & Denysov P.D. (2003) K voprosu o dynamicheskoy synkhronizatsii v agregatirovannykh vybrovobudytel'nykh v trekhmassnoy cheturexvybratornoy vybratsionnoy melnyce [On the issue of dynamic synchronization of aggregated vibration exciters in a three-mass four-vibration vibration mill]. *Vibratsiyy v tekhnici ta tekhnologiyah – Vibration in engineering and technology*, 6 (32), 77-81 [in Russian].

3. Solona O.V. (2018) Statyka vzaiemodii absolutno tverdykh til iz sypuchym seredovysychem [Static of interaction of absolutely solids with a loose medium]. *Vibratsiyy v tekhnici ta tekhnologiyah – Vibration in engineering and technology*, 3 (90), 105-116 [in Ukrainian].

4. Vaisberh L.A., Demydov Y.V., & Yvanov K.S. (2015) Mekhanyka supuchykh sred pry vybratsyonnykh vozdeistviyakh: metodu opysaniya y matematycheskoho modelyrovaniya [Mechanics of flowing media under vibration effects: methods of description and mathematical modeling]. *Obohashchenye rud – Ore dressing*, 4, 21-31 [in Russian].

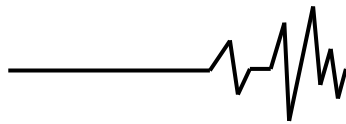
5. Solona O.V., Kovbasa V.P., Tsurkan O.V., & Spirin A.V. (2018) Pro sproshchennia kryteriiu vyhliadu napruzhenno-deformovanoho stanu sutsilnoho seredovysycha [About sproshchennia kritiriyu viglyadu tensely-deformed to the camp of the central unit]. *Tekhnika enerhetyka transport APK – Technology, energy, transport in the agro-industrial complex*, 1 (100), 44-49 [in Ukrainian].

6. Blekhman L.I. (2013) Vybratsyonnoe vzveshyvanye tverdukh tel v zhydkosti y supuchei srede [Vibration weighing of solids in a liquid and bulk medium]. *Vestnyk PNYPU. Mekhanyka. – Bulletin PNRPU. Mechanics*, 2, 52-83 [in Russian].

7. Naumenko, Yu.V. (2009) Rekomendatsii do rozrakhunku, proektuvannia ta ekspluatatsii barabannykh mlynyn bahatostadiinoho podribnennia [Recommendations for the calculation, design and operation of multi-stage grinding drum mills]. *Rivne: SPV Zelent O.I.* [in Ukrainian].

8. Kovbasa, V.P. & Yaroshenko, V.V. (2010) Rozpodil napruzhen u sypkomu seredovysychi, obmezhenomu stinkamy sporudy sylosnogo typu [Distribution of stresses in the loose medium, bounded by the walls of a silo-type structure]. *Konstruiuvannia, vyrobnytstvo ta ekspluatatsiia silskohospodarskykh mashyn – Design, manufacture and operation of agricultural machinery*, 40, 314-324 [in Ukrainian].

9. Sokolovskiy, V.V. (1960) Statyka sypuchei sredey [Static of the granular medium]. *Moscow: FIZMATLIT* [in Russian]. Dzhenyke, E.V. (1968) Skladyrovanye y vypusk sypuchykh materyalov [Warehousing and production of bulk materials]. *Moscow: Mir* [in Russian].



10. Kovbasa, V.P. (2011) Do vyznachennia fizychnykh rivnian pruzhno v'iazkoplasychnoho seredovyscha z umovoju ruinovannia za modyfikovanim kryteriiem Kulona-Mora [Before the designation of fizychnykh rivnyan spring-loaded viscous-plastic medium, with the mind of ruinovnaya for modifying the criterion of Coulomb-Mora]. *Pratsi TDATU. – Melitopol – The work of TDATU. – Melitopol*, 11, 161-174 [in Ukrainian].

11. Yaroshenko, L.V., Chubyk, R.V., & Zrailo, N.V. (2017) Kerovanyi debalansnyi vibrozbudzhuvach dlia avtomatyzovanykh vibratsiinykh mashyn [Managed unbalance vibroexciter for automated vibration machines]. *Tekhnika enerhetyka transport APK – Technology, energy, transport in the agro-industrial complex*, 2(97), 123-128 [in Ukrainian].

12. Yanovich, V.P., & Kupchuk, I.M., & Kovalchuk O.S. (2016) Theoretical studies of energy parameters of vibration-disk crusher starch containing substance. *SWorldJournal*, 11, 17-25 [in English].

13. Kovbasa, V.P., Shvayko, V.M., & Gutsol O.P. (2015) Mehanika silskogospodarskykh materlialiv i seredovisch [Mechanics of agricultural materials and media] *Kiyiv-Nizhin* [in Ukrainian].

14. Kulen, A., & Kuypers, Kh. (1986) Sovremennaia zemledelcheskaia mekhanyka [Modern agricultural mechanics]. *Moscow: Ahropromyzzdat* [in Russian].

15. Klein, H.K. (1977) Stroytelnaia mekhanyka sypuchykh tel [Building mechanics of loose bodies]. *Moscow: Stroyzzdat* [in Russian].

16. Kushnarev A.S. (1980) Mekhanykotekhnolohycheskye osnovy protsessa vozdeistviya rabochykh orhanov pochvoobrabatyvaiushchykh mashyn y orudyi na pochvu [Mechanotechnological foundations of the process of impact of working organs of tillage machines and tools on soil] *Doctor's thesis. Melytopol* [in Russian].

