

**Невдаха Ю. А.**

к.т.н., доцент

**Скрипник О. В.**

к.т.н., доцент

**Невдаха Н.А.**

завідувач навчальної лабораторії

**Рябоволик Я.Ю.**здобувач вищої освіти першого  
(бакалаврського) рівня**Центральноукраїнський  
національний технічний  
університет****Nevdakha Y.**Candidate of Technical Sciences,  
Associate Professor**Skrypnyk O.**Candidate of Technical Sciences,  
Associate Professor**Nevdakha N.**head of the educational  
laboratory**Riabovolyk Y.**higher education applicant  
of the first (Bachelor's) level**Central Ukrainian National  
Technical University**

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-  
ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОСТІННИХ  
ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОСУДИН ЗІ СФЕРИЧНИМИ  
ДНИЩАМИ ПІД ДІЄЮ ВНУТРІШНЬОГО  
ТИСКУ © 2026 by Невдаха Ю.А., Скрипник О.В.,  
Невдаха Н.А., Рябоволик Я.Ю. is licensed  
under CC BY 4.0

**УДК 621.8****DOI: 10.37128/2306-8744-2026-1-18****ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-  
ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ  
ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ  
ПОСУДИН ЗІ СФЕРИЧНИМИ  
ДНИЩАМИ ПІД ДІЄЮ  
ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ**

У статті досліджено напружено-деформований стан тонкостінної циліндричної посудини з плавними сферичними днищами, що працює під дією внутрішнього надлишкового тиску. Розглянуто конструктивну схему герметичної посудини, утвореної з листових елементів, з'єднаних між собою поздовжніми та поперечними міцнощільними заклепувальними швами, а також виконано перевірочний розрахунок її основних елементів. У роботі узагальнено сучасні підходи до аналізу заклепувальних з'єднань з урахуванням умов міцності, герметичності, сил попереднього стиснення та характерних особливостей можливого руйнування, що дало змогу обґрунтувати доцільність застосування таких з'єднань у відповідальних конструкціях, які працюють під тиском.

На основі положень опору матеріалів для тонкостінних оболонок визначено закономірності розподілу мембранних напружень у стінках посудини залежно від геометричної форми оболонки, її товщини та радіусів кривизни. Показано, що в циліндричній частині посудини напруження в поздовжньому перерізі є вдвічі більшими, ніж у поперечному, унаслідок чого саме поздовжні заклепувальні шви виявляються найбільш навантаженими і мають розглядатися як визначальні під час розрахунку на дію внутрішнього тиску. Наведено послідовність перевірочного розрахунку заклепувальних швів, яка включає вибір типу шва, визначення необхідної товщини стінки, оцінювання коефіцієнта міцності шва, підбір діаметра заклепок, а також перевірку з'єднань на зріз, змінання і забезпечення герметичності.

Розглянуто два можливі варіанти виконання цього з'єднання та встановлено, що раціональнішим є варіант, за якого циліндрична частина розміщується як внутрішній елемент відносно днища. Таке конструктивне рішення сприяє підвищенню щільності поперечного шва, зменшенню впливу локальних стискаючих зусиль у зоні переходу та підвищенню загальної надійності конструкції. Отримані результати можуть бути використані під час проектування, розрахунку й удосконалення герметичних тонкостінних посудин, що експлуатуються під внутрішнім тиском.

**Ключові слова:** циліндрична посудина, заклепувальні шви, тиск, напруження, заклепки, стискаючі зусилля.

**Вступ.** Міцнощільні заклепувальні з'єднання (МЩЗЗ) застосовуються у котлах, автоклавах, корпусах суден, виготовлених із листової сталі. В даний час ці конструкції

здебільшого виконуються зварними. Однак міцнощільні заклепувальні з'єднання знаходять досить широке застосування в конструкціях літальних апаратів, де крім міцності, до частини

швів висуваються додаткові вимоги щодо герметизації. Міцнощільні шви конструюються таким чином, щоб забезпечити обидві властивості:

- міцність досягається за рахунок кількох рядів заклепок та їх розмірів, що дозволяє рівномірно розподілити навантаження і витримувати великі зусилля на зсув та розтяг;

- герметичність забезпечується завдяки використанню гарячого клепаання (розпечена заклепка при охолодженні скорочується і сильно стискає з'єднані деталі, створюючи щільний контакт), а також підкарбовуванню країв листів, які з'єднуються, та головок заклепок спеціальними інструментами для додаткового ущільнення шва.

