

**Цуркан О.В.**

д.т.н., професор

Спирін А.В.

к.т.н., доцент

Гудзенко Н.М.

к.е.н., доцент

*Відокремлений
структурний підрозділ
«Ладжинський фаховий
коледж ВНАУ»*

Дідик А.М.

Аспірант

*Вінницький національний
аграрний університет*

Tsurkan O.Doctor of Technical Sciences,
Professor**Spirin A.**Ph.D. of Engineering, Associate
Professor**Gudzenko N.**Candidate of Economic Sciences,
Associate

*Separated structural unit
«Ladyzhyn Professional
College of Vinnytsia
National Agrarian*

Didyk A.

postgraduate student

*Vinnytsia National Agrarian
University*

УДК: 66.047.45**DOI: 10.37128/2306-8744-2024-4-1**

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ВОЛОСЬКИХ ГОРІХІВ В КОНВЕКТИВНО-ВІБРАЦІЙНІЙ СУШАРЦІ

Отримання волоських горіхів високої якості має обов'язково передбачати їх сушіння до кондиційної вологості 10%. Для досягнення цієї мети застосовують сушарки різних типів і конструкцій, але найбільше розповсюдження отримали конвективні сушарки з різноманітними модернізаціями для інтенсифікації процесу сушіння. Для реалізації процесу сушіння з максимальною можливою ефективністю потрібно знання закономірностей перебігу подій що відбуваються всередині сушильного обладнання, тобто за якими законами відбувається взаємодія сушильного агенту і матеріалу. Простіше кажучи, потрібно отримати математичну модель процесу сушіння волоських горіхів в конвективно-вібраційній сушарці. Аналіз останніх досліджень і публікацій свідчить про те що незважаючи на значну різноманітність заходів і засобів для реалізації процесу конвективного сушіння, всі вони одним з етапів дослідження мають розробку математичної моделі процесу. В більшості випадків математична модель описує взаємодію сушильного агенту та матеріалу що сушиться. Перед початком роботи по створенню математичної моделі сушіння були зроблені деякі припущення, в тому числі про постійність теплофізичних характеристик та коефіцієнту теплообміну під час всього процесу сушіння. Для адекватного опису зміни кількості вологи в матеріалі було застосовано поняття негативних внутрішніх джерел тепла яке еквівалентне поточній вологості матеріалу і залежить від його початкової вологості і режимних параметрів процесу. Рішення рівняння нестационарної теплопровідності було проведено аналітично операційним методом. Вирішення рівняння нестационарного процесу теплопровідності з урахуванням експотенційної зміни інтенсивності негативних внутрішніх джерел тепла в часі дало змогу отримати рівняння за яким можна визначити температуру матеріалу в довільній точці об'єму горіха в залежності від експозиції сушіння. Отримане рівняння дає змогу адекватного моделювання процесу сушіння волоських горіхів в конвективно-вібраційній сушарці та контролювати зміну температури матеріалу для забезпечення високої якості кінцевого продукту.

Ключові слова: температура, вологість, внутрішні джерела тепла, критерій подібності, нестационарна теплопровідність, граничні умови.

Постановка проблеми. Практично вся технологічних операцій. Серед цих операцій саме вирощена продукція рослинництва підлягає сушіння є найбільш важливою з точки зору якості післязбиральній обробці яка включає ряд переробленої та збереженої продукції, а також



найбільш енергозатратною серед всіх інших технологічних процесів та операцій. При переробці деякої продукції на операцію сушіння затрачується практично половина всієї потрібної для переробки енергії. Це стосується і процесу післязбиральної переробки волоських горіхів. Адже в більшості випадків із саду на стаціонар для переробки горіх поступає вологістю 35-45%, а в результаті переробки його вологість повинна досягти кондиційного значення 10% [1]. При промислових об'ємах виробництва волоських горіхів для успішної реалізації процесу сушіння потрібно використовувати високопродуктивні енергоефективні сушарки. Потрібно зауважити що сучасні сушарки сільськогосподарського призначення витрачають на випаровування 1 кг вологи 5-6 МДж енергії, що в 6-7 разів більше ніж це потрібно «ідеальній» сушарці [2]. Для успішного вирішення цієї проблеми потрібно інтенсифікувати роботу сушарок. Існує цілий ряд заходів та засобів які частково вирішують цю проблему для окремих випадків сушіння різноманітних матеріалів на сушарках визначеного типу і конструкції. Але всі ці окремі випадки потребують знання закономірностей процесів що відбуваються всередині сушильного обладнання, тобто за якими законами відбувається взаємодія сушильного агенту і матеріалу. Простіше кажучи, потрібно отримати математичну модель процесу, адже найпростіше визначення математичної моделі - система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

Для енергоефективного процесу сушіння волоських горіхів потрібно отримати математичну модель яка буде описувати взаємодію сушильного агенту і горіха. Це і є основною метою даної статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Процес сушіння різноманітної продукції реалізується на сушильних установках різноманітного призначення і конструкції. Існує досить значна кількість конструкцій сучасних сушарок, і значна кількість ознак для їх класифікації. Основним з них є спосіб підводу теплової енергії від джерела тепла до матеріалу що висушується. Адже тільки основних способів передачі теплової енергії існує три, а якщо врахувати ще й комбіновані способи – то взагалі аж сім. Але найбільшого розповсюдження, особливо в сільському господарстві, набули конвективні сушарки. Досить детальний огляд та класифікацію конвективних сушарок сільськогосподарського призначення (з перевагами та недоліками) наведено в роботі [3]. Строго кажучи, в цій праці не розроблена математична модель роботи сушарки, але ми включили її в наш огляд завдяки детальному опису роботи саме конвективних сушарок.