17. Kaletnik H.M., Honcharuk I.V. (2015) Skladovi rozvytku silskykh terytorii ta modeli aharnoho pidpriemnytstva i kooperatsii [Components of rural areas development and models of agrarian entrepreneurship and cooperation] *Rozvytok maloho i serednoho pidpriemnytstva ta kooperatsii na seli*, 5-17 [in Ukrainian].

18. Solona, O.V. (2008) Vibratsiini mlynny z prostorovo-tsyrukulatsiinyim rukhom zavantazhennia dlia tonkoho pomelu sypuchykh materialiv [Vibrating mills with a space-circulation feed motion for fine grinding of materials]. *Vinnytsia: RVV VDLU* [in Ukrainian].

Данная часть статьи является продолжением первой части одноименной статьи. В этой части выведены уравнения граничных условий, в качестве которых выступают приложенные к стенкам контейнера перемещения. Получена система гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Она позволяет совместно с приведенными в части 1 статическими уравнениями получить значения компонент скоростей перемещений сыпучей среды в контейнере, а также изменения ее плотности в зависимости от механических свойств среды и кинематических режимов приложенных перемещений.

Численное решение данной системы уравнений позволяет последовательно решить выведенные в статье уравнения об определении компонент напряжений как в пристеночных слоях, так и в условиях отсутствия воздействия стенок контейнера.

На основании полученных таким образом решений приведены уравнения, которые позволяют определить возможные линейные и угловые перемещения конкреций в пристеночных слоях при контактном взаимодействии конкреции со стенкой, а также в условиях отсутствия контактных взаимодействий с учетом динамического воздействия движущейся сыпучей среды. Эти функции получены для наиболее общих случаев, которые предполагают учет механических свойств сыпучей среды, геометрических размеров, форм и механических свойств конкреций и стенок контейнера, а также кинематических режимов воздействий, приложенных к стенкам контейнера.

Полученные уравнения являются исходными для численного решения задач о перемещениях, изменениях плотности сыпучей среды, а также возможных линейных и угловых перемещениях конкреций, которые находятся в среде.

Используя методы конечных элементов (FEM) или конечных объемов (DEM), можно получить окончательные решения полученных уравнений. Эти уравнения позволяют определить кинематические режимы прилагаемых кинематических воздействий с целью получения необходимых изменений плотности и возможных перемещений объемов сыпучей среды, а также необходимых перемещений и скоростей этих перемещений конкреций, которые находятся в движущейся сыпучей среде.

**Ключевые слова:** сыпучая дискретная среда, контейнер, линейные и угловые перемещения, компоненты скоростей

#### СТАТИКА И ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ КОНКРЕЦИЙ С СЫПУЧЕЙ СРЕДОЙ



перемещений, компоненты динамических напряжений, силовые воздействия.

### STATICS AND DYNAMICS OF INTERACTION OF SOLID CONCRETIONS WITH GRANULAR MEDIUM

This part of the article is a continuation of the first part of the article of the same name. The equations of boundary conditions, which are the displacements applied to the walls of the container are derived in this part. A system of hyperbolic equations with variable coefficients is obtained. It allows, together with the static equations given in Part 1, to obtain the values of the velocity components of the displacements of granular media in the container, as well as changes in its density, depending on the medium mechanical properties and the kinematic regimes of the applied displacements.

The numerical solution of this system of equations allows one to solve successively the equations on the determination of stress components both in the wall layers and in the absence of the action of the walls of the container.

The equations are given that allow us to determine the possible linear and angular displacements of concretions in the wall layers during the contact interaction of the concretion with the wall, and also in the absence of contact

interactions taking into account the dynamic effect of the granular medium, that is moving. These functions are obtained for the most general cases, which include the granular medium's mechanical properties, the geometric dimensions, shapes and mechanical properties of the concretions and walls of the container, and the kinematic regimes of the impacts applied to the walls of the container.

The equations obtained are the initial ones for the numerical solution of the problems of displacements, changes in the density of the granular medium, and the possible linear and angular displacements of concretions that are in the medium.

Using finite elements method (FEM) or finite volumes method (DEM) it is possible to obtain final solutions of the equations. These equations make it possible to determine the kinematic regimes of the applied kinematic effects in order to obtain the necessary density changes and possible displacements of granular media, as well as the necessary displacements and velocities of these displacements concretions, which are in a moving granular medium.

**Key words:** granular discrete medium, container, linear and angular displacements, displacement velocity components, dynamic stress components, force effects.

#### Відомості про авторів

**Солона Олена Василівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри загально технічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: solona\_o\_v@ukr.net).

**Солона Елена Васильевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: solona\_o\_v@ukr.net).

**Solona Olena** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection, Vinnytsia National Agrarian University (3, Solnyschaya St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: solona\_o\_v@ukr.net).

**Ковбаса Володимир Петрович** – доктор технічних наук, професор кафедри загально технічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: kovbasav@ukr.net).

**Колбаса Владимир Петрович** – доктор технических наук, профессор кафедры общетехнических дисциплин и охраны труда Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: kovbasav@ukr.net).

**Kovbasa Vladimir Petrovich** – Doctor of technical sciences, Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection, Vinnytsia National Agrarian University (3, Solnyschaya St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: kovbasav@ukr.net).