**Аналіз останніх досліджень.** На даний час значна частина публікацій по питанням конструкції та розрахунку швів МЦЗЗ присвячена:

1. Експериментальному та чисельному аналізу міцності, довговічності та механізмів руйнування заклепувальних з'єднань, включаючи МЦЗЗ. Досліджено поведінку заклепок під навантаженням, а саме гарячих заклепок (hot-driven rivets) у сталевих фермових вузлах, зокрема при їх посиленні додатковими заклепками під існуючим навантаженням. Виявлено нерівномірний розподіл зусиль між заклепками, що змінюється в процесі навантаження. Середній опір зсуву на одну заклепку коливався від 170,2 до 228,7 кН, причому основним видом руйнування був зсувний злам заклепки. Вузли з існуючим навантаженням демонстрували комбіноване руйнування пластина-заклепка [1, с. 17]. Також на розробленій математичній моделі [2, с. 18] проаналізовано вплив сил стиснення (Clamping Force) на гарячі заклепувальні з'єднання за допомогою методу скінченних елементів (FEA). Розроблена модель може точно передбачати поведінку на зсув та чотири різні види руйнування. Було показано, що міцність з'єднання зростає зі збільшенням сили стиснення від заклепки;

2. Впливу конструктивних параметрів заклепувальних з'єднань - оптимізації геометрії заклепок для з'єднань внапуск (Lap Joints) з метою досягнення максимальної міцності. Як показано в роботі [3, с. 19] максимальна міцність з'єднання досягається при розташуванні більшості заклепок у середньому ряду та менше по краях. Міцність з'єднання зростає при збільшенні кроку заклепок до  $5d$  ( $d$  - діаметр заклепки) та крайової відстані до  $3d$ , після чого ефект стає обмеженим;

3. Новим технологіям заклепування у контексті забезпечення герметичності та міцності. Хоча сучасні методи з'єднання можуть не завжди відповідати класичному визначенню "міцнощільного", їх розробники [4, с. 11; 5, с. 205], наприклад, пропонують порівняти міцносних характеристик традиційних (попередньо просвердлених) та самопроколювальних заклепувальних з'єднань (SPR) у листовій сталі. Самопроколювальні з'єднання (SPR) демонструють вищу несучу здатність та міцність

на зсув порівняно з попередньо просвердленими з'єднаннями, а також вищу міцність на зсув порівняно зі сталевими та алюмінієвими глухими заклепками. З'єднання, виготовлене методом фрикційного перемішувального глухого заклепування (Friction Stir Blind Riveting, FSBR), можуть мати приблизно на 20% вищу міцність порівняно зі з'єднаннями, виготовленими традиційним глухим заклепуванням;

4. поведінці МЦЗЗ в екстремальних умовах та новим матеріалам. Так встановлено, що несуча здатність заклепувального з'єднання різко знижується зі зростанням температури (дослідження проводились при 23, 400, 600 та 800 °C) [6, с. 55]. Проведені дослідження міцності багатоелементних односмугових з'єднань у композитних пластинах на основі лляних та джутових волокон (Flax and Jute Composite Plates) із застосуванням болтів або заклепок. Максимальна ефективність такого з'єднання досягається при більших співвідношеннях діаметр до ширини, використання трьох заклепок по лінії дії сили та співвідношенні крайова відстань до діаметра заклепки понад 2,5 [7, с. 18].

Останні дослідження щодо заклепувальних з'єднань, які також стосуються міцнощільних з'єднань, демонструють перехід до більш глибокого чисельного аналізу (FEA), який включає такі важливі фактори, як сили стиснення та існуючі навантаження. Також активно досліджуються нові технології заклепування (SPR, FSBR) та оптимізація геометрії для підвищення міцності й надійності, що є критичним для герметичних конструкцій.

**Мета роботи** Метою роботи є дослідження процесів, які відбуваються в конструкції тонкостінної циліндричної посудини з плавними сферичними днищами усередині якої діє надлишковий тиск.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо конструкцію та розрахунок тонкостінної циліндричної посудини з плавними закінченнями (днищами), усередині якої діє надлишковий тиск  $p$ . Оболонка посудини утворюється з листів, з'єднаних між собою поздовжніми та поперечними заклепувальними швами (рис. 1).

