

**Ольшанський В. П.**

д.ф.-м.н., професор

Сліпченко М. В.

к.т.н., доцент

Спольнік О. І.

д.ф.-м.н., професор

**Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені Петра Василенка****Солоня О.В.**

к.т.н., доцент

**Вінницький національний
аграрний університет****Olshanskiy V.****Slipchenko M.****Spolnik O.****Petro Vasilenko Kharkiv
National Technical
University of Agriculture****Solona O.****Vinnitsia National Agrarian
University****УДК 534.1:539.3****DOI: 10.37128/2306-8744-2021-1-3****КОЛИВАННЯ МИТТЄВО
НАВАНТАЖЕНОГО
ДИСИПАТИВНОГО
ОСЦИЛЯТОРА**

Осцилятор задемпфований в'язким лінійним опором, внаслідок миттєвого зростання його маси після удару, може стати дисипативною коливальною системою під дією сухого чи позиційного тертя. Описано коливання дисипативного осцилятора з несиметричною квадратично нелінійною характеристикою пружності та сухим тертям Кулона, що виникають внаслідок непружного вертикального удару по ньому твердого тіла. В статті використано модель Кокса, що не враховує місцеві деформації твердих тіл, що піддаються удару. Встановлено залежності від швидкості удару та значень інших параметрів, при яких може проявлятися або не проявлятися ефект несиметрії пружної характеристики системи. Виведено умови, коли в системі проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Він полягає в тому, що максимальне переміщення осцилятора (розмах коливаний) в напрямі дії ударного імпульсу менше, ніж протилежне за напрямом екстремальне переміщення (розмах) після ударних коливаний. Встановлено існування такого критичного значення ударного імпульсу, перевищення якого призводить до втрати стійкості руху. Другий інтеграл рівняння коливаний, що описує переміщення осцилятора у часі, виражено через еліптичні функції Якобі. Запропоновано наближену формулу для їх обчислення. Виведено також формули для визначення часу досягнення екстремальних відхилень системи від положення рівноваги. Цей час виражено через еліптичні інтеграли першого роду, що відносяться до затабульованих функцій. Розглянуто приклади розрахунків, в яких крім використання виведених формул, проведено чисельне комп'ютерне інтегрування вихідного нелінійного диференціального рівняння руху. Проведено порівняння отриманих результатів значень переміщень квадратично нелінійного осцилятора з сухим тертям, виражених через еліптичні функції Якобі та отриманих чисельним інтегруванням. Узгодженість результатів розрахунку двома способами підтвердила адекватність отриманих аналітичних розв'язків нелінійної задачі Коші.

Ключові слова: осцилятор, непружний вертикальний удар, квадратично нелінійна пружність, сухе тертя, динамічний ефект несиметрії пружності, функції Якобі, еліптичні інтеграли першого роду.

Вступ. В теорії коливаний досліджено рух дисипативних систем при дії окремих сил опору. Рух дисипативних осциляторів при спільній дії сил опору різної природи досліджено значно менше. В розглянутому випадку задача є нелінійною завдяки тому, що



враховано дію сили сухого тертя. Але, не зважаючи на нелінійність, поставлена задача допускає побудову точних аналітичних розв'язків в елементарних функціях.

Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження. Нестационарним коливанням осциляторів присвячено дуже багато публікацій. Значну частину цих досліджень становить вивчення переходу коливальних систем через резонанс [1, 2]. У випадку зміни у часі маси і жорсткості системи з одним ступенем вільності при дії зовнішньої сили змінної частоти може бути не один, а два переходи через резонанс, які розглядали в [3]. До нестационарних коливань осцилятора зводиться також наближений розрахунок переміщень систем з розподіленими параметрами типу балок і пластин, які в опорі матеріалів описують відомою формулою Кокса [4-6]. Часто при розрахунках осциляторів на дію імпульсних навантажень не враховують наявність дисипативних сил. Таке спрощення не дає суттєвих похибок при вивченні руху на тривалостях менших періоду коливань системи. Але з плином часу воно спотворює рух, який може бути обмеженим в часі. Більше того, в [7] показано, що наявність сили лінійного в'язкого опору в моделі осцилятора суттєво впливає на значення пружної сили при короткочасному імпульсному навантаженні. Це стосується і переміщень механічної системи [8]. Виходячи з цього, тут розглядаємо нестационарні коливання з використанням більш адекватних моделей, в яких врахована дія сил опору. Обмежуємось випадком малих переміщень, коли можна вважати лінійною пружну характеристику системи. Враховуємо спільну дію сил опору різної природи, так як це робили в [9-11] при аналізі вільних коливань. Наявність сили сухого тертя у складі дисипативної сили робить задачу нелінійною, але її можна розв'язувати аналітично методом припасовування розв'язків.

$$\dot{x}(t) = -\exp(-\beta t) \left[(b_1 \beta - b_2 \omega) \cos(\omega t) + (b_1 \omega + b_2 \beta) \sin(\omega t) \right]. \quad (4)$$

Підставивши вирази (3) і (4) в (2), одержуємо два рівняння, з яких знаходимо сталі: $b_1 = -\frac{Q}{c}$; $b_2 = \frac{\beta}{\omega} b_1$.