Спроба створити математичну модель роботи сушарки волоських горіхів, та на її основі обґрунтувати конструктивно-технологічну схему бункерної сушарки з вертикальним гвинтовим робочим органом для зменшення щільності шару горіхів, зроблена в праці [4]. В статті також запропоновано здійснювати підвід теплоносія в нижню частину сушарки. На нашу думку, запропонований гвинтовий робочий орган не зможе кардинально вирішити проблему інтенсифікації процесу сушіння через локальну дію лише на незначну частину горіхів, які знаходяться в бункері.

В статті [5] здійснено створення математичної моделі роботи конвективної сушарки барабанного типу. Разом із шахтними сушарками вони створюють основу для сушіння зернових продуктів, тобто ці сушарки переробляють найбільшу кількість сільськогосподарської продукції. Відмічено що вирішення задач оптимізації щодо продуктивності і енергозатрат барабанних агрегатів можливе лише за наявності адекватної математичної моделі процесів тепло- і масообміну з урахуванням визначальних параметрів процесу. Як практично для всіх конвективних сушарок цими визначальними параметрами є температура і швидкість сушильного агенту, а також коефіцієнт теплообміну між теплоносієм та матеріалом.

При створенні математичних моделей сушіння практично неможливо врахувати всі особливості процесу. Тому доводиться вдаватися до деяких припущень. В статті [6] наведений ряд таких припущень що робляться перед початком роботи по створенню математичної моделі процесу сушіння. Автор рекомендує приймати наступні припущення: - усі види теплопередачі враховуються коефіцієнтом теплообміну, величина якого усереднюється між початковими і кінцевими значеннями; - теплофізичні характеристики матеріалу і сушильного агенту в процесі незмінні і дорівнюють середнім значенням; - коефіцієнт сушіння залежить лише від параметрів сушильного агенту і в розрахунках апроксимується лінійними залежностями. Звичайно, це думка автора щодо процесу сушіння в даних умовах, і ці рекомендації не можуть мати характеру абсолютної істини. В кожному конкретному випадку дослідник сам вибирає припущення, виходячи з існуючих умов.

Роботи [7,8] присвячені дослідженню процесів сушіння рухомого шару матеріалу. В цьому випадку дослідники мали справу з так званими (за їх власною назвою) розподіленими параметрами, тобто в цьому випадку деякі параметри матеріалу змінюються не тільки в часі, а й в просторі. Наприклад, в [7] розглядається процес сушіння шару зерна на конвеєрній сушарці, і такий параметр як температура



матеріалу залежить від експозиції сушіння та координати яка характеризує довжину сушарки.

В статті [9] розглядається приклад комбінованої конвективно-радіаційної сушки. Це один з прикладів варіативного підходу до проблеми сушіння сільськогосподарської продукції. Ще одна відмінна риса даної роботи – застосування вібраційного впливу на матеріал для інтенсифікації процесу сушіння.

Статті [10,11,12] ми включаємо в огляд останніх досліджень і публікацій ще й тому, що, з однієї сторони, вони присвячені саме моделюванню процесів сушіння, а, з іншої сторони, вони досить різнопланові, тому що описують сушіння різних матеріалів і на конвективних сушарках різних конструкцій. Саме ця їхня різноманітність підкреслює одну закономірність – дослідження процесів сушіння всіх матеріалів починається з розробки математичної моделі процесу, де, як правило, математичним апаратом описується взаємодія сушильного агенту і матеріалу.

Стаття [13] окрім наукової цінності підтверджує той факт що автори вже давно досліджують процеси сушіння різних сільськогосподарських культур на конвективно-вібраційних сушарках. Вібраційний вплив на шар матеріалу зменшує його аеродинамічний опір, викликає турбулізацію граничного шару між сушильним агентом і матеріалом, зменшує площу контакту між окремими елементами шару матеріалу. Все це значно підвищує інтенсивність теплообміну між теплоносієм і матеріалом, зменшує енергозатрати на реалізацію процесу сушіння.

Аналіз останніх досліджень і публікацій свідчить про те що незважаючи на значну різноманітність заходів і засобів для реалізації процесу конвективного сушіння, всі вони одним з етапів дослідження мають розробку математичної моделі процесу. В більшості випадків математична модель описує взаємодію сушильного агенту та матеріалу що сушиться.

Розробці математичної моделі сушіння волоських горіхів на вібраційно-конвективній сушарці і присвячена дана стаття.

Мета роботи. Метою роботи є підвищення ефективності проведення процесу сушіння волоських горіхів на конвективно-вібраційній сушарці шляхом розробки математичної моделі процесу на основі якої будуть обґрунтовані раціональні технологічні параметри його реалізації.

Результати досліджень. Для сушіння волоських горіхів в промислових обсягах автори планують використовувати конвективно-вібраційну сушарку. В зв'язку з обмеженням об'ємом даної статті автори не приводять детальний опис і конструктивні особливості даної сушарки. Ці питання були раніше детально

викладені в декількох статтях авторів, зокрема в [14]. Тому в даній статті ми зупинимось на питанні розробки математичної моделі процесу сушіння волоських горіхів в розрізі взаємодії теплоносія (нагріте повітря) і матеріалу (шар волоських горіхів).

При реалізації процесу сушіння волоських горіхів важливе значення має раціональний вибір режимних параметрів, зокрема експозиції сушіння, температури та швидкості сушильного агенту, а у випадку використання конвективно-вібраційної сушарки – величини вібраційного впливу на сушильну камеру і, відповідно, на шар матеріалу в ній. Ці фактори впливають як на інтенсивність процесу сушіння, тобто його енергоефективність, так і на якість готового продукту. Кожен з цих факторів має специфічні особливості впливу на перебіг протікання процесу сушіння, але для волоського горіху найбільш важливим є температура сушильного агенту. Адже волоські горіхи багаті на олії, які при високих температурах стають прогірклими і негативно впливають на смак. Тому для горіхів раціональною є температура ядра близько 20°C, і ні в якому разі вона не може перевищувати 28°C [15]. Звичайно, це рекомендації для температури ядра горіха, температура шкаралупи і самого теплоносія може бути більшою.