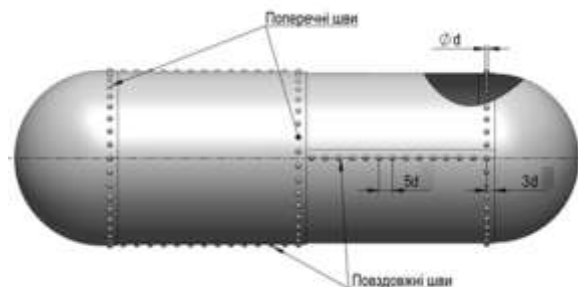


Рис. 1. До розрахунку швів міцнощільних заклепувальних з'єднань

Під впливом внутрішнього тиску у стінках посудини з'являються лише напруження розтягування. Елементарна ділянка стінки знаходиться в умовах двостороннього розтягування, і напруження визначаються за формулою опору матеріалів для тонкостінної посудини [8, с. 443]:

$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{\delta} \quad (1)$$

де  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  - напруження у взаємно перпендикулярних напрямках, один з яких утворено площиною, що проходить вісь симетрії посудини;

$p$  - надлишковий тиск всередині посудини;

$\delta$  - товщина стінки посудини;

$r_1$  і  $r_2$  - радіуси кривизни оболонки у відповідних напрямках (рис. 2.)

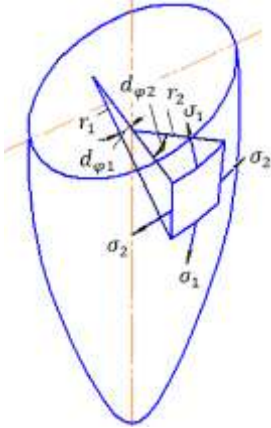


Рис. 2. До визначення напружень у стінках посудини

З наведеного рівняння випливає, що: а) зі зменшенням одного з радіусів кривизни зростає відповідне напруження; б) найвигідніша форма посудини - кульова, тому що при цьому  $r_1 = r_2 = r$  і розтягуюче напруження однакове для обох напрямків:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pr}{2\delta} \quad (2)$$

для циліндра напруження, розриває його по утворюючої (при  $r_1 = \infty$ ), дорівнює:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{\delta} \quad (3)$$

Напруження  $\sigma_1$  в поперечному перерізі циліндра визначається за умови рівноваги його частини, відсіченої площиною, перпендикулярної осі обертання (рис. 3):

$$F = p\pi r^2 = 2\pi r\delta\sigma_1 \quad (4)$$

Звідки:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2\delta}, \quad (5)$$

тобто напруження в поздовжньому перерізі циліндричної посудини виявляється вдвічі більшим, ніж напруження в поперечному перерізі. Тому для циліндричних посудин розрахунковими на надлишковий тиск будуть поздовжні шви.

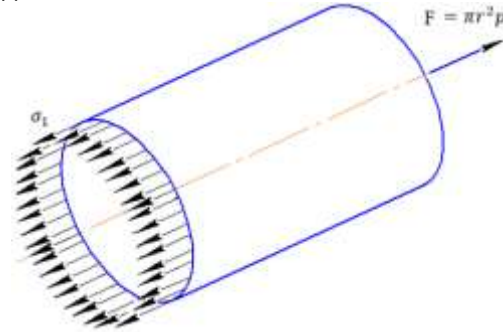


Рис. 3. До визначення напружень у поперечному перерізі циліндра

Розрахунок міцності швів має перевіряючий характер. Порядок проектування та розрахунку наступний:

1. За аналогією з виконаними конструкціями призначають тип шва. Міцніші шви виконуються, як правило, багаторядними як у стик, так і внахлестку з однією або двома накладками. Наприклад, для герметичних кабін застосовуються трирядні шви з кроком  $t=20$  мм або дворядні зі спеціальною ущільнюючою стрічкою товщиною 0,4 мм. Для більш надійного забезпечення герметичності шви промазуються ущільнюючими складами (спеціальний клей, свинцеві білила на оліфі та інші). У разі застосування заклепок з виступаючими головками крок заклепок приймають рівним  $(4...5)d$ , відстані між рядами –  $(3...4)d$  і до країв аркушів  $2d$  (рис. 4) [9, с. 172]. При штампуванні в листах гнізда під потайну головку крок заклепок у дворядному шві приймають рівним  $6d$ , відстань між рядами - до  $4d$  і до краю листів -  $3d$ .