Для них вираз швидкості спрощується і набуває вигляду:

Метою статті є дослідження спільного впливу дисипативних сил різної природи на характеристики руху осцилятора, миттєво навантаженою сталою силою.

Викладення основного матеріалу.

1. Переміщення осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + cx = P \cdot H(t), \quad (1)$$

де: m – маса осцилятора; $x = x(t)$ – переміщення; k – коефіцієнт лінійного в'язкого опору; F_T – сила сухого тертя; c – коефіцієнт пружності; t – час; P – зовнішня сила; $H(t)$ – функція Хевісайда; крапка означає похідну по t .

Рівняння (1) розв'язуємо при нульових початкових умовах:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Далі вважаємо, що: $P > F_T$, тобто: $Q = P - F_T > 0$.

На проміжку часу $t \in [0; t_1]$, де $\dot{x} \geq 0$, рівняння (1) набуває вигляду:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = Q$$

і має загальний розв'язок:

$$x(t) = \exp(-\beta t) \left[b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t) \right] + \frac{Q}{c} \quad (3)$$

$$\text{Тут } \beta = \frac{k}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \beta^2}; \quad b_1 \text{ і } b_2$$

– довільні сталі.

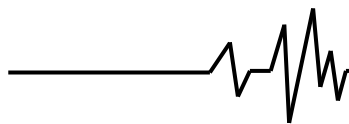
У відповідності з (3) швидкість руху становить:

$$\dot{x}(t) = \frac{Q}{c} \left(\omega + \frac{\beta^2}{\omega} \right) \exp(-\beta t) \sin(\omega t). \quad (5)$$

Із (5) випливає, що осцилятор призупиниться, коли

$$\omega t = \pi \Rightarrow t = t_1 = \pi / \omega.$$

В цей момент часу, згідно з (3):



$$a_1 = \max x(t) = x(t_1) = \frac{Q}{c} \left[1 + \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right) \right]. \quad (6)$$

Для такого максимального переміщення маємо коефіцієнт динамічності:

$$K_d = \frac{a_1 c}{Q} = 1 + \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right).$$

При $k=0$, $K_d=2$. Отже, наявність в'язкого опору ($k>0$) зменшує коефіцієнт динамічності.

Для проміжку руху $t \in [t_1; t_2]$, де $\dot{x} \leq 0$, рівняння (1) приймає вигляд:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = S, \quad (7)$$

де $S = P + F_T$.

По аналогії з (3), розв'язок рівняння (7) подається виразом:

$$x(t) = \exp[-\beta(t-t_1)] \cdot \{b_1 \cos[\omega(t-t_1)] + b_2 \sin[\omega(t-t_1)]\} + \frac{S}{c}. \quad (8)$$

Початкові умови:

$$x(t_1) = a_1; \quad \dot{x}(t_1) = 0$$

виконуються, коли:

$$b_1 = a_1 - \frac{S}{c}; \quad b_2 = \frac{\beta}{\omega} b_1.$$

Для швидкості руху із (8) отримуємо залежність:

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{S}{c} - a_1\right) \left(\omega + \frac{\beta^2}{\omega}\right) \exp[-\beta(t-t_1)] \sin[\omega(t-t_1)],$$

за умови, що $a_1 > S/c$.

Осцилятор призупиниться, коли:

$$t = t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega}.$$

В цей момент часу його переміщення становить:

$$a_2 = \min x(t) = x(t_2) = \frac{S}{c} + \left(\frac{S}{c} - a_1\right) \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right). \quad (9)$$

Подальше обчислення екстремальних переміщень осцилятора зводиться до використання формул:

$$a_3 = \max x(t) = \frac{Q}{c} + \left(\frac{Q}{c} - a_2\right) \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right), \quad \left(a_2 < \frac{Q}{c}\right);$$
$$a_4 = \min x(t) = \frac{S}{c} + \left(\frac{S}{c} - a_3\right) \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right), \quad \left(a_3 > \frac{S}{c}\right) \quad (10)$$

Якщо не будуть виконуватись вказані в дужках нерівності, то осцилятор повністю припинить рух, потрапивши в область застою.