Температура сушильного агенту є одним із факторів інтенсифікації процесу сушіння волоських горіхів, тобто чим вона вище, тим більш ефективно відбувається процес. Окрім того, саме температура теплоносія є тим параметром який регулюється найбільш просто. Але у зв'язку з термолабільністю горіхів температуру теплоносія не можна безконтрольно збільшувати. Наша математична модель має показувати температуру ядра горіха влюбій його точці в залежності від температури теплоносія та інших факторів які характеризують перебіг протікання процесу сушіння.

Для визначення раціональних параметрів процесу сушіння потрібно перш за все знати розподіл температури матеріалу в просторі і часі. Для цього потрібно вирішити рівняння нестационарної теплопровідності з відповідними початковими і граничними умовами.

В загальному вигляді нестационарне рівняння теплопровідності має вигляд [16]:

$$\frac{dt}{dr} = a \left(\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{\Gamma}{r} \cdot \frac{dt}{dr} \right) \mp \frac{q_v}{c \cdot \rho} \quad (1)$$

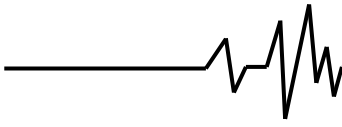
де – поточна координата;

a – коефіцієнт температуропровідності;

Γ – число, яке характеризує форму матеріалу: для пластини $\Gamma=0$; для циліндра $\Gamma=1$; для кулі $\Gamma=2$;

c – теплопровідність матеріалу;

ρ – щільність матеріалу;



q_v – інтенсивність внутрішніх джерел тепла.

В одному із джерел огляду останніх публікацій вказувалось що при створенні математичної моделі потрібно приймати певні допущення щодо деяких параметрів. Приймаємо перше допущення: форма горіха це сфера в сфері. Зовнішня сфера (з більшим діаметром) – це шкаралупа, відповідно внутрішня сфера – це ядро горіха. Це означає що в рівнянні (1) для нашого випадку буде $\Gamma = 2$

В реальних сушильних установках, часто використовуються системи з джерелами тепла. Джерела тепла можуть бути локалізованими або рівномірно розподілятися в середині об'єму тіла. При дослідженні переносу теплоти в таких випадках важливо знати інтенсивність об'ємного виділення (поглинання) теплоти, яка кількісно характеризується потужністю внутрішніх джерел теплоти q_v , Вт/м³. Якщо величина q_v додатна, кажуть, що в тілі є додатні джерела теплоти. Від'ємні значення q_v означають, що мають місце від'ємні джерела (стоки) теплоти.

В рівнянні (1) перед виразом $\frac{q_v}{c\rho}$ стоїть знак \mp . Знак + означає що в системі наявні позитивні джерела тепла, тобто при протіканні процесу теплообміну в системі виділяється додаткова теплота. Це може мати місце, наприклад, при протіканні хімічних реакцій з виділенням теплоти.

Під час процесу сушіння теплова енергія яка поступає до матеріалу від сушильного агенту, витрачається на прогрів сухої частини матеріалу (так званий скелет матеріалу), вологи та її випаровування. В ряді досліджень, наприклад [17], ця теплота класифікується як від'ємне (негативне) внутрішнє джерело тепла і відмічається що інтенсивність цього джерела зменшується в часі за законом експоненти.

Отже, це одне допущення: можна сказати що в процесі сушіння функціонує від'ємне джерело теплоти з інтенсивністю

$$q = q_0 \cdot \exp(-k_1\tau) \quad (2),$$

де q_0 – інтенсивність негативного внутрішнього джерела теплоти в момент часу $\tau = 0$;

τ – експозиція сушіння;

k_1 – емпіричний коефіцієнт який характеризує швидкість зміни інтенсивності від'ємного внутрішнього джерела тепла.

Коефіцієнт k_1 залежить від декількох факторів, зокрема від теплофізичних властивостей матеріалу, режимних параметрів процесу, серед яких найбільш значущими є температура і швидкість сушильного агенту, а також параметри вібраційного впливу на шар матеріалу. Обсяг даної статті не дозволяє

більш детально зупинитись на методичних засадах визначення даного коефіцієнту, це буде зроблено в подальших публікаціях.

При дослідженні процесу сушіння потрібно зважати що температура сушильного агенту завжди більше температури матеріалу. Різниця між цими температурами максимальна на початку процесу і зменшується з часом. Наші попередні досліді, а також дослідження інших авторів [18, 19] дозволили встановити що різниця між температурою сушильного агенту і температурою матеріалу в момент часу τ можна виразити так:

$$\Delta t_\tau = (t_0 - \vartheta_0) \exp(-k_2\tau) \quad (3)$$

де Δt_τ – різниця температури сушильного агенту і матеріалу в момент часу τ ;

t_0 – температура сушильного агенту в момент часу $\tau = 0$;

ϑ_0 – температура матеріалу в момент часу $\tau = 0$;

τ – експозиція процесу сушіння;

k_2 – емпіричний коефіцієнт що характеризує швидкість нагріву матеріалу.

Коефіцієнт k_2 характеризує швидкість нагріву матеріалу. Чим більше його значення, тим швидше нагрівається матеріал, і навпаки. Цей коефіцієнт залежить від властивостей матеріалу (форма зв'язку вологи з матеріалом, його фізико-механічні та теплофізичні характеристики) і параметрів процесу. Коефіцієнт k_2 визначається в результаті експериментальних досліджень.