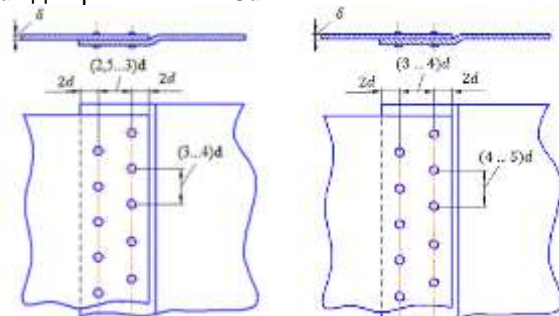


Рис. 4. Основні параметри заклепального шва

2. За заданим надлишковим тиском  $p$  в посудині і радіусу кривизни стінки визначають її

товщину  $\delta$  з урахуванням коефіцієнта міцності шва  $\varphi$ :

$$\delta = \frac{pr}{[\sigma]_p \varphi}, \quad (6)$$

де  $[\sigma]_p$  - допустиме напруження матеріалів листів на розрив.

Коефіцієнт міцності шва  $\varphi$  може бути або визначений, якщо призначено співвідношення між діаметром та кроком заклепок у шві, або може бути орієнтовно заданий рівним  $\varphi = 0,65 \dots 0,80$  та уточнений після остаточного визначення діаметра заклепок та кроку.

3. Визначають діаметр заклепок і перевіряють міцність з'єднання на зріз та зминання заклепок та листів. Дотичні напруження зрізу, які виникають у поперечному перерізі заклепок розраховуються за формулою:

$$\tau = \frac{F_{зрізу}}{An}, \quad (7)$$

де  $A$  - площа зрізу однієї заклепки;  
 $n$  - кількість заклепок.

Зрізування заклепок може відбуватися за рахунок зрізуючих зусиль, які діють на неї за суміжними площинами у протилежних напрямках. Навантаження такого характеру може спричинити зсув деяких листів під дією сили  $F_{зрізу}$  (рис. 5). [8].

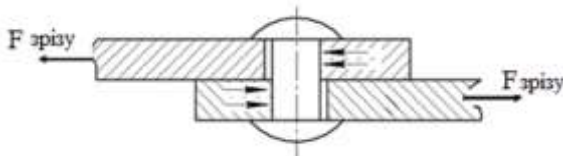


Рис. 5. Зсув листів під дією сили  $F_{зрізу}$

При конструюванні циліндричних посудин необхідно звертати увагу на плавні переходи від циліндричної частини до днища, так як в іншому випадку на циліндричну частину в місці переходу діятимуть значні стискаючі зусилля, що викликають місцевий вигин обшивки. З точки зору надійшої герметичності з'єднання днища з циліндричною частиною посудини (обичайкою) небайдуже, який елемент з'єднання буде зовнішнім і який внутрішнім. Якщо днище виконано у вигляді півсфери, то при переході від циліндра до днища в поздовжніх перерізах буде мати місце стрибок напружень

$$\sigma = \frac{pr}{2\delta} \text{ від кулі до } \sigma = \frac{pr}{\delta} \text{ циліндра.}$$

При правильній конструкції даного з'єднання циліндрична частина повинна бути внутрішнім елементом. В цьому випадку взаємодія днища та обичайки підвищує щільність поперечного шва, що з'єднує їх.

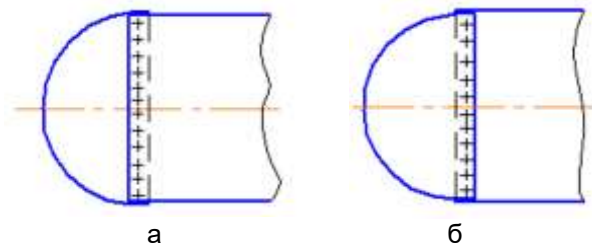


Рис. 6. Приклад правильного та неправильного конструювання міцнощільного заклепувального шва: а) правильно, заклепки працюють лише на зріз; б) неправильно, заклепки шва працюють на відрив головки та зріз стрижня.