Розглянемо приклад. Для проведення розрахунків задаємо: $m=2$ кг; $c=5008$ Н/м; $k=8$ Нс/м; $P=45$ Н; $F_T=5$ Н. Цим

числовим даним відповідають: $\omega=50$ с⁻¹;

$$\exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right) \approx 0,8819;$$

$K_d \approx 1,8819 < 2$. Як бачимо, коефіцієнт



динамічності менший ніж у лінійній системі без опору.

Результати обчислень екстремальних переміщень a_i за формулами (6), (9) і (10) та час їх досягнення t_i записано в табл. 1.

Таблиця 1.

Значення $a_i, t_i, i = \overline{1;4}$

i	1	2	3	4
$100 a_i, \text{ м}$	1,503	0,553	1,015	0,984
$100 t_i, \text{ с}$	6,283	12,566	18,850	25,133

Більш повна картина руху осцилятора подана на рис. 1, який одержано чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері.

Експериментальні значення переміщень на графіку такі як в табл. 1. Завдяки наявності сухого тертя рух осцилятора обмежений у часі і включає лише три розмахи коливань. Для порівняння на рис. 2 показано графік переміщень осцилятора при відсутності дисипативної сили ($k = F_T = 0$), коли процес коливань не обмежений у часі.

Цей графік має такий же вигляд, як і графіки переміщень центру миттєво навантаженої пластини, одержані в роботах [12, 13], без врахування дії дисипативних сил.

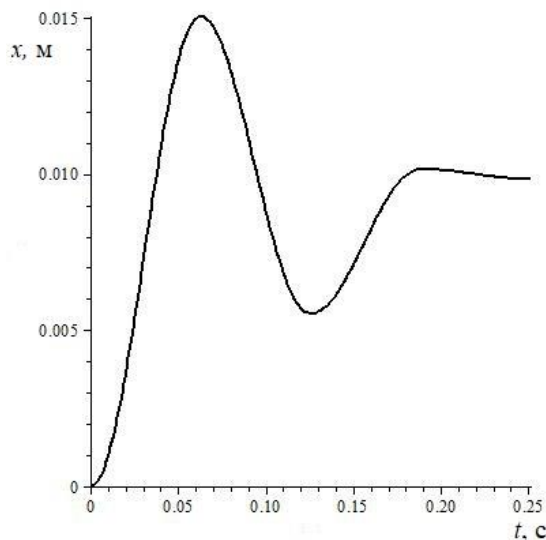


Рис. 1. Графік переміщення дисипативного осцилятора

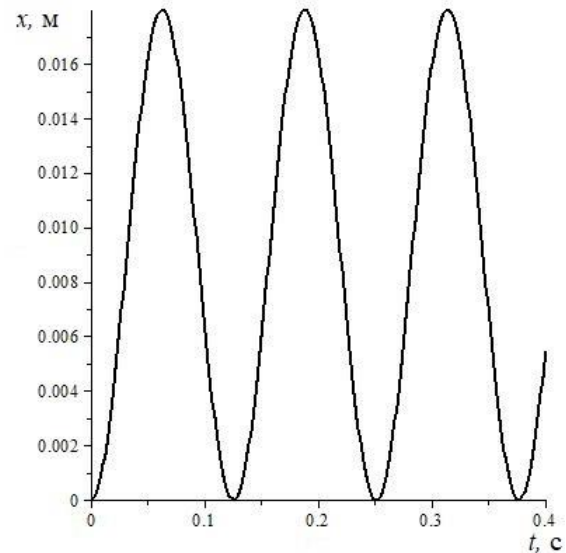


Рис. 2. Графік переміщення осцилятора при $k = F_T = 0$

Графіки на рис. 1. і рис. 2 мають не тільки кількісні, а й якісні відмінності, що підтверджує суттєвий вплив сил опору на процес коливань навантаженого осцилятора і це стосується й реальних елементів конструкцій [8].

2. Осцилятор з додатковим позиційним тертям. Узагальнимо результати попереднього дослідження на випадок, коли в коливальній системі діють спільно три сили опору. Вільні коливання такого осцилятора розглядали в [10, 11].

Наявність позиційного тертя робить пружну характеристики системи нелінійною, що показано на рис. 3, де графічно зображена залежність сили пружності F_y від переміщення осцилятора x .