Параметри процесу сушіння залежать від багатьох факторів, в тому числі геометричних характеристик матеріалу, тобто його розмірів і форми. Волоський горіх можна розглядати як кулю, але не звичайну, а складену як куля в кулі, де зовнішня куля – це шкаралупа радіусом R і внутрішня куля – це ядро радіусом r_1 . В подальшому ми будемо використовувати співвідношення цих радіусів. За даними морфологічних досліджень для більшості сортів волоських горіхів воно становить :

$$r^* = \frac{r_1}{R} = 0,9 \quad (4)$$

Для отримання продукту високої якості після проходження горіхом процесу сушіння, необхідно щоб температура ядра горіха не перевищувала гранично допустиму температуру t_{mp} . Як ми уже відмічали, для більшості сортів волоських горіхів ця величина становить 28-30°C.

Тому з цієї точки зору нас цікавить розподіл температури горіха в часі і просторі на протязі всього процесу сушіння.

Вихідними виразами для вирішення поставленого завдання, тобто знаходження



розподілу температури в горіхові по радіусу і по часу є наступні умови.

Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right] - \frac{q_0}{c\gamma} \exp(-k_1 \tau) \quad (5)$$

Початкова умова:

$$\vartheta(r, 0) = \vartheta_0 \quad (6)$$

Гранична умова:

$$\left[\frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial r} \right]_{r=R} = H(t_0 - \vartheta_0) \exp(-k_2 \tau) \quad (7)$$

Умова симетрії:

$$\left[\frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial r} \right]_{r=0} = 0 \quad (8)$$

В цих рівняннях прийняті наступні позначення:

$\vartheta(r, \tau)$ – температура ядра горіха у будь-якій точці на радіусі r в момент часу τ ;

a, c, γ – відповідно температуропровідність, теплоємність і щільність матеріалу;

$H = \frac{\alpha}{\lambda}$, де α – коефіцієнт теплообміну між матеріалом і сушильним агентом;

λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу.

Рівняння (7) визначає особливості протікання процесу на границях тіла, тобто граничні умови. Взагалі в теорії теплопередачі розрізняють чотири види (їх частіше називають родами) граничних умов. В нашому випадку це граничні умови третього роду, вони полягають у заданні температури навколишнього середовища (тобто температури сушильного агента) та інтенсивності теплообміну на поверхні тіла.

Рішення рівняння (5) будемо вести операційним методом при наступних припущеннях.

Теплофізичні характеристики матеріалу будемо вважати постійними весь час протікання процесу сушіння. Звичайно, вони залежать від вологості матеріалу та температури, але ці параметри в нашому випадку змінюються в доволі вузьких межах, тому з певним допущенням будемо вважати теплофізичні характеристики матеріалу постійними. Також приймемо припущення що коефіцієнт теплообміну між матеріалом та сушильним агентом лишається постійним протягом всього часу процесу сушіння. Коефіцієнт теплообміну також залежить від температури сушильного агента і матеріалу, але діапазон зміни температур досить незначний, і тому без значної похибки в

результатах можна прийняти припущення про постійність коефіцієнта теплообміну.

Декілька слів про операційний метод вирішення диференціальних рівнянь. Прочитуємо, для прикладу, перший абзац роботи [20].

Ідея операційного числення полягає в тому, що між функцією $f(t)$ дійсної змінної t (функцією – оригіналом) і функцією $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$ функцією - зображенням) встановлюється відповідність, яка дозволяє операції диференціювання та інтегрування над оригіналом $f(t)$ замінити алгебраїчними операціями над зображенням $F(p)$.

В нашому випадку оригіналом буде функція $\vartheta(r, \tau)$ яка характеризує розподіл температури в ядрі горіха за місцем і часом, а функцію-зображення позначимо $\theta(r, s)$. Між функціями оригіналом і зображенням буде існувати залежність:

$$\theta(r, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \vartheta(r, \tau) d\tau \quad (9)$$

Рівняння (5) для зображення $\theta(r, s)$ згідно перетворення Лапласа буде:

$$s\theta(r, s) - \vartheta_0 = a \left[\frac{d^2 \theta(r, s)}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\theta(r, s)}{dr} \right] - \frac{q_0}{c\gamma} \cdot \frac{1}{s + k_1} \quad (10)$$

Після деяких перетворень рівняння (10) отримуємо:

$$\frac{d^2 \theta(r, s)}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\theta(r, s)}{dr} - \frac{q_0}{ac\gamma} \cdot \frac{1}{s + k_1} - \frac{s}{a} \theta(r, s) + \frac{\vartheta_0}{a} = 0 \quad (11)$$

Початкові, граничні та умови симетрії для зображення будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \vartheta(r, 0) &= \vartheta_0; \\ \frac{d\theta(0, s)}{dr} &= 0; \\ \frac{d\theta(R, s)}{dr} &= H \left(\frac{t_0 - \vartheta_0}{k_2 + s} \right); \end{aligned} \quad (12, 13, 14)$$

Однорідне рівняння для виразу (11) має вигляд:

$$\frac{d^2 \theta(r, s)}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\theta(r, s)}{dr} - \frac{s}{a} \theta(r, s) = 0 \quad (15)$$



Це рівняння є окремим випадком рівняння Бесселя. Рішення однорідного рівняння (15) має вигляд:

$$\theta(r,s) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[c_1 ch \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right) + c_2 ish \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right) \right] \quad (16)$$

Тоді рішення неоднорідного рівняння (11) визначається виразом:

$$\theta(r,s) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[c_1 ch \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right) + c_2 ish \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right) \right] + \frac{1}{s} \left(-\frac{q_0}{c\gamma} \cdot \frac{1}{k_1 + s} + \mathcal{G}_0 \right) \quad (17)$$