**Висновки:** Розглянуто конструкцію тонкостінної циліндричної посудини з плавними сферичними днищами усередині якої діє надлишковий тиск  $p$ . Перевірочний розрахунок вказує, що напруження в поздовжньому перерізі циліндричної посудини є вдвічі більшим, ніж напруження в поперечному перерізі. Тому для циліндричних посудин розрахунковими на надлишковий тиск будуть поздовжні шви. Також розглянуто два варіанти кріплення сферичного днища до циліндричної посудини. Рекомендовано використовувати конструкцію з'єднання в якого циліндрична частина є внутрішнім елементом сферичного днища, що підвищує щільність з'єднувальних швів.

#### Список використаних джерел

1. Sizhe Wang, Qingtian Su, Liang Chen, Xu Jiang. Strengthening of riveted steel truss joints: Experimental and numerical study on rivet behavior. *Engineering Structures* ISSN: 0141-0296. 2025. Vol. 342. Page: 120834.
2. Lundkvist Axel Static strength analysis of riveted joints. Student thesis. 2022. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1711839&dswid=4756>
3. Kerong Ren, Haobing Han, Wentao Xu and Hua Qing. The Effect of Rivet Arrangement on the Strengths of Lap Joints and Lap Joint Design Methods. *Appl. Sci.* 2023. Vol. 13(9). Page: 5629.
4. Anna Rudawska<sup>1</sup>, Izabela Miturska, Dana Stančėková<sup>1</sup>, Jacek Mucha The strength of traditional and self-pierced riveted joints. *MATEC Web of Conferences*. 2018. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201824401007>
5. Lucjan Witek, Monika Lubas. Experimental Strength Analysis of Riveted Joints Using Blind Rivets. *Journal of KONES Powertrain and Transport*. ISSN: 1231-4005. 2019. Vol. 26, No. 1. P. 199-206.
6. Monika Lubas. The visual research of changes in the geometry of a rivet joint for material



model effect for simulation riveted joints made of EN AW 5251. *Technologia i automatyzacja montażu*. 2022. NR 4. P. 54-63.

7. Mike R. Bambach. Tension Strength of Multi-Fastener, Single-Lap Joints in Flax and Jute Composite Plates Using Bolts or Rivets. *Materials*. 2025. Vol.18(10). Page: 2180.

8. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: підручник для вузів. Київ: Вища школа, 2004. 656с.

9. Павлице В.Т. Основи конструювання та розрахунок деталей машин: Підручник. Київ: Вища школа, 1993. 556с.

### References

1. Sizhe Wang, Qingtian Su, Liang Chen, Xu Jiang (2025). Strengthening of riveted steel truss joints: Experimental and numerical study on rivet behavior. *Engineering Structures* ISSN: 0141-0296. 2025. Vol. 342. Page: 120834. [in English]

2. Lundkvist Axel (2022) Static strength analysis of riveted joints. Student thesis. URL: <https://www.diva.portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1711839&dswid=4756> [in English]

3. Kerong Ren , Haobing Han , Wentao Xu and Hua Qing. (2023) The Effect of Rivet Arrangement on the Strengths of Lap Joints and Lap Joint Design Methods. *Appl. Sci.* 2023. Vol. 13(9). Page: 5629. [in English]

4. Anna Rudawska<sup>1</sup>, Izabela Miturska, Dana Stančėková<sup>1</sup>, Jacek Mucha (2018) The strength of traditional and self-pierced riveted joints. *MATEC Web of Conferences*. 2018. <https://doi.org/10.1051/matecconf/201824401007> [in English]

5. Lucjan Witek, Monika Lubas (2019). Experimental Strength Analysis of Riveted Joints Using Blind Rivets. *Journal of KONES Powertrain and Transport*. ISSN: 1231-4005. 2019. Vol. 26, No. 1. P. 199-206. [in English]

6. Monika Lubas (2022). The visual research of changes in the geometry of a rivet joint for material model effect for simulation riveted joints made of EN AW 5251. *Technologia i automatyzacja montażu*. 2022. NR 4. P. 54-63. [in English]

7. Mike R. Bambach (2025). Tension Strength of Multi-Fastener, Single-Lap Joints in Flax and Jute Composite Plates Using Bolts or Rivets. *Materials*. 2025. Vol.18(10). Page: 2180. [in English]

8. Pysarenko, G.S. et al. (2004) Strength of Materials: Textbook for Universities. Kyiv: Vyshcha Shkola [in Ukrainian].

9. Pavlishche V.T. (1993) Fundamentals of Design and Calculation of Machine Parts: Textbook. Kyiv: Vyshcha Shkola [in Ukrainian].

### STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THIN-WALLED CYLINDRICAL VESSELS WITH SPHERICAL BOTTOMS UNDER THE ACTION OF INTERNAL PRESSURE

*The article investigates the stress-strain state of a thin-walled cylindrical pressure vessel with smoothly joined spherical heads operating under internal overpressure. The structural configuration of the sealed vessel, formed by sheet elements connected by longitudinal and circumferential leak-tight riveted joints, is considered, and a verification calculation of its main components is performed. The study generalizes contemporary approaches to the analysis of riveted joints with due regard to strength conditions, tightness, preload compressive forces, and the characteristic features of possible failure, which made it possible to substantiate the expediency of using such joints in critical pressure-loaded structures.*

*Based on the principles of strength of materials for thin-walled shells, the regularities of membrane stress distribution in the vessel walls were determined as a function of the shell geometry, wall thickness, and radii of curvature. It is shown that in the cylindrical part of the vessel, the stress in the longitudinal section is twice as high as that in the circumferential section; consequently, the longitudinal riveted joints are the most heavily loaded and should be regarded as the governing elements in calculations under internal pressure. A sequence for the verification calculation of riveted joints is presented, including the selection of the joint type, determination of the required wall thickness, evaluation of the joint efficiency coefficient, selection of the rivet diameter, and verification of the joint with respect to shear, bearing, and tightness.*

*Two possible design variants of this joint were considered, and it was established that the more rational solution is the one in which the cylindrical shell is arranged as an internal element relative to the head. Such a design promotes higher tightness of the circumferential joint, reduces the influence of local compressive forces in the transition zone, and improves the overall reliability of the structure. The obtained results can be used in the design, calculation, and improvement of sealed thin-walled pressure vessels operating under internal pressure.*

**Keywords:** cylindrical vessel, riveted seams, pressure, stress, rivets, compressive forces..

**Відомості про авторів**

**Невдаха Юрій Андрійович** - доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри деталей машин та прикладної механіки, Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна, e-mail: uanevdakha@ukr.net, (066) 5249790, <https://orcid.org/0000-0003-4355-4065>,

**Скрипник Олександр Вікторович** - доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри матеріалознавства та ливарного виробництва, Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна, e-mail: skripnik1966@ukr.net, (095) 0278011, <https://orcid.org/0000-0002-5735-0648>,

**Невдаха Наталія Анатоліївна** - завідувач навчальної лабораторії кафедри матеріалознавства та ливарного виробництва, Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна, e-mail: natalian65@ukr.net, (095) 9048267, <https://orcid.org/0009-0004-9841-4216>,

**Рябоволик Ярослав Юрійович** - здобувач вищої освіти за першим (бакалаврським) рівні вищої освіти за спеціальністю G9 «Прикладна механіка», Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна, e-mail: Ryabovolik@ukr.net, (097) 8275939, <https://orcid.org/0009-0003-6367-7182>,

**Nevdakha Yurii** - Associate Professor, PhD in Engineering, Associate Professor of the Department of Machine Parts and Applied Mechanics, Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine, e-mail: uanevdakha@ukr.net, (066) 5249790, <https://orcid.org/0000-0003-4355-4065>

**Skrypnyk Oleksandr** - Associate Professor, PhD in Engineering, Associate Professor of the Department of Materials Science and Foundry, Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine, e-mail: skripnik1966@ukr.net, (095) 0278011, <https://orcid.org/0000-0002-5735-0648>,

**Nevdakha Nataliia** - head of the Educational Laboratory of the Department of Materials Science and Foundry, Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine, e-mail: natalian65@ukr.net, (095) 9048267, <https://orcid.org/0009-0004-9841-4216>,

**Riabovolyk Yaroslav** - applicant for higher education at the first (bachelor's) level of higher education in the specialty G9 "Applied Mechanics", Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine, e-mail: Ryabovolik@ukr.net, (097) 8275939, <https://orcid.org/0009-0003-6367-7182>

*Стаття надійшла 06.03.2026*

*Стаття прийнята 16.03.2026*

*Опубліковано 17.04.2026*