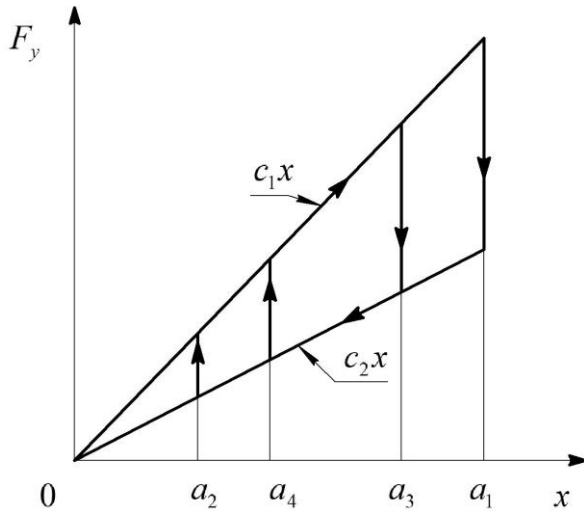


Рис. 3. Залежність сили пружності від переміщення

На інтервалі руху, де зростає переміщення (деформація пружини), коефіцієнт жорсткості системи $c_1 = c + \Delta c$, а на інтервалах зменшення x : $c_2 = c - \Delta c > 0$. Тут c і Δc позитивні сталі [14, 15]. Якщо $\Delta c = 0$, то характеристика пружності стає лінійною.

Рух миттєво навантаженого осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + (c + \Delta c \text{sign}(\dot{x}))x = P \cdot H(t), \quad (11)$$

в припущенні, що $P > F_T$.

Його розв'язуємо при нульових початкових умовах (2).

На проміжку часу $t \in [0; t_1]$, де $\dot{x} \geq 0$, $x \in [0; a_1]$, рівняння (11) має вигляд:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c_1 x = Q = P - F_T. \quad (12)$$

Розв'язок рівняння (11) подається виразом:

$$x(t) = \exp(-\beta t) [d_1 \cos(\omega_1 t) + d_2 \sin(\omega_1 t)] + \frac{Q}{c_1}, \quad (13)$$

у якому $\beta = \frac{k}{2m}$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta^2}$; $\dot{x}(t) = \frac{Q}{c_1} \left(\omega_1 + \frac{\beta^2}{\omega_1} \right) \exp(-\beta t) \sin(\omega_1 t)$

$$d_1 = -\frac{Q}{c_1}; \quad d_2 = \frac{\beta}{\omega_1} d_1.$$

При цьому швидкість руху становить:

Перша зупинка осцилятора відбудеться при: $t = t_1 = \pi / \omega_1$.

В цей момент часу, згідно з (13), осцилятор має максимальне переміщення:

$$a_1 = \max x(t) = x(t_1) = \frac{Q}{c_1} \left[1 + \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega_1}\right) \right]$$

якому відповідає коефіцієнт динамічності:

$$K_d = 1 + \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega_1}\right) < 2.$$

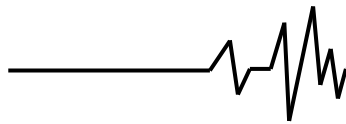
На проміжку часу $t \in [t_1; t_2]$, де $\dot{x} \leq 0$,

$x \in [a_1; a_2]$, рівняння (11) набуває вигляд:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c_2 x = S = P + F_T$$

і має розв'язок:

$$x(t) = \exp[-\beta(t-t_1)] \cdot \{d_1 \cos[\omega_2(t-t_1)] + d_2 \sin[\omega_2(t-t_1)]\} + \frac{S}{c_2}. \quad (14)$$



Тут $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta^2}$; $d_1 = a_1 - \frac{S}{c_2}$; Диференціюванням (14) отримуємо швидкість руху:

$$d_2 = \frac{\beta}{\omega_2} d_1.$$

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{S}{c_2} - a_1 \right) \left(\omega_2^2 + \frac{\beta^2}{\omega_2} \right) \exp[-\beta(t-t_1)] \sin[\omega_2(t-t_1)],$$

за умови, що $a_1 > S/c_2$.

В момент зупинки осцилятора, при $t = t_2 = t_1 + \pi / \omega_2$, мінімальне переміщення його становить:

$$a_2 = \min x(t) = x(t_2) = \frac{S}{c_2} + \left(\frac{S}{c_2} - a_1 \right) \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega_2}\right).$$

На наступних циклах коливань маємо екстремуми:

$$a_3 = \max x(t) = \frac{Q}{c_1} + \left(\frac{Q}{c_1} - a_2 \right) \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega_1}\right), \left(a_2 < \frac{Q}{c_1} \right);$$

$$a_4 = \min x(t) = \frac{S}{c_2} + \left(\frac{S}{c_2} - a_3 \right) \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega_2}\right), \left(a_3 > \frac{S}{c_2} \right)$$

Якщо не виконуються вказані в дужках нерівності, то осцилятор попадає в область застою, тобто повністю припиняє рух.