Константи c_1 і c_2 визначимо з граничних умов для зображення (12,13,14). Рішення рівняння (11) для зображення $\theta(r,s)$ після перетворень набуває вигляду:

$$\theta(r,s) = \frac{HR^2(t_0 - \mathcal{G}_0) \cdot \frac{1}{r} sh \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right)}{\left[\sqrt{\frac{s}{a}} R ch \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right) - sh \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right) \right] (k_2 + s)} + \frac{1}{s} \left(-\frac{q_0}{c\gamma} \cdot \frac{1}{k_1 + s} + \mathcal{G}_0 \right) \quad (18)$$

Отримане рівняння (18) можна подати у наступному вигляді:

$$\theta(r,s) - \frac{\mathcal{G}_0}{s} = \frac{\varphi_1}{\psi_1} - \frac{\varphi_2}{\psi_2} \quad (19)$$

де $\varphi_1 = HR^2(t_0 - \mathcal{G}_0) \cdot \frac{1}{r} sh \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right);$

$$\psi_1 = \left[\sqrt{\frac{s}{a}} R ch \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right) - sh \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right) \right] (k_2 + s); \quad (20)$$

$$\psi_2 = q_0/c\gamma; \quad \psi_2 = s(s + k_1).$$

Для знаходження оригіналу правої частини рівняння (19) можна застосувати другу теорему розкладання згідно якої оригінал встановлюється за допомогою коренів знаменника.

Поліном ψ_1 має корені $s_1 = k_2$ та безліч коренів рівняння

$$\sqrt{\frac{s}{a}} R ch \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right) - sh \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right) = 0 \quad (21)$$

Це рівняння (2.21) має безліч коренів

$$s_n = -\frac{a}{R^2} \mu_n^2 \quad (22)$$

де μ_n – корені характеристичного рівняння

$$tg \mu_n = -\mu_n \quad (23)$$

Згідно другої теореми розкладання оригінал функції φ_1/ψ_1 знаходиться за формулою:

$$L^{-1} \left[\frac{\varphi_1}{\psi_1} \right] = \lim_{s \rightarrow k_2} \frac{\varphi_1(s)}{\psi_1(s)} e^{s\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1(s_n)}{\psi_1(s_n)} e^{s_n \tau} \quad (24)$$

Після підстановки і перетворення отриманого виразу знайдемо оригінал функції φ_1/ψ_1 .

$$L^{-1} \left[\frac{\varphi_1}{\psi_1} \right] = \frac{HR^2(t_0 - \mathcal{G}_0) \sin \left(\sqrt{\frac{k_2}{a}} r \right)}{r \left[\sqrt{\frac{k_2}{a}} R \cos \left(\sqrt{\frac{k_2}{a}} R \right) - \sin \left(\sqrt{\frac{k_2}{a}} R \right) \right]} e^{-k_2 \tau} + 2 \frac{aH}{r} (t_0 - \mathcal{G}_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n}{R} r}{\left(k_2 - \frac{a}{R^2} \mu_n^2 \right) \sin \mu_n} e^{-\frac{a}{R^2} \mu_n^2 \tau} \quad (25)$$

Аналогічно знайдемо оригінал функції φ_2/ψ_2 . Для цього випадку корені поліному ψ_2 мають наступні значення:

$$s_1 = 0; \quad s_2 = -k_1$$

Тоді оригінал φ_2/ψ_2 визначається наступним виразом:

$$L^{-1} \left[\frac{\varphi_2}{\psi_2} \right] = \frac{q_0}{R_1 c\gamma} - \frac{q_0}{k_1 c\gamma} e^{-k_1 \tau} = \frac{q_0}{k_1 c\gamma} (1 - e^{-k_1 \tau}) \quad (26)$$

З урахуванням наведених часткових рішень та математичних перетворень розв'язок рівняння (2.27) в безрозмірному вигляді може бути представлений наступним чином:

$$\frac{\vartheta(r,\tau) - \mathcal{G}_0}{t_0 - \mathcal{G}_0} = \frac{HR^2 \sin \left(\sqrt{\frac{k_2}{a}} r \right)}{r \left[\sqrt{\frac{k_2}{a}} R \cos \left(\sqrt{\frac{k_2}{a}} R \right) - \sin \left(\sqrt{\frac{k_2}{a}} R \right) \right]} \cdot e^{-k_2 \tau} + 2 \frac{aH}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \left(\frac{\mu_n}{R} r \right)}{\left(k_2 - \frac{a}{R^2} \mu_n^2 \right) \sin \mu_n} e^{-\frac{a}{R^2} \mu_n^2 \tau} - \frac{q_0}{k_1 c\gamma (t_0 - \mathcal{G}_0)} (1 - e^{-k_1 \tau}) \right] \quad (27)$$

Для спрощення сприйняття даного рівняння доцільно представити його в критеріальній формі, що є звичайним методом в теорії теплообміну. Автори планують продовжити написання статей на цю тему і аналіз отриманого рівняння, що являє собою математичну модель процесу сушіння волоських горіхів в конвективно-вібраційній сушарці, буде проведено в наступній роботі.



Там ми розглянемо фізичну сутність теплообмінних критеріїв, подамо дане рівняння в критеріальній формі, визначимо основні фактори що впливають на інтенсивність процесу сушіння.

Рівняння (27) дозволяє визначити температуру у будь-якій точці тіла в довільний момент експозиції сушіння при заданих початкових параметрах процесу сушіння: температурі та швидкості теплоносія, вологості і температури матеріалу, параметрах вібраційного впливу, масі та товщині шару матеріалу в сушильній камері тощо.