В якості прикладу обчислимо характеристики руху осцилятора при $m = 2$ кг; $c = 4608$ Н/м; $k = 8$ Нс/м; $F_T = 5$ Н; $\Delta c = 400$ Н/м; $P = 45$ Н. Для таких числових даних: $c_1 = 5008$ Н/м; $c_2 = 4208$ Н/м; $\omega_1 = 50$ с⁻¹; $\omega_2 \approx 45,8258$ с⁻¹;

$$\exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega_2}\right) \approx 0,8719;$$

$$K_d \approx 1,8819 < 2.$$

Обчислені значення a_i та час їх досягнення t_i записано з табл. 2.

Таблиця 2.

Значення a_i, t_i

i	$100 a_i, \text{ м}$	$100 t_i, \text{ с}$
1	1,503	6,283
2	0,914	13,139

Тут маємо лише один цикл коливань, що підтверджує графік руху осцилятора на рис. 4, одержаний чисельним інтегруванням рівняння (11) на комп'ютері.

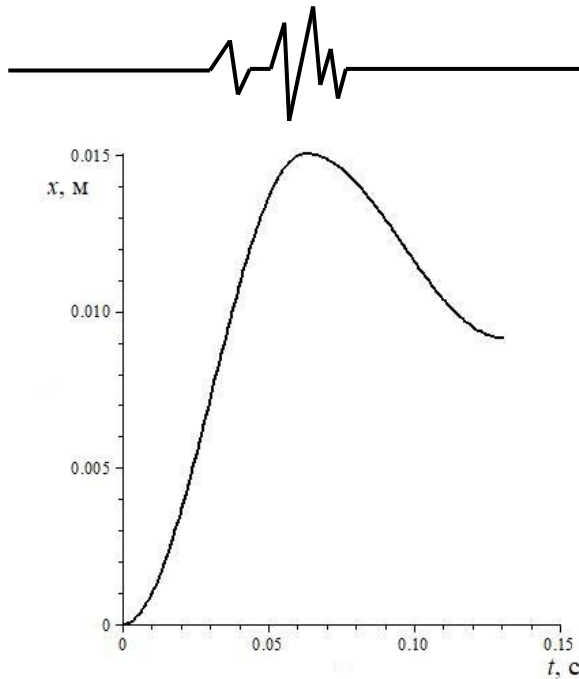


Рис. 4. Графік переміщення осцилятора при наявності позиційного тертя

Екстремальні переміщення на графіку та час їх досягнення узгоджуються з тими, що в табл. 2.

І при наявності трьох складових сил опору метод припасовування дає замкнуті розв'язки нелінійної задачі в елементарних функціях.

3. Ідентифікація параметрів навантаження і сил опору. Побудовані вище аналітичні залежності можна також використовувати для розв'язування обернених задач динаміки, пов'язаних з визначенням

характеристик зовнішнього навантаження і сил опору за результатами експериментального вимірювання екстремальних переміщень навантаженого осцилятора. Зазначимо, що обернені задачі динаміки традиційно розв'язували аналітико-чисельними методами для лінійних систем в [16-18]. В названих роботах проблема визначення зовнішнього динамічного навантаження зведена до чисельного розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра. У випадку нелінійних систем втрачає чинність принцип суперпозиції, тому обернені задачі динаміки доводиться розв'язувати іншими методами. Покажемо, що виведені вище формули можна використати і для розв'язування деяких обернених задач.

Задача. 1. Треба визначити P і F_T , коли відомі m , c , k і експериментально знайдено a_1 і a_2 . Вирази (6) і (9) зводяться до системи рівнянь:

$$\begin{aligned} ca_1 &= (P - F_T)(1 + q); \\ ca_2 &= (P + F_T)(1 + q) - cqa_1, \end{aligned} \quad (15)$$

в якій $q = \exp\left(-\frac{k\pi}{2m\omega}\right)$.

Розв'язавши систему (15), одержуємо:

$$P = \frac{c}{2} \left(a_1 + \frac{a_2}{1+q} \right); F_T = \frac{c}{2(1+q)} [a_2 - (1-q)a_1]. \quad (16)$$

Проведено обчислення цих сил при $m = 2$ кг; $c = 5008$ Н/м; $k = 8$ Н·с/м; $a_1 = 0,015$ м; $a_2 = 0,0055$ м. Значення a_1 і a_2 взяли близькі до тих, що в табл. 1. Тоді: $\omega = 50$ с⁻¹; $q \approx 0,8819$. Розрахунок за формулами (16) дає: $P \approx 44,878$ Н;

$F_T \approx 4,961$ Н. Ці значення P і F_T теж близькі до тих, що задавали в прямій задачі при отриманні результатів, записаних в табл. 1.

Задача 2. Відомі параметри m , c , P , a_1 , a_2 . Треба визначити характеристики опору F_T і k . Із системи (15) випливає, що:

$$q = \frac{ca_2}{2P - ca_1}; k = \frac{2\sqrt{mc}}{\pi} \ln \frac{1}{q}; F_T = P - \frac{ca_1}{1+q}. \quad (17)$$

З метою апробації цих формул проведемо обчислення k і F_T при $m = 2$ кг; $c = 5008$ Н/м; $P = 45$ Н; $a_1 = 0,01503$ м; $a_2 = 0,00553$ м. Підстановкою вказаних числових даних в (17), одержуємо:

$q \approx 0,8802$; $k \approx 8,130$ Н·с/м; $F_T \approx 4,967$ Н. Ці значення k і F_T не суттєво відрізняються від тих, що задавали в прямій задачі при отриманні розмахів записаних в табл. 1, хоча розглянута обернена задача відноситься до математично некоректних.



Відзначимо, що в роботі [10] характеристики опору дисипативного осцилятора ідентифікували за результатами вимірювань його розмахів при вільних коливаннях. Тут для цього використовуємо рух навантаженого осцилятора.

Висновки. Нелінійна задача руху миттєво навантаженого осцилятора з сумарним опором декількох сил різної природи має аналітичний розв'язок в елементарних функціях. Наявність такого опору суттєво впливає на рух після навантаженого осцилятора. Побудовані аналітичні розв'язки дають результати такі, як чисельне інтегрування вихідного нелінійного диференціального рівняння на комп'ютері. Виведені розрахункові формули придатні також для ідентифікації характеристик навантаження і опору за результатами експериментального вимірювання розмахів коливань.

Список використаних джерел

1. Митропольский Ю. А. Избранные труды: в 2 т. – Киев : Наукова думка, 2012. 504 с.
2. Goloskokov E. G., Filippov A. P. *Instationäre Schwingungen Mechanischer Systeme*. Berlin : Akademie-Verlag. 1971. 352 p.
3. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов. Харьков : Міськдрук, 2014. 264 с.
4. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів. Київ : Вища школа, 2004. 655 с.
5. Шкельов Л. Т., Станкевич А. М., Пошивак Д. В. Опір матеріалів. Київ : Віпол, 2011. 456 с.
6. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. Харьков : Міськдрук, 2012. 320 с.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. Москва : Наука, 1977. 224 с.
8. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т 1. Колебания линейных систем / Под редакцией В. В. Болотина. Москва : Машиностроение, 1978. 352 с.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва : Дрофа, 2004. 591 с.
10. Ольшанський В. П., Тищенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків : Міськдрук, 2016. 264 с.
11. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. Харків : Міськдрук, 2020. 268 с.

12. Сметанкіна Н. В., Угримов С. В., Шупіков О. М., Бузько Я. П. Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Технології в машинобудуванні. Харків, 2002. №. 19. С. 68-72.

13. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков : Міськдрук, 2011. 376 с.

14. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. Москва : Высшая школа, 1980. 408 с.

15. Сурьянинов Н. Г., Дащенко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин. Одесса : ОГПУ, 2000. 306 с.

16. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Харьков : ХНАДУ, 2004. 392 с.

17. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Часть 2. Харьков : ХНАДУ, 2010. 212 с.

18. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. Харьков : Лидер, 2018. 214 с.

Список джерел у транслітерації

1. Mitropolskij, Yu. A. (2012). *Izbrannye trudy : v 2 t [Selected works : in 2 vol.]*. Kiev : Naukova dumka. [In Russian].
2. Goloskokov, E. G., & Filippov, A. P. (1971). *Instationäre Schwingungen Mechanischer Systeme [Unsteady vibrations of mechanical systems]*. Berlin : Akademie-Verlag. [In German].
3. Olshanskiy, V. P., & Olshanskiy, S. V. (2014). *Metod VBK v raschyotakh nestacionarnykh kolebanij oscilyatorov. [VBK method in calculating non-stationary oscillations of oscillators]*. Kharkov : Miskdruk. [In Russian].
4. Pysarenko, G. S., Kvitka, O. L., & Umanskyj, E. S. (2004) *Opir materialiv [Strength of materials]*. Kyiv : Vyshha shkola. [In Ukrainian].
5. Shkelov, L. T., Stankevych, A. M., & Poshyvak, D. V. (2011) *Opir materialiv [Strength of materials]*. Kyiv : Vipol. [In Ukrainian].
6. Olshanskiy, V. P., Tishhenko, L. N. & Olshanskiy, S. V. (2012). *Kolebaniya stержnej i plastin pri mekhanicheskom udare. [Vibrations of the rods and plates under mechanical shock]*. Kharkov : Miskdruk. [In Russian].
7. Panovko, Ya. G. (1977). *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara [Introduction to the theory of mechanical shock]*. Moskva : Nauka. [In Russian].