Певний інтерес викликає розподіл температури всередині горіха через обмеження по зниженню вмісту олійності. При постійній подачі сушильного агента зі сталими параметрами температура матеріалу в сушильній камері змінюється від ϑ_0 на початку процесу сушіння до свого максимального значення $\vartheta(\tau)_{max}$ в кінці процесу. Розглянемо розподіл температури усередині горіху при його сталій температурі, тобто той випадок при якому в рівнянні (5) ліва частина дорівнює нулю. Ця задача зводиться до вирішення наступного рівняння:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial r} - \frac{q_0}{\lambda} e^{-k_1 \tau} = 0 \quad (28)$$

Початкові та граничні умови залишаться аналогічними, тобто рівняння (6,7,8) характеризують початкові умови і в цьому випадку.

Спочатку знайдемо рішення однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 \vartheta(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta(r, \tau)}{\partial r} = 0 \quad (29)$$

Рішення цього рівняння:

$$\vartheta(r, \tau) = \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (30)$$

де c_1 і c_2 - константи інтегрування.

Постійні інтегрування c_1 і c_2 можна знайти згідно метода варіації довільних констант. За цим методом стосовно нашого випадку зробимо припущення що c_1 і c_2 є функціями аргументу і тоді вони повинні бути коренями наступної системи:

$$c_1' / r + c_2' = 0 \quad (31)$$

де c_1' і c_2' - похідні по r відповідно від c_1 і c_2 .

В цьому випадку (30) є і рішенням рівняння (28).

Рішенням даної системи (31) є:

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{r^3}{3} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot e^{-k_1 \tau} + A_1 \\ c_2 = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot e^{-k_1 \tau} + A_2 \end{cases} \quad (32)$$

Значення постійних A_1 і A_2 можна знайти з початкових умов (6,7,8).

Загальне рішення рівняння (28) буде мати вигляд:

$$\vartheta(r, \tau) = \vartheta_0 + \left(\frac{r^2}{6} + \frac{R^3}{3r} \right) \frac{q_0}{\lambda} (e^{-k_1 \tau} - 1) + HR \frac{r}{R} (t_0 - \vartheta_0) (1 - e^{-k_2 \tau}) \quad (33)$$

Це рівняння також можна записати в безрозмірному (критеріальному) вигляді, але ми це представимо в наступних статтях.

Для практичного використання рівняння (33) потрібно знати залежність коефіцієнтів теплообміна від режимних параметрів процесу, значення теплофізичних характеристик матеріалу, характер зміни інтенсивності негативного внутрішнього джерела теплоти. Всі ці величини будуть визначені за результатами подальших теоретичних та експериментальних досліджень.

Висновки:

1. Аналіз попередніх теоретичних та експериментальних досліджень дає змогу стверджувати що в загальному випадку самим дієвим способом інтенсифікації процесу сушіння є збільшення різниці температур між сушильним агентом і матеріалом. Але для випадку сушіння волоських горіхів цю величину потрібно обмежувати тому що безконтрольне збільшення різниці температур може призвести до погіршення якості кінцевого продукту.

2. Для адекватного опису зміни кількості вологи в матеріалі було застосовано поняття негативних внутрішніх джерел тепла яке еквівалентне поточній вологості матеріалу і залежить від його початкової вологості і режимних параметрів процесу.

3. Вирішення рівняння нестационарного процесу теплопровідності з урахуванням експотенційної зміни інтенсивності негативних внутрішніх джерел тепла в часі дало змогу отримати рівняння за яким можна визначити температуру матеріалу в довільній точці об'єму горіха в залежності від експозиції сушіння.

4. Отримане рівняння дає змогу адекватного моделювання процесу сушіння волоських горіхів в конвективно-вібраційній сушарці та контролювати зміну температури матеріалу для забезпечення високої якості кінцевого продукту.

**Список використаних джерел**

1. ДСТУ 8900:2019 Горіхи волоські. Технічні умови [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://online.budstandart.com.ua/catalog/doc> (дата звернення 26.04.2023)
2. Підгородецький О. Економне сушіння. *Журнал «The Ukrainian Farmer»*. Березень 2016. Електронний ресурс.- Режим доступу: <https://agrotimes.ua/article/ekonomne-sushinnya/> (дата звернення 26.04.2023)
3. Солоня О.В., Замрій М.А. Дослідження процесу сушіння насінників трав. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2022, №3 (106). С.78-87.
4. Яропуд В. М., Шаргородський С. А., Луц П. М., Лавренюк П. П. Симуляція процесу сушіння волоських горіхів у конвективній сушарці. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2022. № 3(118). С.101-109.
5. Котов Б. І., Калініченко Р. А., Спірін А. В. Математичне моделювання процесу сушіння рослинних матеріалів в барабанній сушарці при змінній швидкості переміщення матеріалу. *Інженерія природокористування*. 2017. № 2 (8). С. 19-23
6. Кірчук Р.В. Теоретичні передумови моделювання процесу сушіння дисперсних рослинних матеріалів. *Сільськогосподарські машини*. 2017. Випуск 37 С.47-56.
7. Котов Б.І., Калініченко Р.А., Курганський О.Д. Тепло і масообмін при сушінні і охолодженні зернового матеріалу у щільному рухомому шарі. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2016, №4(96) с. 64 –67.
8. Котов Б.І. Степаненко С.П., Швидя В.О. Врахування розподіленості параметрів при моделюванні динамічних режимів сушарок сільськогосподарських матеріалів. *Сільськогосподарські машини*. Луцьк: 2016, вип.34. с. 74 – 80
9. Бандура В.М., Котов Б.І., Грищенко В.О. Моделювання та розрахунок процесу радіаційно-конвективного сушіння насіння у лотковій вібраційній установці періодичної дії (з контуром циркуляції матеріалу). *Вісник ХНТУСГ*. 2019. Вип 10.
10. Корінчук Д. М., Снежкін Ю.Ф., Обґрунтування енергоефективних режимів роботи барабанної сушарки комплексу виробництва композиційного біопалива. *Наукові праці*. 2018.Том 82,випуск 1. С. 116-122.
11. A. K. Haghi. A mathematical model of the drying process. *Acta Polytechnica*. 2001. No. 3 Vol. 41.
12. Kivaandra Dayaa Rao Ramarao, Zuliana Razali, Chandran Somasundram* Mathematical models to describe the drying

process of *Moringa oleifera* leaves in a convective-air dryer. *Czech Journal of Food Sciences*. 2021. 39 (6).

13. Цуркан О.В., Янович В.П., Присяжнюк Д.В. Дослідження кінетики сушіння насіння соняшника у вібраційній сушарці. Матеріали XI Міжнародної науково-практичної конференції. Проблеми конструювання, виробництва та експлуатації сільськогосподарської техніки. – Кривиницький: ЦНТУ, 2017. – С.301-303.

14. Цуркан О.В., Спірін А.В., Руткевич В.С., Дідик А.М. Розробка конвективно-вібраційної сушарки для сушіння волоських горіхів. Вісник Хмельницького національного університету серія: Технічні науки. 2024. № 2 (333). С. 393-399.

15. Як правильно сушити горіхи [Електронний ресурс].- Режим доступу: <http://fakty.ua/408294> (дата звернення 12.02.2024)

16. Котов Б.І., Спірін А.В., Зозуляк І.А., Півнюк А.В. Розрахунок кінетики сушіння неоднорідних рослинних матеріалів. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2017. №1(96). С.96-99.

17. Kotov B., Bandura V. Construction of a mathematical model of extraction process in the system solid body liquid in a microwave field. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018 №5(6-95) P.33-43.

18. Kotov B., Spirin A., Kalinichenko R., Bandura V., Polievoda Y., Tverdokhlib I.. Determination the parameters and modes of new heliocollectors constructions work for drying grain and vegetable raw material by active ventilation. *Research in Agricultural Engineering*. 2019. (1)65 p. 20-24.

19. Bandura V., Kalinichenko R., Kotov B., Spirin A. Theoretical rationale and identification of heat and mass transfer processes in vibration dryers with IR-energy supply. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. 4/8 (94) Pp.50-58.

20. Массалітіна Є.В., Кільчинський О.О. Операційне числення. Теорія та методика розв'язання задач. Методичний посібник для студентів технічних спеціальностей//К.: НТУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» 2018.- 90 с.

References

1. DSTU 8900:2019 Walnuts. Technical conditions. [Electronic resource]. – Access mode: <http://online.budstandart.com.ua/catalog/doc> (access date 4/26/2024) [in Ukrainian]
2. Pidgorodetsky O. Economical drying. *Journal «The Ukrainian Farmer»*. Березень 2016. [Electronic resource]. – Access mode: <https://agrotimes.ua/article/ekonom>



[ne-sushinnya/](#) (access date 4/26/2024) [in Ukrainian]

3. Solona O., Zamriy M. Study of the process of drying grass seeds. (2022). *Vibrations in engineering and technology*. №3 (106). P.78-87. [in Ukrainian]

4. Yaropud V. M., Sharhorodskyi S. A., Luts P. M., Lavreniuk P. P. Simulation of the process of drying walnuts in a convection dryer. *Technology, energy, agriculture transport AIC*. 2022. № 3(118). P.101-109.

5. Kotov B. I., Kalinichenko R. A., Spirin A. V. Mathematical modeling of the process of drying plant materials in a drum dryer at a variable rate of material movement. *Environmental Engineering*. 2017. № 2 (8). P. 19-23

6. Kirchuk R.V. Theoretical prerequisites for modeling the process of drying dispersed plant materials. *Agricultural machinery*. 2017. Issue 37, pp.47-56.

7. Kotov B.I., Kalinichenko R.A., Kurgansky O.D. Heat and mass transfer during drying and cooling of grain material in a dense moving layer. *Technology, energy, agriculture transport AIC*. 2016, №4(96) c. 64 –67.

8. Kotov B.I., Stepanenko S.P., Shvydia V.O. Consideration of distributed parameters in modeling dynamic modes of dryers of agricultural materials. *Agricultural machinery*. Lutsk: 2016, issue 34. pp. 74 – 80

9. Bandura V.M., Kotov B.I., Grishchenko V.O. Modeling and calculation of the process of radiation-convective drying of seeds in a tray vibration unit of periodic action (with a material circulation circuit). *Visnyk KNTUG*. 2019. Vip 10.

10. Korinchuk D.M., Snezhkin Y.F., Substantiation of energy-efficient modes of operation of the drum dryer of the complex of composite biofuel production. *Scientific works*. 2018.Vol. 82, Issue 1. P. 116-122.

11. A. K. Haghi. A mathematical model of the drying process. *Acta Polytechnica*. 2001. No. 3 Vol. 41.

12. Kivaandra Dayaa Rao Ramarao, Zuliana Razali, Chandran Somasundram* Mathematical models to describe the drying process of Moringa oleifera leaves in a convective-air dryer. *Czech Journal of Food Sciences*. 2021. 39 (6).

13. Tsurkan O.V., Yanovych V.P., Prysyzhnyuk D.V. Study of kinetics of drying sunflower seeds in a vibrating dryer. Proceedings of the XI International Scientific and Practical Conference. Problems of design, production and operation of agricultural machinery. – Kropyvnytskyi: CSTU, 2017. – P.301-303.

14. Tsurkan O., Spirin A., Rutkevich V., Didyk A. Development of a convective-vibrating dryer for drying walnuts. *Bulletin of the*

Khmelnytskyi National University Series: Technical Sciences. 2024. № 2 (333). С. 393-399. [in Ukrainian]

15. How to dry nuts [Electronic resource]. Access mode:<http://fakty.ua/408294> access date 2/12/2024) [in Ukrainian]

16. Kotov B.I., Spirin A.V., Zozuliak I.A., Pivnyuk A.V. Calculation of kinetics of drying of heterogeneous plant materials. *Technology, energy, agriculture transport AIC*. 2017. №1(96). C.96-99.