8. Bolotin, V. V. (Ed) (1978) *Vibraczii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh. Kolebaniya linejnykh sistem [Vibrations in technology. Reference book in six volumes. Oscillations of linear systems]*. (Vols. 1). Moskva : Mashinostroenie. [In Russian].
9. Babakov, I. M. (2004). *Teoriya kolebanij [Oscillation theory]*. Kiev : Naukova dumka. [In Russian].
10. Olshanskiy, V. P., Tishhenko, L. N. & Olshanskiy, S. V. (2016). *Dynamika dysypatyvnyh oscylyatoriv. [Dynamics of dissipative oscillators]*. Kharkiv : Miskdruk. [In Ukrainian].
11. Olshanskiy, V. P., Slipchenko, M. V., Spolnik, O. I., & Burlaka, V. V. (2020). *Nelinijni kolyvannya dysypatyvnyh oscylyatoriv. [Nonlinear oscillations of dissipative oscillators]*. Kharkiv : Miskdruk. [In Ukrainian].
12. Smetankina, N. V., Ugrimov, S. V., Shupikov, O. M., & Buzko, Ya. P. (2002). *Dynamichnyj vidguk plastyn, yaki lezhat na pruzhnij osnovi [Dynamic response of plates that lie on an elastic base]*. *Visnik NTU «KhPI». Seriya: Tekhnologiyi v mashinobuduvanni [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Technologies in mechanical engineering]*. Kharkiv, 19, 68-72. [In Ukrainian].
13. Smetankina, N. V. (2011). *Nestaczionarne deformirovanie, termouprugost i optimizacziya mnogoslujnykh plastin i cilindricheskikh obolochek [Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells]*. Kharkov : Miskdruk. [In Russian].
14. Biderman, V. L. (1980). *Teoriya mekhanicheskikh kolebanij [Theory of mechanical oscillations]*. Moskva : Vysshaya shkola. [In Russian].
15. Suryaninov, N. G., Dashhenko, A. F., & Belous, P. A. (2000). *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin [Theoretical foundations of machine dynamics]*. Odessa : OGPU. [In Russian].
16. Yanyutin, E. G., Yanchevskij, I. V., Voropaj, A. V., & Sharapata, A. S. (2004). *Zadachi impulsnogo deformirovaniya elementov konstrukcij [Problems of impulse deformation of structural elements]*. Kharkov : KhNADU. [In Russian].
17. Yanyutin, E. G., Voropaj, A. V., Povalyaev, S. I., & Yanchevskij, I. V. (2010). *Identifikacziya zagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Chast 2. [Identification of loads during impulse deformation of bodies. Part 2]*. Kharkov : KhNADU. [In Russian].
18. Voropaj, A. V. (2018). *Integralnye uravneniya Volterra v nekorrektnykh zadachakh nestaczionarnogo deformirovaniya plastin [Volterra integral equations in ill-posed problems of unsteady deformation of plates]*. Kharkov : KhNADU. [In Russian].

КОЛЕБАНИЯ МГНОВЕННО НАГРУЖЕННОГО ДИССИПАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В работе исследованы нестационарные колебания диссипативных осцилляторов. Исследовано совместное влияние сил сопротивления различной природы в составе диссипативной силы на колебания упругого линейного осциллятора, вызванные мгновенным нагружением его постоянной внешней силой. В работе ограничивались случаем малых перемещений, когда упругую характеристику системы можно считать линейной. Задача нелинейная из-за учета действия силы сухого трения, но она допускает построение точных аналитических решений в элементарных функциях. В работе методом припасовывания решений выведены формулы для вычисления размахов колебаний и длительностей полуволн. Сначала рассмотрен вариант, когда сила сопротивления состоит из сил линейного вязкого и сухого трения. Затем проведено обобщение на случай трех сил сопротивления. Третьей силой принята сила позиционного трения, которая возникает в упругих элементах типа листовой рессоры. Показано, что в результате действия суммарной силы сопротивления, колебательный процесс нагруженного осциллятора имеет конечное число циклов и ограничен во времени, что обычно наблюдается на практике. Коэффициент динамичности системы менее двух. Рассмотрены примеры расчетов, иллюстрирующие возможности изложенной теории. Для проверки адекватности выведенных расчетных формул дополнительно проводилось численное компьютерное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений движения осциллятора.