17. Kotov B., Bandura V. Construction of a mathematical model of extraction process in the system solid body liquid in a microwave field. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018 №5(6-95) P.33-43.

18. Kotov B., Spirin A., Kalinichenko R., Bandura V., Polievoda Y., Tverdokhlib I.. Determination the parameters and modes of new heliocollectors constructions work for drying grain and vegetable raw material by active ventilation. *Research in Agricultural Engineering*. 2019. (1)65 p. 20-24.

19. Bandura V., Kalinichenko R., Kotov B., Spirin A. Theoretical rationale and identification of heat and mass transfer processes in vibration dryers with IR-energy supply. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. 4/8 (94) Pp.50-58.

20. Massalitina E.V., Kilchynskyi O.O. Operational calculus. Theory and Methods of Problem Solving. Methodical manual for students of technical specialties: KNTU "KPI them. Igor Sikorsky" 2018.- 90 p.

MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS OF DRYING WALNUTS IN A CONVECTIVE-VIBRATION DRYER

Obtaining high-quality walnuts must necessarily involve drying them to a conditioned moisture content of 10%. To achieve this goal, dryers of various types and designs are used, but convective dryers with various upgrades to intensify the drying process are the most common. To implement the drying process with the highest possible efficiency, it is necessary to know the regularities of the course of events occurring inside the drying equipment, that is, according to what laws the interaction of the drying agent and the material occurs. Simply put, you need to get a mathematical model of the process of drying walnuts in a convective-vibration dryer. The analysis of recent studies and publications shows that despite the significant variety of measures and means for the implementation of the convective drying process, all of them have the development of a mathematical model of the process as one of the stages of the study. In most cases, the mathematical model describes the interaction



between the drying agent and the material to be dried. Before starting work on the creation of a mathematical model of drying, some assumptions were made, including the constancy of thermophysical characteristics and the coefficient of heat transfer during the entire drying process. To adequately describe the change in the amount of moisture in the material, the concept of negative internal heat sources was applied, which is equivalent to the current moisture content of the material and depends on its initial humidity and the operating parameters of the process. The solution of the equation of non-stationary thermal conductivity was carried out analytically by the operational method. The solution of the equation of the non-stationary process of thermal

conductivity, taking into account the potential change in the intensity of negative internal heat sources in time, made it possible to obtain an equation by which it is possible to determine the temperature of the material at an arbitrary point of the nut volume depending on the drying exposure. The obtained equation makes it possible to adequately simulate the process of drying walnuts in a convective-vibration dryer and control the change in the temperature of the material to ensure the high quality of the final product.

Keywords: temperature, humidity, internal heat sources, similarity criterion, non-stationary thermal conductivity, boundary conditions

Відомості про авторів

Цуркан Олег Васильович – доктор технічних наук, професор кафедри технологічних процесів та обладнання переробних і харчових виробництв інженерно-технологічного факультету Вінницького національного аграрного університету, директор Відокремленого структурного підрозділу «Ладижинський фаховий коледж Вінницького національного аграрного університету» (вул. П. Кравчика, 5, м. Ладижин, Вінницька обл., 24321, Україна, e-mail: tsurkan_ov76@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0002-7218-0026>).

Спирін Анатолій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, викладач відокремленого структурного підрозділу «Ладижинський фаховий коледж Вінницького національного аграрного університету», (вул. П. Кравчика, 5, м. Ладижин, Вінницька обл., 24321, Україна, e-mail: spirinanatoly16@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4642-6205>).

Гудзенко Наталя Миколаївна – к.е.н., доцент, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист. Відокремлений структурний підрозділ «Ладижинський фаховий коледж Вінницького національного аграрного університету» (вул. Петра Кравчика, 5, Ладижин, Вінницька область, 24321, Україна). e-mail: gudzenko_nm11@ukr.net, +380974449462., <https://orcid.org/0000-0002-0978-4257>).

Дідик Андрій Михайлович – аспірант кафедри інженерної механіки та технологічних процесів в АПК інженерно-технологічного факультету Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, +380972830537, anddidyk99@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0524-0017>).

Tsurkan Oleh – D.Eng.Sc., professor of the Department of technological processes and equipment of processing and food industries of Faculty of Engineering and Technology of Vinnytsia National Agrarian University, director of Separated structural unit «Ladyzhyn Professional College of Vinnytsia National Agrarian University» (5, P. Kravchyka St., Ladyzhyn, Vinnytsia region, 24321

Spirin Anatoly - candidate of technical sciences, associate professor, teacher of Separate structural subdivision «Ladyzhyn vocational college of Vinnytsia National Agrarian University» (Kravchik Petro St., 5, Ladyzhyn, Vinnytsia Region, Ukraine, 24321, e-mail: spirinanatoly16@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4642-6205>).

Gudzenko Natalia – candidate of Economic Sciences, Associate, Specialist of the highest category, teacher-methodologist. Ladyzhyn Vocational College of Vinnytsia National Agrarian University (5 Petra Kravchyk Str., Ladyzhyn, Vinnytsia region, 24321, Ukraine). e-mail: gudzenko_nm11@ukr.net, +380974449462., <https://orcid.org/0000-0002-0978-4257>).

Didyk Andrii – postgraduate student of the Department of Engineering Mechanics and Technological Processes in the Agro-Industrial Complex of the Faculty of Engineering and Technology of Vinnytsia National Agrarian University (3 Sunny Street, Vinnytsia, 21008, Ukraine, +380972830537, anddidyk99@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0524-0017>)