Показано полное соответствие числовых результатов, полученных с использованием различных методов. Кроме прямых задач динамики, рассмотрены также обратные задачи по определению характеристик нагрузки и сопротивления по результатам измерения размахов колебаний. Выведенные расчетные формулы пригодны и для идентификации характеристик нагрузки и сопротивления по результатам экспериментального измерения размахов колебаний. Приведены примеры идентификации этих характеристик.

Проведенное исследование показало, что нелинейная задача движения мгновенно нагруженного осциллятора с суммарным сопротивлением нескольких сил различной природы имеет аналитическое решение в элементарных функциях. Наличие такого



сопротивления существенно влияет на движение осциллятора после нагружения. Построенные аналитические решения дают результаты такие, как и численное интегрирование исходного нелинейного дифференциального уравнения на компьютере, что подтверждает адекватность полученных формул.

Ключевые слова: ступенчатый силовой импульс, совместное действие сил сопротивления различной природы, определение размахов колебаний, сравнение результатов, полученных различными способами, идентификация характеристик нагрузки и сопротивления.

VIBRATIONS OF AN INSTANTLY LOADED DISSIPATIVE OSCILLATOR

The work investigates non-stationary oscillations of dissipative oscillators. The joint influence of resistance forces of different nature in the composition of the dissipative force on the oscillations of an elastic linear oscillator caused by its instantaneous loading by a constant external force is investigated. The work was limited to the case of small displacements, when the elastic characteristic of the system can be considered linear. The problem is nonlinear due to the account of the action of the dry friction force, but it allows the construction of exact analytical solutions in elementary functions. In this work, by the method of adding solutions, formulas are derived for calculating the amplitude of oscillations and the duration of half cycles. First, a variant is considered when the resistance force consists of linear viscous and dry friction forces. Then a generalization is made to the case of three resistance forces. The third force is the force of positional friction, which arises in elastic elements

such as a leaf spring. It is shown that as a result of the action of the total resistance force, the oscillatory process of a loaded oscillator has a finite number of cycles and is limited in time, which is usually observed in practice. The system dynamic factor is less than two. Examples of calculations that illustrate the possibilities of the stated theory are considered. To check the adequacy of the derived calculation formulas, numerical computer integration of the nonlinear differential equations of the oscillator motion was additionally carried out.

The full agreement of the numerical results obtained using various methods is shown. In addition to direct problems of dynamics, the inverse problems of determining the characteristics of the load and resistance from the results of measuring the amplitude of oscillations are also considered. The derived calculation formulas are also suitable for identifying the characteristics of the load and resistance based on the results of experimental measurements of the oscillation ranges. Examples of identifying these characteristics are given.

The study showed that the nonlinear problem of motion of an instantly loaded oscillator with the total resistance of several forces of different nature has an analytical solution in elementary functions. The presence of such resistance significantly affects the motion of the oscillator after loading. The constructed analytical solutions give results such as the numerical integration of the original nonlinear differential equation on a computer, which confirms the adequacy of the formulas obtained.

Keywords: stepped power impulse, joint action of resistance forces of different nature, determination of vibration ranges, comparison of results, different methods, identification of load and resistance characteristics.

Відомості про авторів

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; OlshanskiyVP@gmail.com тел.: (066) 0100955

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; OlshanskiyVP@gmail.com, тел.: (066) 0100955

Olshanskiy Vasyl Pavlovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; OlshanskiyVP@gmail.com, тел.: (066) 0100955

Сліпченко Максим Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства



ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Слипченко Максим Владимирович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, ул. Алчевських, 44, г. Харків, Україна, 61022; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Slipchenko Maksym Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Associate Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; Slipchenko_M@ukr.net, тел.: (066) 7120989

Спольнік Олександр Іванович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; alexspo@ukr.net, (067) 764-84-64

Спольник Александр Иванович – доктор фізико-математичних наук, професор, заведуючий кафедрой фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, ул. Алчевських, 44, г. Харків, Україна, 61022; alexspo@ukr.net, (067) 764-84-64

Spolnik Oleksandr Ivanovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkiv, Ukraine; 61022; alexspo@ukr.net, (067) 764-84-64

Солона Олена Василівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: solona_o_v@ukr.net).

Солона Елена Васильевна – кандидат технічних наук, доцент кафедри общетехнічних дисциплін і охорони праці Вінницького національного аграрного університету (ул. Солнечная, 3, г. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: solona_o_v@ukr.net).

Solona Olena – Candidate of Technical Sciences (*Ph. D in Engeneering*), Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines and Labor Protection, Vinnytsia National Agrarian University (3, Solnyschaya St., Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: solona_o_v@ukr.net).